

Studi Tentang Kombinatorial dan Peluang Diskrit Serta Beberapa Aplikasinya

Hanif Eridaputra (13510091)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
he.23292@gmail.com

Abstrak—Makalah ini berisi tentang apa itu kombinatorial dan peluang diskrit serta aplikasi apa saja yang menggunakan kombinatorial atau peluang diskrit. Kombinatorial dan peluang diskrit merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sudah umum. Kombinatorial mempelajari tentang pengaturan objek-objek tanpa harus mengenumerasi terlebih dahulu seperti permutasi atau kombinasi. Peluang terjadinya sebuah titik contoh pada ruang contoh disebut Peluang Diskrit. Pada kehidupan sehari-hari kombinatorial dan peluang diskrit banyak sekali ditemui. Misalnya saja untuk menyelesaikan *Vehicle Routing Problem* (VRP) dan beberapa games sederhana misalnya *Blackjack*. Kesimpulan yang didapat dari makalah ini adalah bahwa kombinatorial dan peluang diskrit dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai macam masalah yang sering kita temukan dalam kehidupan sehari-hari.

Kata Kunci—Kombinatorial, Peluang Diskrit, Aplikasi, Vehicle Routing Problem

I. PENDAHULUAN

Sejak zaman dahulu kala sebenarnya kombinatorial dan peluang diskrit sudah banyak sekali ditemukan. Hanya saja hal tersebut masih belum disadari oleh orang-orang pada saat itu. Semakin lama ilmu pengetahuan semakin berkembang dan melahirkan teorema-teorema baru. Salah satunya adalah Kombinatorial dan Peluang Diskrit. Kombinatorial dan Peluang Diskrit merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dipelajari pada kuliah Struktur Diskrit. Penerapan Kombinatorial dan Peluang Diskrit dalam kehidupan sehari-hari begitu banyak misalnya untuk menyelesaikan VRP (*Vehicle Route Problem*) ataupun dalam sebuah game misalnya Texas Hold 'Em Poker atau *Blackjack*.

II. KOMBINATORIAL

Kombinatorial (Combinatoric) adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek tanpa harus mengenumerasi terlebih dahulu. Solusi yang ingin kita peroleh adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunanannya.

Terdapat dua kaidah dasar untuk dapat memecahkan banyak masalah persoalan menghitung dalam Kombinatorial. Kaidah tersebut adalah Kaidah Perkalian (*rule of product*) dan Kaidah Penjumlahan (*rule of sum*).

- Pada Kaidah Perkalian, misal:
Percobaan 1 : a hasil percobaan
Percobaan 2 : b hasil percobaan
Maka Percobaan 1 dan Percobaan 2 akan menghasilkan $a \times b$ kemungkinan jawaban yang mungkin terjadi.
- Pada Kaidah Penjumlahan, misal:
Percobaan 1 : p hasil percobaan
Percobaan 2 : q hasil percobaan
Maka Percobaan 1 atau Percobaan 2 akan menghasilkan $p + q$ kemungkinan jawaban yang mungkin terjadi.

Kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan tersebut juga dapat diperluas sehingga mengandung lebih dari dua buah percobaan. Misalkan ada n percobaan, masing-masing dengan hasil p_i , maka hasil yang mungkin adalah:

$p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ untuk kaidah perkalian.

$p_1 + p_2 + \dots + p_n$ untuk kaidah penjumlahan.

Dalam Kombinatorial juga terdapat Prinsip Inklusi-Eksklusi. Prinsip ini juga dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan kombinatorial. Rumus dari Prinsip Inklusi-Eksklusi adalah:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Kaidah perkalian juga telah berkembang dan salah satunya yang juga sering digunakan dalam Kombinatorial dan sudah kita kenal yaitu Permutasi. Permutasi memiliki rumus :

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1)) \\ = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh permasalahannya adalah misal terdapat 5 angka 1, 2, 3, 4, 5. Berapa jumlah kemungkinan untuk membentuk 3 angka dari 5 angka tersebut?

Penyelesaian dari persoalan tersebut dapat dibagi menjadi dua. Yang pertama jika dari 5 angka tersebut tidak boleh ada pengulangan ataukan boleh ada pengulangan.

Jika tidak boleh ada pengulangan maka penyelesaiannya adalah:

Dengan kaidah perkalian: $(5)(4)(3) = 120$ buah

Dengan rumus permutasi $P(5, 3) = 5!/(5-3)! = 120$ buah

Jika boleh ada pengulangan maka penyelesaiannya tidak dapat menggunakan permutasi sehingga hanya bisa menggunakan kaidah perkalian. Penyelesaiannya adalah $(5)(5)(5) = 125$ buah.

Selain Permutasi juga terdapat Kombinasi. Kombinasi merupakan perluasan dari Permutasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan sedangkan pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan. Rumus dari Kombinasi adalah seperti berikut:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Selain itu juga terdapat Kombinasi dengan Pengulangan yang biasa dituliskan dengan $C(n+r-1, r)$. Kombinasi dengan Pengulangan adalah jumlah kombinasi yang membolehkan adanya pengulangan elemen, yaitu dari n buah objek kita mengambil r buah objek, dengan pengulangan diperbolehkan. Maka rumusnya adalah:

$$C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$$

Contoh permasalahannya misal diketahui persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0 . Berapa jumlah kemungkinan solusinya. Untuk mendapat penyelesaiannya adalah dengan cara menganalogikan 12 buah bola dimasukkan ke dalam 4 buah kotak ($n = 4$ dan $r = 12$). Maka penyelesaian yang didapat adalah:

$$C(4+12-1, 12) = C(15,12) = 455 \text{ buah solusi.}$$

Dalam matematika saat SMA kita sudah mengenal segitiga pascal yaitu untuk mencari perpangkatan dari $(x+y)^n$. Namun ada alternatif lain selain menggunakan segitiga pascal yaitu dengan menggunakan teorema Koefisien Binomial. Pada Segitiga Pascal, cara yang dipakai adalah sebagai berikut:

$(x+y)^0 = 1$					
$(x+y)^1 = x+y$					
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$					
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$					
$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$					
$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$					

Pada teorema Koefisien Binomial, aturan untuk menjabarkan bentuk perpangkatan $(x+y)^n$ adalah:

1. Suku pertama adalah x^n , sedangkan suku terakhirnya adalah y^n .
2. Pada setiap suku berikutnya, pangkat x berkurang satu sedangkan pangkat y bertambah satu. Untuk setiap suku, jumlah pangkat x dan y adalah n .
3. Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$, yaitu suku ke- $(k+1)$, adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut koefisien binomial.

Dari aturan di atas dapat disimpulkan bahwa:

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y^1 + \dots + C(n,k)x^{n-k}y^k + \dots + C(n,n)y^n$$

$$= \sum_{k=0}^n C(n,k)x^{n-k}y^k$$

Dengan itu dapat disimpulkan bahwa Teorema Koefisien Binomial adalah misalkan x dan y adalah peubah, dan n adalah bilangan bulat tak-negatif, maka:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k)x^{n-k}y^k$$

III. PELUANG DISKRIT

Teori peluang awalnya diinspirasi oleh perjudian atau permainan yang hanya mengandalkan keberuntungan. Peluang suatu kejadian yang diinginkan adalah perbandingan banyaknya titik sampel kejadian yang diinginkan itu dengan banyaknya anggota ruang sampel kejadian tersebut.

Antara kombinatorial dan teori peluang sebenarnya terkait erat. Teori peluang banyak menggunakan konsep-konsep di dalam kombinatorial. Himpunan semua kemungkinan hasil percobaan dinamakan ruang contoh (*sample space*) dari percobaan yang bersangkutan. Setiap hasil percobaan di dalam ruang contoh disebut titik contoh (*sample point*). Misal ruang contoh digambarkan dengan S dan titik-titik contohnya oleh x_1, x_2, \dots , maka:

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$$

Ruang contoh yang jumlah anggotanya terbatas disebut ruang contoh diskrit (*discrete sample space*) dan peluang terjadinya sebuah titik contoh dinamakan **peluang diskrit** dan disimbolkan dengan $p(x_i)$.

Beberapa sifat yang dimiliki oleh peluang diskrit adalah:

1. $0 \leq p(x_i) \leq 1$, yaitu nilai peluang adalah bilangan tidak negatif dan selalu lebih kecil atau sama dengan 1.
2. $\sum_{i=1}^{|S|} p(x_i) = 1$, yaitu jumlah peluang semua titik contoh di dalam ruang contoh S adalah 1.

Kejadian (*event*) yang disimbolkan dengan E adalah himpunan bagian dari ruang contoh. Kejadian yang hanya mengandung satu titik contoh disebut kejadian sederhana (*simple event*) dan kejadian yang mengandung lebih dari satu titik contoh disebut kejadian majemuk (*compound event*). Peluang terjadinya suatu kejadian E di dalam ruang contoh S adalah $p(E) = |E| / |S|$. Selain itu kita juga dapat menuliskan rumus Peluang Kejadian sebagai berikut:

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \sum_{x_i \in E} p(x_i)$$

Konsep-konsep pada himpunan juga dapat diterapkan pada peluang diskrit yaitu seperti berikut:

1. Kejadian bahwa A dan B terjadi sekaligus berarti munculnya salah satu titik sampel di dalam himpunan $A \cap B$. Peluang terjadinya kejadian A

dan B adalah

$$p(A \cap B) = \sum_{xi \in A \cap B} p(xi)$$

- Kejadian bahwa A atau B atau keduanya terjadi berarti sama dengan munculnya salah satu titik sampel di $A \cup B$. Peluang terjadinya kejadian A atau B adalah

$$p(A \cup B) = \sum_{xi \in A \cup B} p(xi)$$

- Kejadian bahwa A terjadi tetapi B tidak terjadi berarti munculnya salah satu titik contoh di dalam $A-B$. Peluang terjadinya kejadian A tetapi B tidak adalah

$$p(A - B) = \sum_{xi \in A - B} p(xi)$$

- Kejadian bahwa salah satu dari A dan B terjadi namun bukan keduanya berarti sama dengan munculnya salah satu titik contoh di dalam $A \oplus B$. Peluang terjadinya salah satu A dan B namun bukan keduanya adalah

$$p(A \oplus B) = \sum_{xi \in A \oplus B} p(xi)$$

- Komplemen dari kejadian A adalah

$$p(\sim A) = 1 - p(A)$$

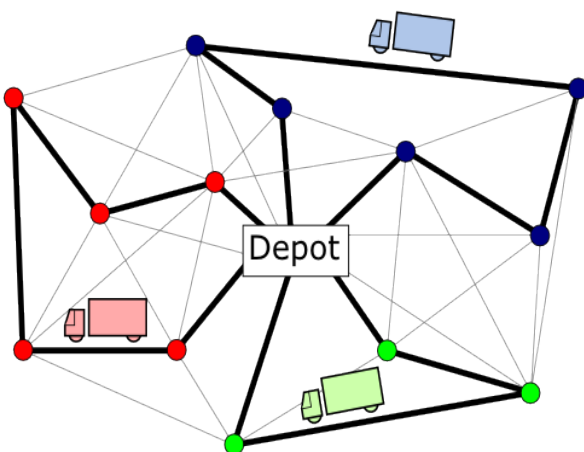
IV. BEBERAPA APLIKASI YANG MENGGUNAKAN KOMBINATORIAL DAN PELUANG DISKRIT

A. Vehicle Routing Problem

Vehicle Routing Problem (VRP) merupakan permasalahan optimasi penentuan rute dengan keterbatasan kapasitas kendaraan. Pada permasalahan ini, ada sebuah depot awal dan sejumlah n tempat untuk dikunjungi dengan demand yang dapat berbeda-beda. Sebuah kendaraan diharapkan untuk memenuhi permintaan setiap tempat tersebut dari depot.

Secara ringkas, karakteristik dari permasalahan VRP adalah sebagai berikut:

- Perjalanan kendaraan berawal dan berakhir dari dan ke depot awal seperti yang terlihat pada gambar berikut:



- Ada sejumlah tempat yang semuanya harus dikunjungi dan dipenuhi permintaannya tepat satu kali.

- Jika kapasitas kendaraan sudah terpakai dan tidak dapat melayani tempat berikutnya, kendaraan dapat kembali ke depot untuk memenuhi kapasitas kendaraan dan melayani tempat berikutnya.
- Tujuan dari permasalahan ini adalah meminimumkan total jarak yang ditempuh kendaraan dengan mengatur urutan tempat yang harus dikunjungi beserta kapan kembalinya kendaraan untuk mengisi kapasitasnya lagi.

VRP juga memiliki beberapa faktor penentu dalam implementasinya pada dunia nyata. Faktor-faktor tersebut antara lain adalah:

- Capacitated VRP (VRP)**
Faktor : setiap kendaraan mempunyai kapasitas yang terbatas.
- VRP With Time Windows (VRPTW)**
Faktor : pelanggan harus dilayani dengan waktu tertentu.
- Multiple Depot VRP (MDVRP)**
Faktor : distributor memiliki banyak depot.
- VRP With Pick-Up and Delivering (VRPPD)**
Faktor : pelanggan diperbolehkan mengembalikan barang ke depot asal.
- Split Delivery VRP (SDVRP)**
Faktor : pelanggan dilayani dengan kendaraan berbeda.
- Stochastic VRP (SVRP)**
Faktor : munculnya *random values* (seperti jumlah pelanggan, jumlah permintaan, waktu perjalanan dan waktu pelayanan).
- Periodic VRP**
Faktor : pengantaran hanya dilakukan di hari tertentu.

VRP adalah sebuah problem kombinatorial dengan basisnya adalah sisi dari graf. Bentuk kombinatorial yang digunakan dalam VRP adalah optimalisasi kombinatorial. Penggunaannya lebih ditujukan pada VRP biasa, SDVRP dan CVRP (mengingat cara penghitungannya sama dengan VRP biasa) dan PVRP. Biasanya penggunaan kombinatorial adalah untuk memeriksa kemungkinan prioritas pelayanan pelanggan di suatu rute, sementara untuk perhitungan lainnya seperti perhitungan kapasitas, waktu, jarak, dan lain-lain cukup menggunakan perhitungan aritmatika biasa.

B. Permainan Blackjack

Blackjack (atau lebih dikenal dengan Twenty-one, *Vingt-et-un* (Bahasa Prancis untuk Twenty-one), atau Pontoon) merupakan satu dari permainan kartu terbesar yang biasanya dilakukan di **Kasino**.

Blackjack dimainkan di meja dengan bentuk separuh lingkaran. Di tengah lingkaran ada seorang bandar yang akan membagi kartu pada para pemain yang duduk melingkarinya. Lihat gambar berikut:



Cara bermain blackjack misalnya, pemain memasang taruhannya di tengah-tengah lingkaran taruhan. Kemudian pembagi kartu akan membagi dua kartu terbuka ke setiap pemain. Untuk dirinya sendiri diberikan satu kartu terbuka dan satu kartu tertutup. Kartu king, queen, jack, dan 10 diberi nilai 10. As dihitung bernilai 1 atau 11, tergantung apa yang diinginkan pemain. Sisanya bernilai sesuai dengan angka yang tertulis pada kartu yaitu 2-9. Apabila dua kartu pertama as dan 10, pemain mendapatkan blackjack dan akan dibayar satu setengah kali taruhan.

Pemain yang tidak mendapatkan blackjack boleh terus berupaya mendekati jumlah 21 dengan terus menambah kartu. Tetapi bila jumlahnya melebihi 21, pemain tersebut gugur dan kehilangan taruhannya. Dealer harus hit (tambah kartu) bila jumlah semua kartu 16 atau kurang. Dealer harus stay (tidak tambah kartu) bila jumlah semua kartu bernilai 17 atau lebih. Itu salah satu bentuk permainan kasino.

Dengan menggunakan Peluang Diskrit kita dapat menghitung peluang seorang pemain akan mendapat *blackjack* dari dua kartu pertama dalam satu pak kartu. Untuk mendapat *blackjack* maka kartu yang harus dimiliki adalah as karena hanya as yang memiliki nilai 11, dan untuk kartu kedua ada 4 pilihan yaitu kartu J, Q, K atau 10. Dengan demikian kombinasi yang mungkin adalah seperti berikut:

- Kartu pertama : 4 (karena harus kartu As dan ada 4 jenis kartu)
- Kartu kedua : 16 (4×4)
- Kombinasi didapat dengan menggunakan kaidah perkalian sehingga kombinasinya adalah $16 \times 4 = 64$
- Sedangkan kombinasi untuk mengambil 2 kartu dari 52 kartu adalah $C(52,2) = 1326$

(karena urutan tidak diperhitungkan maka digunakan kombinasi bukan permutasi)

- Maka besarnya peluang untuk mendapat *blackjack* adalah $64/1326 = 0.0482655$ atau 4,82655 %

C. Aplikasi Kombinatorial dan Peluang Diskrit pada Kehidupan Sehari-hari

Kombinatorial dan Peluang Diskrit tanpa kita sadari juga banyak sekali ditemukan di sekitar kita. Misalnya pada pengambilan undian. Peluang seseorang akan mendapatkan undian dapat dihitung menggunakan permutasi atau kombinasi tergantung dari apakah urutan berpengaruh atau tidak. Contoh lain yaitu pemilihan ketua, wakil, sekretaris ataupun bendahara dalam sebuah organisasi. Banyaknya kemungkinan urutan yang terpilih juga dapat dihitung menggunakan kombinatorial dan peluang diskrit.

V. KESIMPULAN

Kesimpulan yang didapat dari makalah yang berjudul Studi Tentang Kombinatorial dan Peluang Diskrit Serta Beberapa Aplikasinya adalah sebagai berikut:

1. Kombinatorial dan Peluang diskrit adalah salah satu cabang ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai macam masalah misalnya *Vehicle Routing Problem* (VRP).
2. Kombinatorial dan Peluang diskrit juga dapat diterapkan pada permainan-permainan yang simple seperti *Blackjack*.
3. Terdapat begitu banyak hal yang tanpa kita sadari menggunakan Kombinatorial ataupun peluang diskrit.

REFERENCES

- [1] Munir, Rinaldi, *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Bandung : Penerbit Informatika, Palasari Bab 6 hal 225-277
- [2] Teori Peluang, <http://genius.smpn1-mgl.sch.id/file.php/1/ANIMASI/matematika/Teori%20Peluang/materi01.html>, Diakses pada tanggal 10 Desember 2011, pukul 19.46 WIB.
- [3] Sejarah Peluang dan Statistika, <http://hasanahworld.wordpress.com/2008/06/21/sejarah-peluang-dan-statistika/>, Diakses pada tanggal 10 Desember 2011, pukul 20.20 WIB.
- [4] Kombinatorial, <http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/Kombinatorial.doc>, Diakses pada tanggal 10 Desember 2011, pukul 20.21 WIB.
- [5] Peluang Diskrit, <http://lecturer.eepis-its.edu/~entim/Matematika%20Diskrit/MatDis09-Peluang%20Diskrit.pdf>, Diakses pada tanggal 10 Desember, pukul 21.12 WIB.
- [6] Vehicle Routing Problem (VRP), <http://staff.blog.ui.ac.id/komarudin74/2010/09/14/vehicle-routing-problem-VRP/>, Diakses pada tanggal 10 Desember, pukul 23.15 WIB.
- [7] Ensiklopedia Vehicle Routing Problem (VRP), http://digilib.itelkom.ac.id/index.php?option=com_content&view=article&id=607:vehicle-routing-problem-VRP&catid=20:informatika&Itemid=14, Diakses pada tanggal 11 Desember 2011, pukul 10.53 WIB.

- [8] Aplikasi Kombinatorial pada Vehicle Routing Problem,
<http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-9284-Paper.pdf>,
Diakses pada tanggal 11 Desember 2011, pukul
- [9] Wikipedia, Blackjack,
<http://id.wikipedia.org/wiki/Blackjack>, Diakses pada tanggal 11
Desember 2011. Pukul 13. 34 WIB.
- [10] Peluang Diskrit Permainan Blackjack,
[http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/2008-
2009/Makalah2008/Makalah0809-058.pdf](http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/2008-2009/Makalah2008/Makalah0809-058.pdf), Diakses pada tanggal
11 Desember 2011, pukul 14.05 WIB.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2011

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Hanif Eridaputra', with a horizontal line underneath.

Hanif Eridaputra (13510091)