

Penentuan Hari pada Berbagai Sistem Penanggalan Menggunakan Kekongruenan Zeller

Devin Hoesen - 13510081¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

13510081@std.stei.itb.ac.id, dvnh.squall.ff8@gmail.com

Abstrak – Makalah ini membahas Kekongruenan Zeller yang menggunakan aspek-aspek teori bilangan dalam menentukan hari dari suatu tanggal dari berbagai sistem penanggalan. Teori-teori dasar yang digunakan dalam penghitungan penentuan hari ini adalah aritmetika modulo dan fungsi *floor*. Berbagai sistem penanggalan yang dibahas di sini adalah kalender Julian, Gregorian, dan Hijriyah. Kalender Julian merupakan revisi atas sistem penanggalan Romawi kala itu. Kalender Julian ini ternyata terlalu banyak menambahkan tahun kabisat, sehingga direvisi kembali oleh kalender Gregorian. Kalender Gregorian sekarang merupakan sistem penanggalan yang paling luas dipakai secara internasional. Kalender Hijriyah pun dibahas di sini mengingat sistem penanggalan ini merupakan salah satu sistem penanggalan yang luas pemakaiannya di Indonesia yang merupakan negara muslim terbesar di dunia.

Istilah Kunci – Gregorian, Hijriyah, Julian, Kekongruenan Zeller

Abstract – This paper is about Zeller's congruence which uses aspects of numbers theory in determining the day of every given date from several calendar systems. Basic theories which are used are modular arithmetics and floor function. We discuss several calendar systems, that is Julian, Gregorian, and Hijri calendar. Julian calendar is a reform of Roman Calendar. This calendar indeed add too many leap years. This calendar is then reformed by Gregorian calendar. Gregorian calendar is internationally mostly used calendar. Hijri calendar is discussed here because this calendar is widely used in Indonesia, which is the biggest moslem country in the world.

Index Terms – Gregorian, Hijri, Julian, Zeller's congruence

I. PENDAHULUAN

A. Fungsi Floor

Di dalam matematika dan ilmu komputer, fungsi *floor* memetakan suatu bilangan real ke bilangan bulat sebelumnya. Secara lebih detail, $floor(x) = \lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x . Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan ke bawah.

Pada awalnya, Carl Friedrich Gauss memperkenalkan notasi $\lfloor x \rfloor$ untuk menyatakan fungsi *floor*. Notasi ini menjadi notasi baku fungsi *floor* dalam matematika

hingga Kenneth E. Iverson memperkenalkan nama "*floor*" dengan notasinya, $\lfloor x \rfloor$, di dalam bukunya, *A Programming Language*, pada tahun 1962. Selain kedua notasi tersebut, digunakan pula notasi $\llbracket x \rrbracket$. Ketiga notasi ini terus dipergunakan di dalam matematika, namun dalam keseluruhan makalah ini, akan dipergunakan notasi Iverson.

Beberapa contoh nilai dari fungsi *floor* adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lfloor 2.25 \rfloor &= 2 & \lfloor -2.25 \rfloor &= -3 \\ \lfloor \frac{21}{5} \rfloor &= 4 & \lfloor -\frac{21}{5} \rfloor &= -4 \end{aligned}$$

Beberapa sifat dari fungsi *floor* yang akan digunakan dalam makalah ini akan diuraikan sebagai berikut.

- 1.1. Jika n adalah bilangan bulat, maka $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
- 1.2. $\llbracket \lfloor x \rfloor \rrbracket = \lfloor x \rfloor$ (sifat idempoten)
- 1.3. Jika n adalah bilangan positif, maka
$$\lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \rfloor$$
- 1.4. Jika m dan n adalah bilangan bulat, maka
$$\lfloor \frac{\lfloor x/m \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor \frac{x}{mn} \rfloor$$

B. Aritmetika Modulo

Di dalam matematika, aritmetika modulo adalah sistem aritmetika menggunakan bilangan bulat yang "berputar" setelah mencapai hitungan tertentu. Karena alasan itu, terkadang aritmetika modulo disebut juga aritmetika bilangan jam. Operator yang digunakan dalam aritmetika modulo adalah **mod**. Operator mod, jika digunakan pada pembagian bilangan bulat, memberikan sisa positif pembagian. Definisi dari operator mod dinyatakan sebagai berikut.

Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0 . Operasi $a \bmod m$ (dibaca " a modulo m ") memberikan sisa positif jika a dibagi m . Dengan kata lain, $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

Bilangan m disebut **modulus** atau **modulo** dan hasil aritmetika modulo terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$.

Beberapa contoh nilai hasil operasi modulo adalah sebagai berikut.

- (i) $38 \bmod 12 = 2$ (karena $38 = 3 \times 12 + 2$)
- (ii) $-41 \bmod 9 = 4$ (karena $-41 = -5 \times 9 + 4$)

Perhatikan bahwa pada contoh (ii), hasil operasi bukanlah -5 , karena hasil operasi harus $0 \leq r < 9$. Karena itulah hasil operasi ini disebut **sisa positif**.

Bila dinyatakan dengan fungsi *floor*, operasi modulo ini memiliki definisi sebagai berikut.

$$1.5. a \bmod m = r \text{ setara dengan kesamaan } r = a - m \cdot \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor$$

Kadang-kadang dua buah bilangan bulat, x dan y , memiliki sisa yang sama bila dibagi dengan bilangan bulat positif m . Kita katakan bahwa x dan y kongruen dalam modulo m , dan dilambangkan sebagai $x \equiv y \pmod{m}$ (notasi ' \equiv ' dibaca 'kongruen'). Notasi $a \bmod m = r$ dapat juga ditulis sebagai $r \equiv a \pmod{m}$. Yang perlu diperhatikan adalah bila menggunakan operasi kekongruenan ini, sisa hasil bagi bisa negatif. Contohnya pada contoh (ii), bila menggunakan kekongruenan, sisa hasil baginya bisa menjadi -5 . Beberapa bahasa pemrograman menggunakan kekongruenan ini dalam menghitung sisa hasil bagi. Karena itu dalam memprogram, harap berhati-hati untuk menggunakan operator mod dengan bilangan a negatif. Bila ingin lebih nyaman, ubahlah bilangan a ini menjadi bilangan tak negatif menggunakan sifat-sifat aritmetika modulo yang akan diuraikan berikut ini.

Beberapa sifat aritmetika modulo yang akan dipergunakan dalam makalah ini adalah sebagai berikut.

- 1.6. Bila $a \bmod m = r$, maka $(a + km) \bmod m = r$ untuk suatu k bilangan bulat. Dengan sifat ini, bilangan yang dibagi bisa diubah menjadi bilangan tak negatif.
- 1.7. $(cx) \bmod m = [(c - km)x] \bmod m$ untuk suatu k bilangan bulat. Sifat ini memungkinkan kita menyederhanakan operasi modulo dengan $c \geq m$ menjadi $0 \leq c < m$.

C. Kalender Julian

Kalender Julian mulai digunakan pada tahun 45 SM. Kalender ini merupakan kalender solar (matahari), yakni berdasarkan peredaran bumi mengelilingi matahari. Kalender ini merupakan revisi Julius Caesar atas kalender Romawi saat itu. Pada saat itu, kalender Romawi memiliki 12 bulan dan 355 hari. Bulan kabisat (*Mensis Intercalaris*) yang berhari 27 disisipkan di antara Februari dan Maret. Bulan ini biasanya disisipkan sebelum lima hari terakhir bulan Februari sehingga lima hari terakhir bulan Februari menjadi lima hari terakhir bulan kabisat. Efeknya jumlah hari dalam setahun menjadi 377 atau 378 hari tergantung jumlah hari pada bulan Februari.

Idealnya, siklus tahun kabisat adalah tahun biasa berhari 355 berselang-seling dengan tahun kabisat yang jumlah harinya (dua tahun sekali) bergantian 377 dan 378 hari. Namun, pada praktiknya, penentuan bulan kabisat ini diserahkan kepada *Pontifex Maximus*, jabatan politik semacam imam besar kala itu. Karena memegang jabatan politik, *pontifex* ini menetapkan bulan kabisat seenaknya. Bila kawan politiknya sedang bertakhta, bulan kabisat ini ditambahkan, bahkan penambahannya bisa dua tahun berturut-turut. Namun, bila lawan politiknya yang bertakhta, bulan kabisat ini justru diadakan. Masa ini disebut sebagai "Tahun-Tahun Kebingungan".

Keadaan ini makin parah ketika Julius Caesar menjadi *pontifex*. Kalender sudah melenceng dari perubahan musim. Untuk itu Julius Caesar memulai reformasi terhadap kalender Romawi. Langkah pertama yang dilakukannya adalah menetapkan mulainya tahun baru, yaitu 1 Januari 45 SM, di musim tropis. Hal ini dilakukan dengan menambahkan bulan kabisat di bulan Februari dan dua bulan kabisat setelah Desember 46 SM. Hal ini mengakibatkan tahun 46 SM berhari 445, bertambah 67 hari. Lalu, Julius Caesar menambahkan sepuluh hari ke kalender pra-Julian itu. Dua hari ke bulan Ianuarius, Sextilis, dan December, dan satu hari ke bulan Aprilis, Iunius, September, dan November. Bulan Februarius tetap 28 hari pada tahun biasa dan menjadi 29 hari pada tahun kabisat. Tahun kabisat ini terjadi setiap empat tahun sekali mengakibatkan jumlah hari dalam setahun 365,25 hari. Hal ini membentuk kalender seperti yang kita kenal sekarang. Lihat tabel berikut.

Tabel 1 – Perbandingan antara kalender Romawi dan kalender Julian

Bulan	Jumlah hari di kalender Romawi	Jumlah hari di kalender Julian
Ianuarius	29	31
Februarius	28 (kabisat: 23 atau 24)	28 (kabisat: 29)
Martius	31	31
Aprilis	29	30
Maius	31	31
Iunius	29	30
Quintilis	31	31
Sextilis	29	31
September	29	30
Oktober	31	31
November	29	30
December	29	31
Mensis Intercalaris	0 (kabisat: 27)	(dihilangkan)

Pada perkembangannya, para *pontifex* menyalahartikan jangka waktu empat tahun untuk tahun kabisat. Mereka menyangka empat tahun itu termasuk tahun pertama dan keempat. Akibatnya, penambahan hari kabisat terjadi setiap tiga tahun sekali. Setelah 36 tahun, kaisar Augustus menyadari hal ini dan mulai menyesuainya. Ia melewatkan tiga tahun kabisat untuk menyesuaikan kembali kalender.

Setelah beberapa lama, rakyat Romawi akhirnya mengganti nama Quintilis dan Sextilis berturut-turut menjadi Iulius dan Augustus. Hal ini untuk menghargai Julius Caesar dan Kaisar Augustus. Jadilah kalender

Julian ini seperti kalender yang kita kenal sekarang, dengan beberapa pengecualian. Lalu, penomoran tahun 1 M ditetapkan dari kepercayaan tradisional tentang tahun lahirnya Yesus Kristus, meskipun sekarang diketahui bahwa Yesus Kristus tidak lahir pada tahun 1 M. Tidak ada tahun 0 M, tahun 1 SM langsung dilanjutkan oleh tahun 1 M.

D. Kalender Gregorian

Setelah beribu-ribu tahun digunakan, mulai disadari adanya kesalahan pada kalender Julian. Hari Raya Paskah pada tahun 1582 mulai melenceng. Maka, Paus saat itu, Paus Gregorius XIII, memulai reformasi atas kalender Julian. Dari perhitungan, lamanya bumi berotasi ternyata tidak 365 hari 6 jam (365,25 hari) tetapi kurang hampir 11 menit. Jika diakumulasikan, setelah empat ratus tahun, kalender Julian akan kelebihan tiga hari dari seharusnya. Setelah beribu-ribu tahun, kemelencengan ini menjadi sepuluh hari. Paus Gregorius XIII kemudian mereformasi penambahan tahun kabisat pada kalender Julian. Pada aturan baru ini, tahun kabisat hanya terjadi setiap empat tahun sekali, namun pada tahun yang bisa dibagi seratus, hanya terjadi bila tahun itu bisa dibagi empat ratus. Dengan kata lain, tahun 1900 bukan tahun kabisat, tetapi tahun 2000 adalah tahun kabisat. Dengan diterapkannya perubahan ini, hari dan tanggal setelah Kamis, 4 Oktober 1582 adalah Jumat, 15 Oktober 1582.

E. Kalender Hijriyah

Kalender ini merupakan kalender yang digunakan umat Islam sedunia untuk melaksanakan hari-hari keagamaan mereka. Jika dua kalender sebelumnya adalah kalender solar, kalender ini adalah kalender lunar (bulan), yakni berdasarkan peredaran bulan mengelilingi bumi. Selain itu, pada kalender ini, hari baru dimulai pada saat matahari terbenam, bukan pada saat tengah malam.

Kalender pra-Hijriyah menggunakan bulan kabisat pada tahun kabisat. Penambahan bulan ini adalah agar waktu berziarah ke Makkah saat itu tepat dengan musim. Tahun kabisat ini terjadi tiga tahun sekali. Penambahan bulan ini disebut Nasi. Pada tahun 10 H diketahui dari QS 9:36-37 bahwa Allah melalui Nabi-Nya melarang Nasi ini.

Karena murni kalender lunar, kalender ini tidak mengikuti perubahan musim. Penamaan bulan-bulan dalam kalender Hijriyah ini adalah seperti tabel berikut.

Tabel II – Bulan dalam kalender Hijriyah

No.	Bulan	Jumlah hari
1	Muharam	30
2	Safar	29
3	Rabiulawal	30
4	Rabiulakhir	29
5	Jumadilawal	30
6	Jumadilakhir	29
7	Rajab	30
8	Syakban	29
9	Ramadan	30
10	Syawal	29
11	Zulkaidah	30
12	Zulhijah	29 (kabisat: 30)

Di antara bulan-bulan ini, pada masa Nabi, terdapat empat bulan saat perang dilarang, yakni Muharam, Rajab, Zulkaidah, dan Zulhijah.

Sepuluh tahun pertama dari kalender Hijriyah tidak dinomori, tetapi dinamai berdasarkan peristiwa penting yang terjadi pada kehidupan Nabi Muhammad S.A.W. saat itu. Pada 17 H, Abu Musa Ashaari, salah satu pejabat Khalifah Umar bin Khattab di Basra, mengeluh mengenai tidak adanya tahun dalam surat yang diterimanya dari Khalifah Umar. Hal ini menyulitkannya menentukan perintah mana yang paling baru dari Khalifah Umar. Hal ini menyebabkan Khalifah Umar merasa perlu menomori tahun dalam kalender Hijriyah. Setelah berdiskusi dengan penasihat-penasihatnya, dipilihlah tahun ketika berpindahannya (*hijrah*) Nabi Muhammad S.A.W. dari Makkah ke Madinah sebagai tahun 1 H. Oleh karena itu, kalender ini dinamai kalender Hijriyah.

Penentuan tahun kabisat dalam kalender Hijriyah agak sulit. Yang pasti adalah setiap jangka waktu tiga puluh tahun tepat ada sebelas tahun kabisat. Terdapat bermacam aturan mengenai penentuan tahun kabisat ini. Dua di antaranya yang sering dipakai adalah basis-16 dan basis-15. Setiap tahun, dalam kalender Hijriyah terdapat kelebihan 11/30 hari. Kelebihan hari ini diakumulasi tiap tahunnya. Pada basis-16, bila kelebihannya telah **melebihi** 15/30 hari, tahun yang bersangkutan menjadi tahun kabisat, satu hari kabisat ditambahkan ke bulan Zulhijah, dan kelebihan harinya dikurangi 30/30. Pada basis-15, penambahan hari kabisat terjadi bila kelebihannya itu **lebih besar dari atau sama dengan** 15/30 hari. Basis-15 ini disebut juga *algoritma Kuwaiti* dan dipakai oleh *Microsoft*. Untuk lebih jelasnya, lihat tabel berikut.

Tabel III – Perhitungan tahun kabisat menggunakan basis-16

Tahun	Kelebihan hari	Tahun	Kelebihan hari
0	0	15	$\frac{15}{30}$
1	$\frac{1}{30}$	16	$\frac{26}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{4}{30}$
2	$\frac{2}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{8}{30}$	17	$\frac{7}{30}$
3	$\frac{3}{30}$	18	$\frac{18}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{12}{30}$
4	$\frac{4}{30}$	19	$-\frac{1}{30}$
5	$\frac{25}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{5}{30}$	20	$\frac{10}{30}$
6	$\frac{6}{30}$	21	$\frac{21}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{9}{30}$
7	$\frac{17}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{13}{30}$	22	$\frac{2}{30}$
8	$-\frac{2}{30}$	23	$\frac{13}{30}$
9	$\frac{9}{30}$	24	$\frac{24}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{6}{30}$
10	$\frac{20}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{10}{30}$	25	$\frac{5}{30}$
11	$\frac{1}{30}$	26	$\frac{16}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{14}{30}$
12	$\frac{12}{30}$	27	$-\frac{3}{30}$
13	$\frac{23}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{7}{30}$	28	$\frac{8}{30}$
14	$\frac{4}{30}$	29	$\frac{19}{30} - \frac{30}{30} = -\frac{11}{30}$

Ket.: Tahun yang diarsir merupakan tahun kabisat

Pada basis-15, perhitungan dan tahun kabisatnya serupa dengan tahun-tahun kabisat pada basis-16, kecuali pada

basis-15, tahun ke-15-lah yang merupakan tahun kabisat, bukan tahun ke-16.

II. KEKONGRUENAN ZELLER

A. Beberapa Persamaan Kekongruenan Zeller

Persamaan ini ditemukan oleh Julius Christian Johannes Zeller, seorang pendeta dan matematikawan berkebangsaan Jerman. Kekongruenan Zeller dimaksudkan untuk diterapkan pada kalender Gregorian dan Julian. Untuk kalender Gregorian, digunakan persamaan berikut.

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \right) \text{mod } 7 \quad (1)$$

dengan

- h adalah hari dalam satu minggu (0 = Sabtu, 1 = Minggu, ..., 6 = Jumat)
- d adalah tanggal yang ingin dicari harinya
- m adalah bulan dari tanggal yang ingin dicari harinya (3 = Maret, 4 = April, ..., 13 = Januari, 14 = Februari)
- y adalah tahun pada abad yang dimaksud ($\text{tahun mod } 100$)
- c adalah "abad" ($\left\lfloor \frac{\text{tahun}}{100} \right\rfloor$), dengan demikian tahun 2011 bukan abad ke-21 tetapi "abad" ke-20.
- CATATAN: Dalam persamaan ini, Januari dan Februari dihitung sebagai bulan ke-13 dan ke-14 dari tahun sebelumnya. Contohnya Januari 2011 dimasukkan ke persamaan ini sebagai bulan ke-13 tahun 2010.

Untuk kalender Julian, digunakan persamaan berikut.

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - c + 5 \right) \text{mod } 7 \quad (2)$$

Untuk keperluan pemrograman, lebih nyaman bila menggunakan tahun dari tanggal yang bersangkutan saja dibandingkan harus menggunakan variabel y dan c seperti persamaan di atas. Misalkan tahun dari tanggal yang bersangkutan dilambangkan dengan Y . Untuk kalender Gregorian, dengan memanfaatkan sifat 1.5. pada aritmetika modulo, (1) bisa diubah menjadi:

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{26(m+1)}{10} \right\rfloor + Y - 100 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y - 100 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor}{4} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor \right) \text{mod } 7 \quad (3)$$

Dengan menggunakan sifat 1.4. pada fungsi *floor*, (3) bisa diubah menjadi

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{26(m+1)}{10} \right\rfloor + Y - 100 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - 25 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor \right) \text{mod } 7 \quad (4)$$

Dengan menggunakan sifat 1.1. pada fungsi *floor*, karena suku $25 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor$ merupakan bilangan bulat, (4) bisa diubah menjadi

$$\begin{aligned} h &= \left(d + \left\lfloor \frac{26(m+1)}{10} \right\rfloor + Y - 100 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - 25 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor \right. \\ &\quad \left. + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor \right) \text{mod } 7 \\ &= \left(d + \left\lfloor \frac{26(m+1)}{10} \right\rfloor + Y - 127 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor \right) \text{mod } 7 \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan menggunakan sifat 1.6. dan 1.7. pada aritmetika modulo pada suku $-127 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor$, akhirnya (5) dapat menjadi

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{26(m+1)}{10} \right\rfloor + Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor + 6 \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor \right) \text{mod } 7 \quad (6)$$

Dengan melakukan penurunan rumus seperti di atas, untuk kalender Julian, (2) dapat diubah menjadi

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{26(m+1)}{10} \right\rfloor + Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor + 5 \right) \text{mod } 7 \quad (7)$$

CATATAN: Seperti juga pada (1) dan (2), pada (6) dan (7) bulan Januari dan Februari dihitung sebagai bulan ke-13 dan ke-14 dari tahun sebelumnya.

Persamaan (6) dan (7) lebih nyaman dan aman untuk digunakan dalam pemrograman karena melibatkan lebih sedikit variabel dan tidak melibatkan pencarian sisa bagi dari bilangan negatif.

B. Analisis Kekongruenan Zeller pada Kalender Gregorian

Dari manakah datangnya rumus pada (1)? Sulit untuk membuktikannya secara matematis, namun di sini akan digunakan pendekatan intuitif mengenai rumus tersebut.

Pertama, kita tidak ingin penambahan hari kabisat pada akhir Februari memengaruhi perhitungan kita. Oleh karena itu, kita mulai perhitungan dengan memisalkan bulan Maret adalah bulan pertama. Bila seluruh suku dalam tanda kurung pada (1) kita misalkan f , kita ingin mengetahui sisa pembagian f oleh 7. Kita tidak perlu mengetahui nilai sebenarnya dari f . Yang terpenting adalah kita ingin nilai f bertambah 1 ketika hari pada satu minggu mundur sehari.

Kita analisis f bagian per bagian. Pertama, f bertambah 1 ketika tanggal d bertambah 1, sehingga langkah pertama adalah membangun persamaan berikut.

$$f = d \quad (8)$$

Lalu, kita lihat pengaruh penambahan tahun dalam satu abad, y , terhadap mundurnya hari, tanpa memperhatikan tahun kabisat. Karena $365 \text{ mod } 7 \equiv 1$, bertambahnya tahun y mengakibatkan hari mundur sehari.

$$f = d + y \quad (9)$$

Sekarang, kita mulai memperhitungkan tahun kabisat. Pada tahun kabisat, selain hari mundur karena penambahan tahun, hari juga mundur karena bertambahnya sehari pada bulan Februari. Hal ini terjadi sebelum “dimulainya” tahun (karena tahun diibaratkan dimulai pada bulan Maret). Akibatnya setiap 4 tahun, hari mundur lagi 1 hari.

$$f = d + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor \quad (10)$$

Selama ini kita berhitung hanya dalam jangka waktu seabad. Perubahan abad belum diperhitungkan. Kita lihat akibat perubahan abad c dengan anggapan setiap abad bukanlah tahun kabisat. Dalam satu abad, hari mundur 124 hari (100 hari dari penambahan tahun, 24 hari dari tahun kabisat). Karena $124 \pmod{7} \equiv -2$, bertambahnya abad c mengakibatkan hari **maju** 2 hari.

$$f = d + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - 2c \quad (11)$$

Lalu, perubahan setiap 4 abad mengakibatkan hari mundur lagi 1 hari (karena bila c habis dibagi 4, tahun $100c$ merupakan tahun kabisat).

$$f = d + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \quad (12)$$

Bagian bulan adalah bagian tersulit. Karena alasan bulan inilah kita memulai tahun dari bulan Maret. Bulan Maret kita ibaratkan memiliki nilai $M = 1$, April 2, ..., Januari 11, dan Februari 12. Untuk setiap bulan, kita akan menghitung kelebihan harinya (*excess*) dari 28 hari (karena $28 \pmod{7} = 0$).

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hari	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	28
<i>Excess</i>	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3	2	0
Akumulasi	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29

Perhatikan bahwa kelebihan hari berulang setiap 5 bulan. Setiap lima bulan itu, mundurnya hari adalah 13 hari. Oleh karena itu pastilah ada suku yang mirip dengan $\left\lfloor \frac{13M}{5} \right\rfloor$ dalam f . Bila dihitung:

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\left\lfloor \frac{13M}{5} \right\rfloor$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

Bila kita kurangi 2 dari $\left\lfloor \frac{13M}{5} \right\rfloor$, kita belum mendapatkan hasil yang seharusnya. Dengan melakukan sedikit manipulasi aljabar, kita dapatkan:

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\left\lfloor \frac{13M-1}{5} \right\rfloor$	2	5	7	10	12	15	18	20	23	25	28	31
Akumulasi	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29

Terlihat bahwa bila kita kurangkan 2 dari $\left\lfloor \frac{13M-1}{5} \right\rfloor$, kita dapatkan hasil yang diinginkan. Maka:

$$f = d + \left\lfloor \frac{13M-1}{5} \right\rfloor - 2 + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \quad (13)$$

Nilai f ini harus dikoreksi dengan menambahkan atau mengurangi konstanta dari f agar sesuai dengan hari

yang dicari. Kita ambil hari Minggu, 11 Desember 2011 sebagai koreksi. Dari situ, didapat $d = 11$, $M = 10$, $y = 11$, dan $c = 20$. Diperoleh nilai $f = 12$ dan $h = f \pmod{7} = 5$. Padahal untuk Minggu, dari keterangan (1) seharusnya $h = 1$, karena itu, kita harus menambahkan konstanta 3 ke f . Maka:

$$f = d + \left\lfloor \frac{13M-1}{5} \right\rfloor + 1 + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \quad (14)$$

Terakhir, kita harus mengonversi (14) ke (1). Perhatikan bahwa terdapat hubungan $M = m - 2$, sehingga:

$$\begin{aligned} f &= d + \left\lfloor \frac{13(m-2)-1}{5} \right\rfloor + 1 + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \\ &= d + \left\lfloor \frac{13m-27}{5} \right\rfloor + 1 + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \\ &= d + \left\lfloor \frac{13m+13-40}{5} \right\rfloor + 1 + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \\ &= d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor - 8 + 1 + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \end{aligned} \quad (15)$$

Dengan menggunakan sifat 1.1 pada aritmetika modulo pada suku $\left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor - 8$ pada (15), diperoleh:

$$f = d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor - 7 + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \quad (16)$$

Karena yang akan dicari adalah $h = f \pmod{7}$, kita bisa mempergunakan 1.6. pada aritmetika modulo, sehingga:

$$f = d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c \quad (17)$$

yang merupakan seluruh suku dalam tanda kurung pada (1).

C. Analisis Kekongruenan Zeller pada Kalender Julian

Persamaan (2) serupa dengan persamaan (1), hanya saja suku-suku $\left(\left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c\right)$ diganti oleh $(-c + 5)$. Suku-suku yang tidak mengalami perubahan logika penemuannya sama dengan logika pada bagian “Analisis Kekongruenan Zeller pada Kalender Gregorian” sebelumnya. Sekarang, misalkan seluruh suku di dalam tanda kurung pada (2) dengan variabel g . Suku yang tidak berubah dari f pada (17) langsung kita masukkan ke g .

$$g = d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor \quad (18)$$

Yang berubah dari f hanyalah suku yang mengandung c . Oleh karena itu, kita analisis pengaruh perubahan abad pada kalender Julian terhadap mundurnya hari. Karena setiap abad pada kalender Julian adalah tahun kabisat, setiap perubahan abad pada kalender Julian mengakibatkan hari mundur 125 hari (100 hari dari penambahan tahun, 25 hari dari tahun kabisat). Karena $125 \pmod{7} \equiv -1$, bertambahnya abad c mengakibatkan hari **maju** 1 hari.

$$g = d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - c \quad (19)$$

Lalu, nilai g ini harus dikoreksi dengan menambahkan atau mengurangi konstanta dari g agar sesuai dengan hari yang dicari. Kita ambil hari Kamis, 4 Oktober 1582, yakni hari terakhir kalender Julian dipakai, sebagai koreksi. Dari situ, didapat $d = 4$, $m = 10$, $y = 82$, dan $c = 15$. Diperoleh nilai $g = 119$ dan $h = f \bmod 7 = 0$. Padahal untuk Kamis, dari keterangan (1) seharusnya $h = 5$, karena itu, kita harus menambahkan konstanta 5 ke g . Maka:

$$g = d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - c + 5 \quad (20)$$

tepat seperti seluruh suku dalam tanda kurung pada (2).

D. Perluasan Kekongruenan Zeller pada Kalender Hijriyah

Dengan menggunakan logika di atas, sangat memungkinkan untuk memperluas kekongruenan Zeller ini untuk memperkirakan hari dari suatu tanggal pada kalender Hijriyah. Seperti telah dijelaskan pada pendahuluan, hari pada kalender Hijriyah dimulai ketika matahari terbenam, namun untuk alasan kepraktisan, pada perhitungan ini, hari pada kalender Hijriyah dianggap dimulai pada tengah malam. Karena penambahan hari kabisat terjadi pada bulan terakhir, kita bisa menghitung awal tahun mulai dari Muharam. Kita mulai setahap demi setahap. Kita misalkan variabel yang ingin dicari sisa hasil baginya oleh 7 adalah a .

Pertama, a bertambah 1 ketika tanggal d bertambah 1, sehingga langkah pertama adalah membangun persamaan berikut.

$$a = d \quad (21)$$

Selanjutnya kita lihat pengaruh penambahan tahun Y terhadap mundurnya hari tanpa memperhatikan tahun kabisat. Perlu diingat bahwa tahun yang digunakan di sini adalah tahun apa adanya bukan tahun dalam satu abad (1433 H berarti $Y = 1433$ bukan 33). Jumlah hari dalam 1 tahun biasa adalah 354 hari. Karena $354 \bmod 7 = 4$, bertambahnya tahun Y mengakibatkan hari mundur 4 hari.

$$a = d + 4Y \quad (22)$$

Sekarang, kita lihat pengaruh tahun kabisat terhadap mundurnya hari. Setiap 30 tahun, terdapat 11 hari kabisat, sehingga hari mundur 11 hari.

$$a = d + 4Y + 11 \left\lfloor \frac{Y}{30} \right\rfloor \quad (23)$$

Sisa pembagian tahun Y dengan 30 menentukan sudah berapa tahun kabisat yang terlewat dalam jangka waktu 30 tahunan itu. Karena perhitungan untuk menentukan tahun kabisat cukup rumit, nilai k_Y yang menyatakan berapa tahun kabisat yang telah terlewat dalam jangka waktu 30 tahunan diberikan oleh tabel di bawah ini.

Tabel IV – Tabel nilai k_Y

Nilai $r = Y \bmod 30$	Nilai k_Y
$r \leq 2$	0
$2 < r \leq 5$	1
$5 < r \leq 7$	2

$7 < r \leq 10$	3
$10 < r \leq 13$	4
$13 < r \leq 15$ (Basis-15)	5
$13 < r \leq 16$ (Basis-16)	
$15 < r \leq 18$ (Basis-15)	6
$16 < r \leq 18$ (Basis-16)	
$18 < r \leq 21$	7
$21 < r \leq 24$	8
$24 < r \leq 26$	9
$26 < r \leq 29$	10

Dengan nilai k_Y tersebut, (23) menjadi:

$$a = d + 4Y + 11 \left\lfloor \frac{Y}{30} \right\rfloor + k_Y \quad (24)$$

Kita tiba pada perhitungan bulan. Bulan Muharam kita ibaratkan memiliki nilai $m = 1$, Safar 2, ..., Zulkaidah 11, dan Zulhijah 12. Untuk setiap bulan, kita akan menghitung kelebihan harinya (*excess*) dari 28 hari (karena $28 \bmod 7 = 0$).

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hari	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
Excess	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
Akumulasi	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17

Perhatikan bahwa kelebihan hari berulang setiap 2 bulan. Setiap dua bulan itu, mundurnya hari adalah 3 hari. Oleh karena itu pastilah ada suku yang mirip dengan $\left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor$ dalam a . Bila dihitung:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor$	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18
Akumulasi	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17

Terlihat bahwa bila kita kurangkan 1 dari $\left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor$, kita dapatkan hasil yang diinginkan. Maka:

$$a = d + \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor - 1 + 4Y + 11 \left\lfloor \frac{Y}{30} \right\rfloor + k_Y \quad (25)$$

Karena yang akan dicari adalah nilai $a \bmod 7$, kita boleh mempergunakan sifat 1.7. pada suku $11 \left\lfloor \frac{Y}{30} \right\rfloor$, sehingga (25) bisa berubah menjadi:

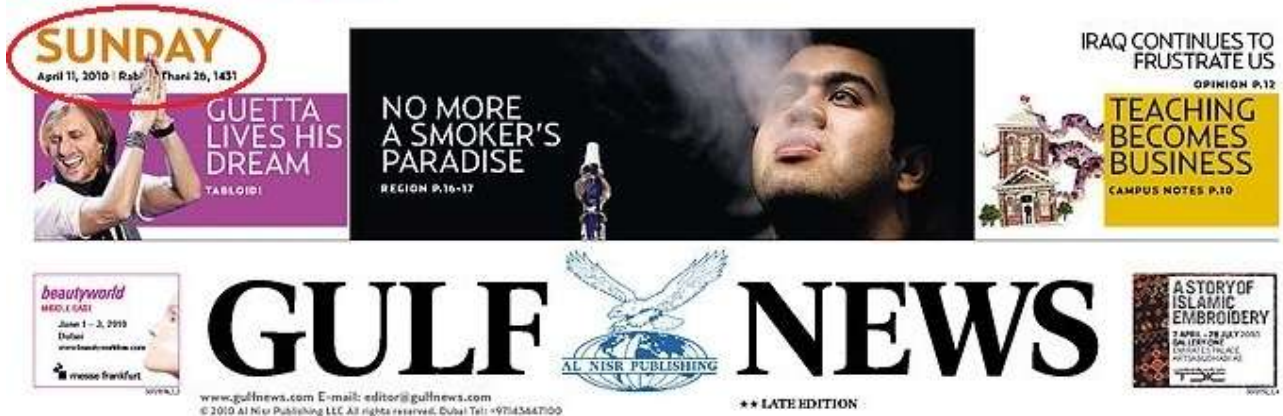
$$a = d + \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor - 1 + 4Y + 4 \left\lfloor \frac{Y}{30} \right\rfloor + k_Y \quad (26)$$

Nilai a ini harus dikoreksi dengan menambahkan atau mengurangi konstanta dari a agar sesuai dengan hari yang dicari. Kita ambil tanggal 1 Muharam 1433 H yang jatuh pada Minggu, 27 November 2011, sebagai koreksi. Dari situ, didapat $d = 1$, $m = 1$, $Y = 1433$. Karena $1433 \bmod 30 = 23$, dari Tabel IV diperoleh nilai $k_Y = 8$ sehingga nilai $a = 5929$ dan $a \bmod 7 = 0$. Padahal untuk Minggu, dari keterangan (1) seharusnya $a \bmod 7 = 1$, karena itu, kita harus menambahkan konstanta 1 ke a . Maka:

$$a = d + \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 4Y + 4 \left\lfloor \frac{Y}{30} \right\rfloor + k_Y \quad (27)$$

Perubahan abad tidak kita perhitungkan di sini karena dari awal kita tidak membagi-bagi tahun berdasarkan

Minggu, 26 Rabiulakhir 1431 H



Sumber: www.gdynia.mm.pl/~chudygdy/okladki/Gulf%20News.%20published%20in%20Dubai.%20United%20Arab%20Emirates.jpg
(11 Desember 2011)

Gambar 1 – Surat kabar pada tanggal 26 Rabiulakhir (Rabi' al-Thani) 1431 H

abad. Lagipula yang berpengaruh pada penanggalan Hijriyah adalah perubahan setiap tiga puluh tahunan karena ada tepat 11 tahun kabisat dalam jangka waktu tiga puluh tahunan itu. Akhirnya, dari rumus di atas, kita bisa memperkirakan hari dari suatu tanggal Hijriyah dengan rumus berikut.

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 4Y + 4 \left\lfloor \frac{Y}{30} \right\rfloor + k_Y \right) \bmod 7 \quad (28)$$

dengan

- h adalah hari dalam satu minggu (0 = Sabtu, 1 = Minggu, ..., 6 = Jumat)
- d adalah tanggal yang ingin dicari harinya
- m adalah bulan dari tanggal yang ingin dicari harinya (1 = Muharam, 2 = Safar, ..., 11 = Zulkaidah, 12 = Zulhijah)
- Y adalah tahun dari tanggal yang bersangkutan
- k_Y adalah nilai yang menyatakan jumlah tahun kabisat yang telah dilewati dalam jangka waktu tiga puluh tahunan, nilainya bisa dilihat pada Tabel IV

Rumus ini telah diuji menggunakan *Java applet* "Calendrica" di situs <http://emr.cs.iit.edu/home/reingold/calendar-book/Calendrica.html> dengan pilihan kalender "Islamic (Arithmetic)". Rumus telah memberikan hasil yang tepat berdasarkan *applet* tersebut. Namun, rumus ini bisa dipakai hanya untuk **memperkirakan** hari dari suatu tanggal Hijriyah. Pada kenyataannya, penanggalan Hijriyah harus ditentukan pula berdasarkan pengamatan terhadap bulan sehingga terkadang perkiraan ini meleset dari kenyataannya.

E. Contoh Penggunaan Kekongruenan Zeller

Untuk penggunaan pada kalender Gregorian, kita ambil contoh tanggal 17 Agustus 1945. Untuk itu, kita gunakan (1). Dari tanggal tersebut, didapat $d = 17$, $m = 8$, $y = 45$, dan $c = 19$. Maka:

$$\begin{aligned} h &= \left(17 + \left\lfloor \frac{13(8+1)}{5} \right\rfloor + 45 + \left\lfloor \frac{45}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{19}{4} \right\rfloor - 2 \cdot 19 \right) \bmod 7 \\ &= 62 \bmod 7 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dari perhitungan tersebut, dapat disimpulkan bahwa 17 Agustus 1945 jatuh pada hari **Jumat**.

Untuk penggunaan pada kalender Julian, kita ambil contoh hari terjadinya perang antara bangsa Inggris dan Perancis, Perang Agincourt, Jumat, 25 Oktober 1415 (en.wikipedia.org/wiki/Battle_of_Agincourt). Untuk itu, kita gunakan (2). Dari tanggal tersebut, didapat $d = 25$, $m = 10$, $y = 15$, dan $c = 14$. Maka:

$$\begin{aligned} h &= \left(25 + \left\lfloor \frac{13(10+1)}{5} \right\rfloor + 15 + \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor - 14 + 5 \right) \bmod 7 \\ &= 62 \bmod 7 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dari perhitungan tersebut, kita dapat mengonfirmasi bahwa memang 25 Oktober 1415 jatuh pada hari **Jumat**.

Untuk penggunaan pada kalender Hijriyah, kita ambil contoh tanggal pada surat kabar di atas, yakni 26 Rabiulakhir 1431 H. Untuk itu, kita gunakan (28). Dari tanggal tersebut, didapat $d = 26$, $m = 4$, dan $Y = 1431$. Karena $1431 \bmod 30 = 21$, dari Tabel IV diperoleh nilai $k_Y = 7$. Maka:

$$\begin{aligned} h &= \left(26 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 4}{2} \right\rfloor + 4 \cdot 1431 + 4 \left\lfloor \frac{1431}{30} \right\rfloor + 7 \right) \bmod 7 \\ &= 5951 \bmod 7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dari perhitungan tersebut, kita dapat mengonfirmasi bahwa memang 26 Rabiulakhir 1431 H jatuh pada hari **Minggu**.

III. KESIMPULAN

Kekongruenan Zeller dapat dipakai untuk menentukan hari pada kalender Gregorian dan Julian. Perbedaan kedua kalender ini hanyalah permasalahan penentuan tahun kabisat. Karena perbedaan tersebut, persamaan Kekongruenan Zeller berbeda untuk keduanya. Prinsip dasar perhitungan Kekongruenan Zeller adalah menghitung perubahan hari untuk suatu perubahan jangka waktu tertentu baik perubahan tanggal (hari), bulan, tahun, empat tahunan (kabisat), abad, empat ratus tahunan, maupun jangka waktu lainnya.

Dengan prinsip dasar tersebut, Kekongruenan Zeller dapat diperluas untuk memperkirakan hari dari suatu tanggal pada penanggalan Hijriyah. Perubahan jangka waktu yang diperhitungkan pada penanggalan ini adalah perubahan tanggal (hari), bulan, tahun, tiga puluh tahunan, dan tahun kabisat yang jangka waktunya tidak pasti. Namun, rumus Kekongruenan Zeller untuk kalender Hijriyah pada makalah ini hanya bisa memperkirakan hari. Karena perhitungan kalender Hijriyah harus disertai dengan pengamatan bulan, bisa jadi perkiraan ini meleset.

REFERENSI

- [1] Rinaldi Munir. *Diktat Kuliah IF2091 – Struktur Diskrit*. Bandung: Program Studi Informatika Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung. 2008. h. V-13 – V-14.
- [2] Doctor Peterson. "Deriving Zeller's Rule." *Math Forum - Ask Dr. Math*. Sabtu, 10 Desember 2011. <mathforum.org/library/drmath/view/62324.html>.
- [3] "Floor and ceiling functions." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*. Sabtu, 10 Desember 2011. <en.wikipedia.org/wiki/Floor_function>.
- [4] "Gregorian calendar." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*. Sabtu, 10 Desember 2011. <en.wikipedia.org/wiki/Gregorian_calendar>.
- [5] "Islamic calendar." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*. Sabtu, 10 Desember 2011. <en.wikipedia.org/wiki/Islamic_calendar>.
- [6] "Islamic Calendar System." *Joda-Time - Java Date and Time API - Home*. Sabtu, 10 Desember 2011. <joda-time.sourceforge.net/cal_islamic.html>.
- [7] "Julian calendar." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*. Sabtu, 10 Desember 2011. <en.wikipedia.org/wiki/Julian_calendar>.
- [8] "Tabular Islamic calendar." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*. Sabtu, 10 Desember 2011. <en.wikipedia.org/wiki/Tabular_Islamic_calendar>.
- [9] "Zeller's Congruence." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*. Sabtu, 10 Desember 2011. <en.wikipedia.org/wiki/Zeller's_congruence>.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2011



Devin Hoesen
13510081