

Aplikasi Pohon Merentang (Spanning Tree) Dalam Pengoptimalan Jaringan Listrik

Aidil Syaputra (13510105)

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

Email : aidilisyaputra@students.itb.ac.id dan dil_syaputra@yahoo.com

Abstrak—Graf adalah salah satu kajian dalam matematika diskrit. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Penggunaan graf dilakukan pertama kali tahun 1736 untuk memecahkan masalah yang terkenal dengan nama Masalah Jembatan Konigsberg.

Orang yang pertama kali mempunyai ide untuk memecahkan graf masalah jembatan ini menggunakan graf adalah L. Euler, matematikawan asal Swiss. Dua bagian yang penting dalam representasi graf adalah simpul (vertex) dan ruas (edge). Sehingga graf bisa dikatakan sebagai himpunan dari simpul dan ruas.

Teori graf banyak diterapkan dalam berbagai kelimuan, seperti : optimalisasi jaringan, ekonomi, psikologi, genetika dan riset operasi.

Makalah ini membahas mengenai teori graf dan pohon merentang (spanning tree). dan aplikasinya pengoptimalan jaringan listrik. Dengan menggunakan pohon merentang minimum, pengoptimalan jaringan listrik pun dapat dilakukan.

Kata Kunci—graf, pohon, pohon merentang (spanning tree), algoritma prim, algoritma kruskal

I. PENDAHULUAN

Sekarang ini aplikasi graf telah banyak digunakan oleh manusia untuk merepresentasikan permasalahan yang ada agar lebih mudah dipecahkan. Ilmuwan kimia menggunakan graf dalam memodelkan molekul senyawa karbon, orang teknik elektro menggunakan graf dalam perancangan integrated circuit, serta masalah kemacetan lalu lintas dapat diselesaikan dengan memodelkan jalan raya dalam graf.

Selain itu, dalam kehidupan sehari-hari, banyak persoalan yang dapat disimpulkan sebagai persoalan yang berhubungan dengan himpunan, yang mana logika dari persoalan tersebut seringkali dapat digambarkan dengan sebuah graf. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf dinyatakan berupa objek sebagai noktah (titik) atau bulatan, sedangkan hubungan antara objek-objek dinyatakan dengan garis.

Penggunaan Teori Graf banyak memberikan solusi untuk menyelesaikan permasalahan yang terjadi di dalam masyarakat.

Ilmu terapan graf tersebut terus berkembang hingga saat ini. Kini graf juga dapat digunakan untuk optimisasi jaringan listrik. Persoalan itulah yang ingin diulas dalam makalah ini.

Di Indonesia jaringan listrik belum optimal. Sebagai contoh kasus: Berdasarkan data yang diperoleh dari PLN cabang Jember dapat diketahui bahwa panjang kabel total yang terpasang di Perumahan Jember Permai adalah sepanjang 1306 meter. Menurut PLN, jaringan listrik ini belum optimal, maka harus dilakukan penelitian lebih lanjut, yaitu dengan cara melakukan pengukuran jarak antar rumah, antar tiang listrik dan antara rumah dan tiang listrik. Setelah dilakukan pengukuran, data yang diperoleh dari PLN cabang Jember dan data hasil pengukuran direpresentasikan dalam graf, yang mana graf hasil representasi tersebut siap untuk dianalisis dengan menggunakan Algoritma Prim. Dengan menerapkan pohon merentang minimum maka kita dapat mengoptimalkan jaringan listrik tersebut.

II. DASAR TEORI

2.1 Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) yang dalam hal ini :

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau node)
 $= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$

dan

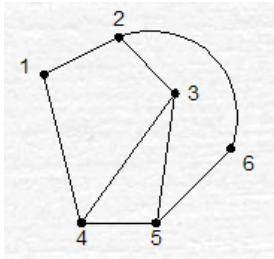
E = himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul
 $= \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$

atau dapat ditulis dengan notasi $G=(V,E)$.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis :

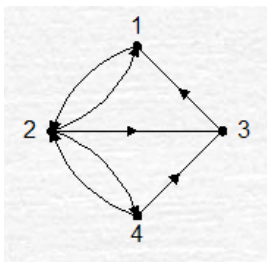
a) Graf tak berarah (*undirected graph*)

Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(V_j, V_k) = (V_k, V_j)$ adalah sisi yang sama.



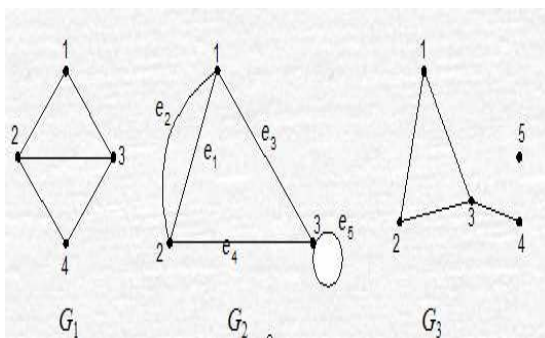
Gambar 01. Gambar graf tak berarah.

b) Graf berarah (*directed graph*)
 Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah (V_j, V_k) dan (V_k, V_j) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(V_j, V_k) \neq (V_k, V_j)$. Untuk busur (V_j, V_k) , simpul V_j dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul V_k dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*).



Gambar 02. Gambar graf berarah.

2.2 Terminologi Dasar



Gambar 03. Gambar beberapa graf.

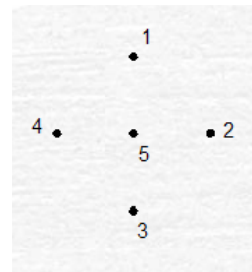
a) Bertetangga (Adjacent)
 Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, V_j bertetangga dengan V_k jika (V_j, V_k) adalah sebuah sisi pada graf G .
 Pada graf G_1 (gambar 03), simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3. Simpul 1 tidak bertetangga

dengan simpul 4.

b) Bersisian (Incident)
 Untuk sembarang sisi $e = (V_j, V_k)$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul V_j dan simpul V_k .
 Pada graf G_1 (gambar 03), sisi $(2, 3)$ bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3. Sisi $(2, 4)$ bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4. Tetapi sisi $(1, 2)$ tidak bersisian dengan simpul 4.

c) Simpul terpencil (Isolated vertex)
 Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.
 Pada graf G_3 (gambar 03), simpul 5 adalah simpul terpencil.

d) Graf kosong (Null graph atau Empty graph)
 Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.



Gambar 04. Gambar graf kosong

e) Derajat (Degree)
 Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Perhatikan gambar 03.
 Pada graf G_1 : $d(1) = d(4) = 2$, $d(2) = d(3) = 3$.
 Pada graf G_3 : $d(5) = 0$, $d(4) = 1$.
 Pada graf G_2 : $d(1) = 3$, $d(2) = 4$.

Pada graf berarah, derajat simpul v dinyatakan dengan $din(v)$ dan $dout(v)$ yang dalam hal ini :

$din(v)$ = derajat masuk (in-degree) = jumlah busur yang masuk ke simpul v
 $dout(v)$ = derajat keluar (out-degree) = jumlah busur yang keluar ke simpul v

dan $d(v) = din(v) + dout(v)$

Perhatikan gambar 02.

$din(1) = 2$; $dout(1) = 1$

$din(2) = 2$; $dout(2) = 3$

$din(3) = 2$; $dout(3) = 1$

$din(4) = 1$; $dout(4) = 2$

f) Lintasan (Path)
 Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul –simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_n$.

Pada graf G_1 (gambar 03) : lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

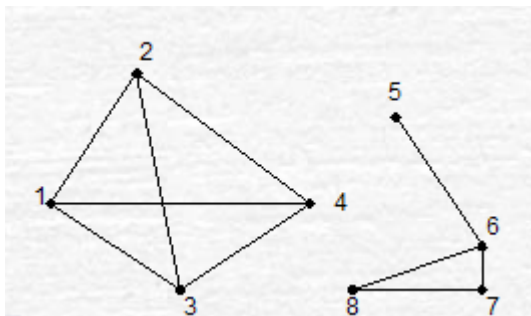
Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.

- g) Siklus (Cycle) atau Sirkuit (Circuit)
Lintasan yang berawal dan berahir pada simpul yang sama disebut siklus dan sirkuit.

Pada graf G_1 (gambar 03) : 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.

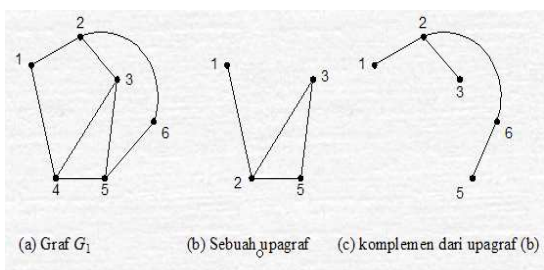
- h) Terhubung (Connected)
Graf tak berarah G disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul V_i dan V_j di dalam himpunan V terdapat lintasan V_i ke V_j . Jika tidak, graf G disebut graf tak terhubung.



Gambar 05. Gambar graf tak terhubung

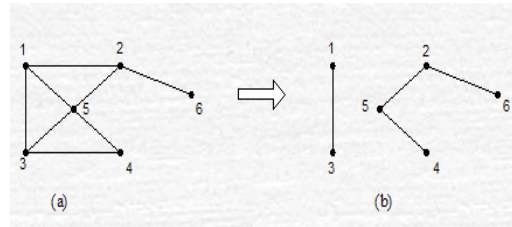
- i) Upgraf (Subgraf) dan Komplemen upgraf
Misalkan $G=(V,E)$ adalah sebuah graf. $G_1=(V_1,E_1)$ adalah upgraf dari G jika V_1 himpunan bagian V dan E_1 himpunan bagian E .

Komplemen dari upgraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2=(V_2,E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.



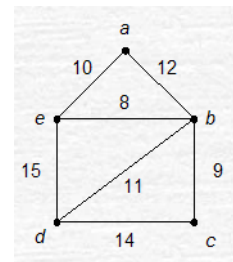
Gambar 06. Gambar upgraf dan komplemen upgraf

- j) Cut-Set
Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, cut-set selalu menghasilkan dua buah komponen terhubung.



Gambar 07. Gambar Cut-Set

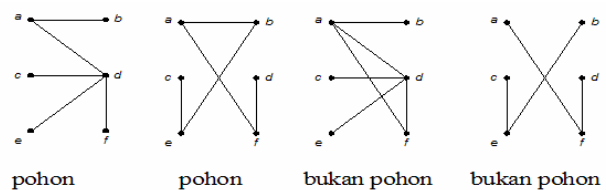
- k) Graf Berbobot
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Gambar 08. Gambar graf berbobot.

2.3 Pohon

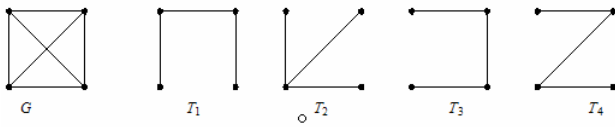
Pohon adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit.



Gambar 09. Gambar pohon dan bukan pohon.

2.4 Pohon Merentang

Misalkan $G = (V,E)$ adalah graf tak berarah terhubung yang bukan pohon, yang berarti di G terdapat beberapa sirkuit. G dapat diubah menjadi pohon $T = (V_1,E_1)$ dengan cara memutuskan sirkuit-sirkuit yang ada. Pohon yang dihasilkan tersebut dinamakan pohon merentang.



Gambar 10. Gambar pohon merentang

2. 5 Pohon Merentang Minimum

Jika G adalah graf berbobot, maka bobot pohon merentang T dari G didefinisikan sebagai jumlah bobot yang semua sisi di T . Pohon merentang yang berbeda mempunyai bobot yang berbeda pula. Diantara semua pohon merentang di G , pohon merentang yang berbobot minimum dinamakan pohon merentang minimum.

Cara membangun pohon merentang minimum adalah algoritma prim dan algoritma kruskal

a) Algoritma prim

Algoritma prim membentuk minimum langkah per langkah. Pada setiap langkah diambil sisi graf G yang mempunyai bobot minimum namun terhubung dengan pohon merentang minimum T yang telah terbentuk.

Langkah-langkahnya :

- Ambil sisi graf G yang berbobot minimum, masukkan kedalam T .
- Pilih sisi (u,v) yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di T , tetapi (u,v) tidak membentuk sirkuit di T . Tambahkan (u,v) ke dalam T .
- Ulangi sebanyak $n-2$ kali

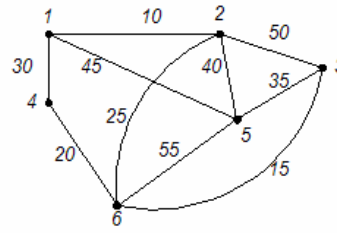
Dengan notasi *pseudo-code*, algoritma prim ditulis sebagai berikut.

```

procedure Prim(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung-berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung G = (V, E), dengan |V| = n
Keluaran: pohon rentang minimum T = (V, E')
}
Deklarasi
i, p, q, u, v : integer
Algoritma
Cari sisi (p,q) dari E yang berbobot terkecil
T ← {(p,q)}
for i ← 1 to n-2 do
  Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil namun
  bersisian dengan simpul di T
  T ← T ∪ {(u,v)}
endfor

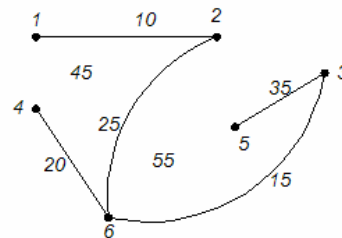
```

Contoh :



Langkah	Sisi	Bobot	Pohon rentang
1	(1, 2)	10	
2	(2, 5)	25	
3	(3, 6)	15	
4	(4, 6)	20	
5	(3, 5)	35	

Pohon merentang minimum yang dihasilkan adalah



b) Algoritma kruskal

Langkah-langkahnya sebagai berikut :

- sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik berdasarkan bobotnya – dari bobot kecil ke bobot besar
- T masih kosong
- pilih sisi (u, v) dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di T . Tambahkan (u, v) ke dalam T .
- ulangi langkah 2 sebanyak $n - 1$ kali.

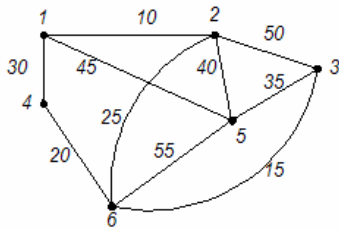
Dengan notasi *pseudo-code*, algoritma kruskal ditulis sebagai berikut.

```

procedure Kruskal(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung -
berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung G = (V, E), dengan |V| = n
Keluaran: pohon rentang minimum T = (V, E')
}
Deklarasi
i, p, q, u, v : integer
Algoritma
( Asumsi: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik
berdasarkan bobotnya - dari bobot kecil ke bobot
besar)
T ← {}
while jumlah sisi T < n-1 do
Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil
if (u,v) tidak membentuk siklus di T then
T ← T ∪ {(u,v)}
endif
endfor

```

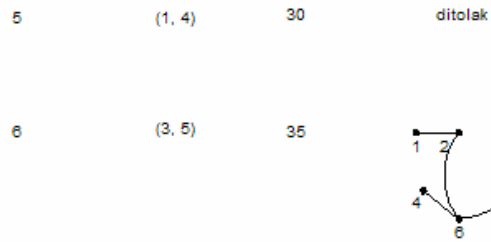
Contoh :



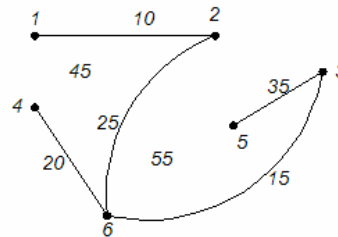
Sisi-sisi diurut menaik:

Sisi	(1,2)	(3,6)	(4,6)	(2,6)	(1,4)	(3,5)	(2,5)	(1,5)	(2,3)	(5,6)
Bobot	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

Langkah	Sisi	Bobot	Hutan merentang
0			
1	(1,2)	10	
2	(3,6)	15	
3	(4,6)	20	
4	(2,6)	25	



Pohon merentang minimum yang dihasilkan adalah

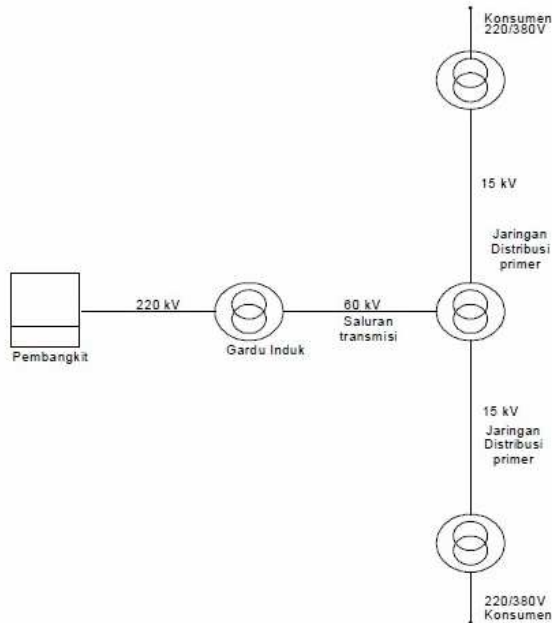


III. PENGOPTIMALAN JARINGAN LISTRIK

Penyaluran (transmisi) energi listrik dari pusat pembangkit listrik dilakukan dengan kabel melalui saluran udara atau saluran bawahan dengan tegangan tinggi. Dibandingkan dengan transmisi saluran bawah tanah, transmisi dengan saluran udara memiliki beberapa keuntungan, antara lain :

- Isolasinya lebih mudah,
- Pendinginnya baik,
- Gangguan-gangguan lebih mudah diatasi dengan cepat,
- Jauh lebih murah.

Di Indonesia, tegangan transmisi dari pusat pembangkit listrik ke gardu induk antara 70kV – 150 kV dengan menggunakan saluran udara. Selanjutnya, dari gardu induk disalurkan ke gardu transformator dengan tegangan 20kV, sedangkan penyaluran dari gardu transformator ke konsumen digunakan tegangan 220/380 V. Diagram penyaluran energi listrik dari pusat pembangkit sampai konsumen ditunjukkan seperti Gambar 11. Untuk jaringan distribusi ini kebanyakan menggunakan saluran udara, kecuali dibagian-bagian kota yang padat menggunakan saluran bawah tanah.

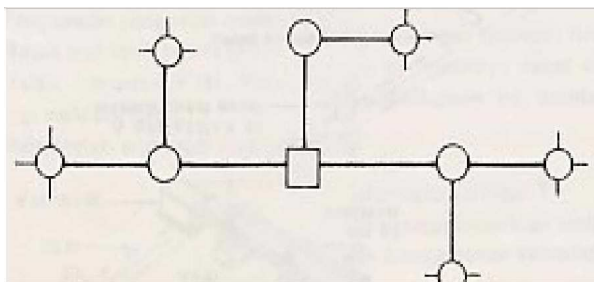


Gambar 11. Gambar blok penyaluran energi listrik

Ditinjau dari konstruksi sistem jaringan dibedakan menjadi beberapa jenis, antara lain :

✓ Sistem radial

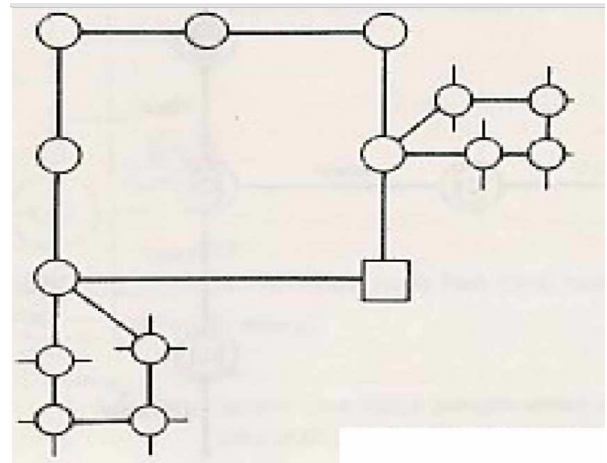
Sistem jaringan ini biasanya gardu-gardu induk dihubungkan langsung dengan pusat listrik. Gardu-gardu transformatornya dihubungkan langsung dengan salah satu gardu induk. Sistem ini digunakan jika letak gardu-gardu induknya tersebar, saling berjauhan dan jauh dari pusat listrik. Diagram jaringan listrik dengan sistem radial ditunjukkan pada Gambar 12.



Gambar 12 Sistem jaringan radial

✓ Sistem jaringan lingkaran

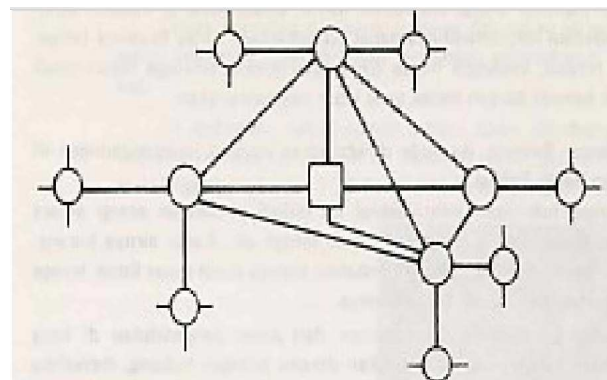
Sistem jaringan ini gardu-gardu induk dihubungkan berderet, sehingga membentuk lingkaran dengan pusat pembangkit listriknya seperti ditunjukkan pada Gambar 13. Gardu-gardu transformatornya juga dihubungkan berderet membentuk lingkaran dengan salah satu gardu induk. Keuntungan sistem ini jika salah satu salurannya terputus di suatu tempat, suplai energinya masih dapat berjalan. Sistem ini digunakan untuk jaringan-jaringan yang dibangun rapat.



Gambar 13 Sistem jaringan lingkaran

✓ Sistem jaringan jala

Sistem jaringan ini gardu-gardu induk dihubungkan langsung dengan pusat listrik. Selain itu, gardu induk yang satu juga dihubungkan denganyang lain. Dibandingkan dengan sistem-sistem yang lain, sistem jala yang paling handal. Dalam praktik untuk mendapatkan tingkat kehandalan yang tinggi digunakan suatu kombinasi dari sistem-sistem tersebut di atas.



Gambar 13 Sistem jaringan jala

Jaringan listrik dapat dioptimalisasi dengan menerapkan pohon merentang dalam pembuatan jaringan listrik tersebut.

Jaringan listrik dapat direpresentasikan sebagai graf, dimana tiang listrik dan rumah sebagai titik sedangkan kabel sebagai sisi. Untuk mendapatkan jaringan listrik yang optimal (dengan panjang kabel terpendek) maka diperlukan suatu metode atau algoritma. Dalam menyelesaikan masalah tersebut dapat digunakan Algoritma Prim atau Algoritma Kruskal yang merupakan algoritma untuk mencari pohon perentang minimum (minimal spanning tree).

IV. KESIMPULAN

Jaringan listrik yaitu medium penyaluran energi listrik.

Biasanya jaringan listrik menggunakan kabel. Jenis jaringan listrik ada 3 yaitu sistem jaringan radial, sistem jaringan lingkaran, dan sistem jaringan jala. Berdasarkan pemaparan yang diungkap di atas, graf dapat merepresentasikan jaringan listrik. Agar dapat mengoptimalkan jaringan listrik (menggunakan kabel yang sedikit) maka dapat menggunakan penerapan teori pohon merentang, dengan menentukan pohon merentang minimum baik menggunakan algoritma prim maupun algoritma kruskal.

V. ACKNOWLEDGMENT

Ucapan terima kasih Saya ucapkan kepada Pak Rinaldi Munir atas dukungan, bimbingan dan berbagai referensi-referensi yang dapat digunakan untuk penyelesaian makalah ini. Terima kasih juga saya ucapkan kepada teman-teman prodi IF maupun STI yang telah bersedia untuk berdiskusi terhadap berbagai permasalahan dalam makalah ini.

REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi, *Diktat Kuliah IF 2091 Matematika Diskrit*, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2008.
- [2] Habibi, Mohammad. *Analisis Jaringan Listrik di Perumahan Jember Permai dengan Menggunakan Algoritma Prim*.
<http://digilib.unej.ac.id/gdl42/gdl.php?mod=browse&op=read&id=gdlhub-gdl-mohammadha-3874>
Tanggal akses : 09 Desember 2011
- [3] Wikipedia, *Teori Graf*
http://id.wikipedia.org/wiki/Teori_graf
Tanggal akses : 09 Desember 2011
- [4] Khanedy, Eko. *Pohon Merentang Minimum*
<http://eecchoo.wordpress.com/tag/pohon-merentang-minimum/>
Tanggal akses : 10 Desember 2011
- [5] Rosyidah, Khullatur. *Teknik Jaringan Listrik*
<http://teknikjaringan.wordpress.com/2011/03/13/teknik-jaringan-listrik/>
Tanggal akses : 10 Desember 2011

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2011



Aidil Syaputra (13510105)