

# Penggunaan Perwarnaan Graf dalam Mencari Solusi Sudoku

Mahdan Ahmad Fauzi Al-Hasan - 13510104

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

mahdan.ahmad@s.itb.ac.id

**Abstract**—Makalah ini membahas tentang penerapan pewarnaan graf dalam mencari solusi permainan Sudoku. Sudoku sendiri merupakan permainan yang cukup populer, dimana sang pemain diharapkan menyelesaikan suatu puzzle berbasis angka 1-9 dan memasukkannya kedalam kotak besar berukuran 9x9 kotak kecil. Permainan ini adalah bentuk lain dari Latin Square.

Teknik yang biasa digunakan dalam penyelesaian Sudoku adalah pewarnaan Graf, dalam hal ini lebih pewarnaan yang digunakan adalah pewarnaan simpul. Simpul – simpul pada graf tersebut diberi warna yang berbeda – beda, minimal berbeda dari simpul – simpul yang bertetangga, yaitu simpul yang saling dihubungkan oleh satu sisi.

Teknik pewarnaan ini tidak bisa dijauhkan dari bilangan kromatik, yaitu jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul tersebut.

**Index Terms**—Sudoku, Graph, Coloring Graph, Chromatic Polynomial

## I. PENDAHULUAN

### A. Sudoku

Sudoku merupakan sebuah singkatan dari "*Suuji wa dokushin ni kagiru*" yang dalam bahasa jepang berarti "angka-angka yang harus tetap tunggal". Walaupun nama permainan ini menggunakan bahasa jepang, Sudoku pertama kali diperkenalkan oleh Howard Garns pada 1979 lewat suatu majalah di Indianapolis.

Normalnya, Sudoku berukuran 9x9 kotak kecil. Sehingga Sudoku akan berbentuk 81 kotak kecil. Pemain diharuskan mengisi kotak – kotak tersebut dengan angka 1-9.

Walaupun standarnya sudoku berukuran 9x9 kotak, terdapat banyak variasi dari permainan ini. Seperti Sudoku berukuran 16x16 kotak, killer Sudoku, mini Sudoku, kakkuro, dan lain lain.

Jika dimisalkan kita memiliki Sudoku berukuran  $n \times n$ , maka peraturan dalam mengerjakannya adalah:

1. Dalam 1 baris harus berisi semua angka dari 1 sampai  $n$ , tidak boleh ada angka yang sama
2. Hal yang sama juga berlaku untuk kolom, tidak diperkenankan ada angka yang sama dari 1 sampai  $n$  untuk kolom tersebut.
3. Untuk Sudoku standar (berukuran  $9 \times 9$  kotak) terdapat bagian yang terbentuk dari 9 kotak kecil

seperti yang tunjukkan pada gambar di bawah. Di bagian ini, juga tidak diperkenankan adanya angka yang sama.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Gambar 1. Contoh Sudoku Sederhana

### B. Graf

Teori graf adalah pokok bahasan yang sudah tua usianya namun masih memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek – objek diskrit dan hubungan antara objek – objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antar bulatan dinyatakan dengan garis.

Graf memiliki banyak kegunaan. Pada umumnya, graf digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan agar menjadi lebih mudah. Contoh permasalahan yang dapat dibuat dalam graf seperti: rangkaian listrik, ikatan kimia, peta rel kereta api, jaringan komputer, dan lain lain.

Graf  $G(V, E)$ , adalah koleksi atau pasangan dua himpunan:

- (1) Himpunan  $V$  yang elemennya disebut simpul atau titik, atau vertex, atau point, atau node.
- (2) Himpunan  $E$  yang merupakan pasangan tak terurut dari simpul, disebut ruas atau rusuk, atau sisi, atau edge, atau line.

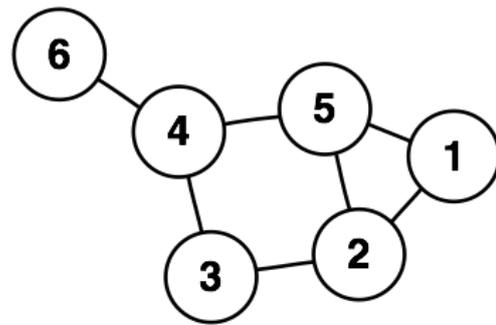
**Lintasan Euler** adalah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali. Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal, membentuk sebuah lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup itu

disebut **sirkuit Euler**. Jadi, sirkuit Euler adalah sirkuit yang melewati tiap sisi masing-masing tepat satu kali.

**Lintasan Hamilton** adalah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali. Jika lintasan itu tepat kembali ke titik awal dan membentuk sirkuit, maka lintasan tertutup ini disebut **sirkuit Hamilton**. Jadi, sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui tiap simpul dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal yang dilalui sebanyak dua kali.

Terminologi dasar dalam graf:

1. Bertetangga  
Dua buah simpul pada graf tak berarah  $G$  dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi pada graf  $G$ .
2. Bersisian  
Untuk sembarang sisi  $e = (v_j, v_k)$ , sisi  $e$  dikatakan bersisian dengan simpul  $v_j$  dan simpul  $v_k$ .
3. Simpul terpercil  
Simpul terpercil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Atau, dapat juga simpul terpercil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya.
4. Graf kosong  
Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Dan ditulis sebagai  $N_n$ , yang dalam hal ini  $n$  adalah jumlah simpul.
5. Derajat  
Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
6. Lintasan  
Lintasan yang panjangnya  $n$  dan simpul awal  $v_0$  ke simpul tujuan  $v_n$  di dalam graf  $G$  ialah barisan selang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ , adalah sisi – sisi dari graf  $G$ .
7. Siklus atau sirkuit  
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut siklus atau sirkuit.
8. Terhubung  
Graf tak berarah  $G$  disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  di dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $u$  ke  $v$ .
9. Upagraf  
Misalkan  $G = (V, E)$  adalah sebuah graf.  $G_1 = (V_1, E_1)$  adalah upagraf dari  $G$  jika  $V_1$  merupakan bagian dari  $V$  dan  $E_1$  merupakan bagian dari  $E$ .
10. Graf berbobot  
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Gambar 2. Contoh Graf Sederhana

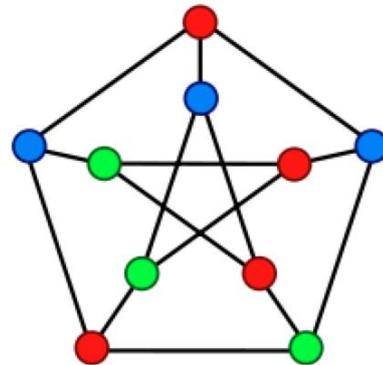
## II. PEWARNAAN GRAF

### A. Pengertian

Terdapat 3 macam pewarnaan pada graf :

#### 1. Pewarnaan simpul

Pewarnaan Simpul (Vertex Coloring) suatu Graf adalah pemberian warna terhadap simpul sedemikian sehingga dua simpul yang berdampingan mempunyai warna yang berlainan.



Gambar 3. Contoh Pewarnaan Simpul

#### 2. Pewarnaan sisi

Pewarnaan sisi pada graf  $G$  adalah penentuan warna bagi setiap sisi pada graf  $G$  sedemikian rupa sehingga tidak ada dua sisi yang saling adjacent mempunyai warna yang sama.



Gambar 4. Contoh Pewarnaan Sisi

#### 3. Pewarnaan wilayah / region

Pewarnaan region dari suatu graf planar (graf bidang)  $G$  adalah suatu pemetaan warna-warna ke region-region dari graf  $G$  sedemikian hingga region-region yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.



Gambar 5. Contoh Pewarnaan Region

### B. Cara Pewarnaan

Menurut Algoritma Welch-Powell kita dapat member warna pada simpul suatu graf dengan langkah sebagai berikut :

1. Urutkan node berdasarkan derajat menurun (representasi ini tidak tunggal, karena derajat node bisa sama)
2. Berilah warna mulai dari node yang berderajat terbesar.
3. Berilah warna yang sama, sepanjang bukan node yang bertetangga, terhadap node yang mempunyai derajat yang sama atau lebih kecil.
4. Langkah 3 diulang sampai habis.
5. Langkah 2., 3., dan 4., diulang sampai semua node diberi warna.

### C. Bilangan Kromatis

Permasalahan yang muncul dalam pewarnaan simpul graf adalah bagaimana mewarnai simpul graf yang bertetangga tidak ada yang memiliki warna yang sama. Hal ini biasanya dikaitkan dengan bilangan kromatik. Bilangan kromatik untuk graf  $G$  dapat disimbolkan sebagai  $\chi(G)$ .

Beberapa sifat bilangan kromatis ( $\chi(G)$ ):

1.  $\chi(G) = 1 \leftrightarrow G$  adalah graf kosong (tidak terhubung sama sekali).
2.  $\chi(G) \geq 3 \leftrightarrow G$  memiliki upagraf yang merupakan  $K_3$  atau  $C_3$
3.  $\chi(G) \leq B(G)+1$ .
4.  $\chi(G) \leq B(G)$ , kecuali jika  $G$  adalah graf lengkap atau graf lingkaran dengan jumlah simpul ganjil.
5. Untuk setiap graf planar, berlaku teorema Four-Colouring, yaitu  $\chi(G) \leq 4$ .
6. Bila  $G'$  adalah upagraf dari  $G$ , maka  $\chi(G') \leq \chi(G)$ .
7. Graf lengkap  $K_n$  memiliki  $\chi(G) = n$ .
8. Graf Lingkaran  $C_n$  memiliki  $\chi(G) = 2$  bila genap dan  $\chi(G) = 3$  bila ganjil.
9. Graf Teratur derajat  $n$  selalu memiliki  $\chi(G) = n + 1$  (lihat sifat ke-3)
10. Graf Bipartit hanya membutuhkan dua warna.
11. Graf yang berupa pohon hanya membutuhkan dua warna.

### D. Polinomial Kromatis

Polinomial Kromatis adalah suatu cara untuk menghitung bilangan kromatis pada suatu graf.

Polinomial kromatis adalah sebuah fungsi  $P(G,t)$  yang menghitung jumlah  $t$ -pewarnaan dari  $G$ . Sesuai dengan namanya, untuk  $G$  yang diberikan, fungsinya adalah polinomial dalam  $t$ . Contoh:

$$P(G,t) = t(t-1)(t-2)2, \text{ dan } P(G,4) = 72.$$

Polinomial kromatis mengandung informasi mengenai banyaknya warna yang dapat diberi pada  $G$  sama seperti bilangan kromatis. Dan  $\chi$  adalah bilangan positif terkecil yang bukan merupakan akar dari polinomial kromatis.

$$\chi(G) = \min\{k: P(G,k) > 0\}$$

Beberapa sifat dari polynomial kromatis:

1.  $P(G,0) = 0$
2.  $P(G,1) = 0$  jika  $G$  memiliki sebuah sisi
3.  $P(G,t) = 0$ , jika  $t < \chi(G)$ .
4.  $(-1)^{|V(G)|} P(G, -1) |V(G)|$  adalah jumlah orientasi asiklik dari  $G$
5. Jika  $G$  memiliki  $n$  simpul,  $m$  sisi, dan  $k$  komponen  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , maka  $P(G,t)$  memiliki derajat  $n$ .
6. Koefisien  $t^n$  pada  $P(G,t)$  adalah 1.
7. Koefisien  $t^{n-1}$  dalam  $P(G,t)$  adalah  $-m$ .
8. Koefisien  $t^{n-2}$  ...  $t^{n-k}$  semuanya nol.
9. Koefisien pada  $t^k$  adalah bukan nol.
10.  $P(G,t) = P(G_1,t)P(G_2,t) \dots P(G_k,t)$
11. Koefisien setiap polinomial kromatis mewakili tandanya (positif negatif).
12. Sebuah graf dengan  $n$  buah simpul adalah pohon jika dan hanya jika  $P(G,t) = t(t-1)^{n-1}$
13. Turunannya,  $P'(G,1)$  adalah  $\theta(G)$ .

Triangle $K_3$	$t(t-1)(t-2)$
Path graph $P_n$	$t(t-1)^{n-1}$
Complete graph $K_n$	$t(t-1)(t-2) \dots (t-(n-1))$
Tree with $n$ vertices	$t(t-1)^{n-1}$
Cycle $C_n$	$(t-1)^n + (-1)^n(t-1)$
Petersen graph	$t(t-1)(t-2)(t^7 - 12t^6 + 67t^5 - 230t^4 + 529t^3 - 814t^2 + 775t - 352)$

Gambar 6. Polinomial Kromatis untuk Beberapa Jenis Graf

Ketika suatu graf  $G$  berisi sebuah loop, menurut teorema, graf tersebut tidak dapat diwarnai sama sekali, sehingga

$$P(G,t) = 0.$$

Jika  $e$  bukan sebuah loop, maka polinom kromatik memenuhi suatu Recurrence relation.

$$P(G,t) = P(G - e,t) - P(G / e,t),$$

Untuk  $G - e$  merupakan sebuah graf dengan sisinya yang berpindah, dan  $G / e$  merupakan graf dengan sisi end points yang berhubungan dengan simpul tunggal.

Dalam kedua ekspresi menunjukkan sebuah prosedur berulang (rekursif), yang disebut dengan algoritma

deletion – contraction. Dalam tahap perulangan, suatu bentuk diubah menjadi dua bentuk yang sminimal memiliki lebih sedikit satu sisi. Sehingga, waktu untuk menjalankan (running time) dapat direpresentasikan dengan sebuah faktor polinom  $2m$ , dimana  $m$  adalah jumlah sisi. Dan analisa dapat ditingkatkan menjadi  $1.62n + m$ .

Algoritma-algoritma lain memang banyak, tetapi semuanya bersifat eksponen untuk ukuran graf..

### III. PEWARNAAN GRAF PADA PERMAINAN SUDOKU

Langkah – langkah yang bisa digunakan untuk pengerjaan Sudoku menggunakan graf adalah sebagai berikut:

1. Mengubah elemen – elemen Sudoku ke dalam bentuk Graf Sudoku di mana setiap elemen merupakan simpul graf tersebut dan dilambangkan dengan  $v_{ij}$  dengan  $1 \leq i, j \leq n^2$ . Simpul  $v_{ij}$  dan  $v_{i',j'}$  dikatakan bertetangga jika  $i = i'$  atau  $j = j'$  yang dihubungkan oleh sebuah sisi. Sisi – sisi ini dipandang sebagai relasi dari setiap elemen – elemen bilangan pada Sudoku. Graf Sudoku yang terbentuk adalah graf reguler dengan derajat  $3n^2 - 2n - 1$
2. Memberikan warna pada setiap simpul Graf Sudoku. Caranya adalah dengan memberikan warna tertentu terhadap suatu simpul, kemudian cari simpul lain yang belum diberi warna dan lakukan proses yang sama. Pencarian ini dilanjutkan pada simpul – simpul lain yang belum diberi warna sampai semua simpul sudah terwarnai dengan tepat. Dalam teori graf, jika simpul – simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak mempunyai warna yang sama disebut "warna yang tepat." Dalam penyelesaian Sudoku pun dicoba untuk meng-extend sebagian graf berwarna menjadi pewarnaan yang tepat.
3. Mengubah kembali Graf Sudoku yang sudah diwarnai ke bentuk awal permainan Sudoku, yaitu tabel Sudoku. Warna pada Graf Sudoku diubah menjadi bilangan pada permainan Sudoku.

Sebagai contoh, diberikan Sudoku seperti gambar dibawah.

		1	3	8			4	
5	4	6			1		2	
6					4	9		
4		5		3		8		1
	3	9						6
	7		8			6	3	4
6			4	3	7			

Gambar 7. Sudoku Awal

Ketetanggaan dalam Sudoku 9x9 adalah:

1. kotak – kotak yang berada pada satu kolom
2. kotak – kotak yang berada pada satu baris
3. kotak – kotak yang membentuk subkotak (kotak yang dibentuk dari 9 kotak kecil, berbentuk 3x3)

Kemudian langkah kedua adalah dilakukan pewarnaan.

Misal:

- 1 = merah
- 2 = hijau
- 3 = biru
- 4 = ungu
- 5 = kuning
- 6 = putih
- 7 = oranye
- 8 = abu – abu
- 9 = coklat

Untuk Sudoku awal dapat kita warnai sebagai gambar dibawah.

1,1	1,2				1,6	1,7		1,9
			2,4	2,5		2,7		2,9
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6			4,9
	5,2		5,4		5,6		5,8	
6,1			6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	
7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
8,1		8,3		8,5	8,6			
9,1		9,3	9,4				9,8	9,9

Gambar 8. Pewarnaan awal pada Sudoku.

Kemudian Simpul  $v_{3,7}$ ,  $v_{4,2}$ ,  $v_{6,5}$ ,  $v_{7,4}$ ,  $v_{8,1}$ , dan  $v_{9,8}$  tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna merah dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna merah.

1,1	1,2				1,6	1,7		1,9
			2,4	2,5		2,7		2,9
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6		3,8	3,9
		4,3	4,4	4,5	4,6			4,9
	5,2		5,4		5,6		5,8	
6,1			6,4		6,6	6,7	6,8	
7,1	7,2	7,3		7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
		8,3		8,5	8,6			
9,1		9,3	9,4					9,9

Gambar 9. Pewarnaan Merah (angka 1)

Simpul  $v_{1,1}$ ,  $v_{3,6}$ ,  $v_{4,5}$ ,  $v_{5,2}$ ,  $v_{6,7}$ ,  $v_{7,9}$ ,  $v_{8,3}$ , dan  $v_{9,4}$  tidak bertetangga dengan  $v_{2,8}$  yang sudah berwarna hijau, dan antara kedelapan simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna hijau.

	1,2				1,6	1,7		1,9
			2,4	2,5		2,7		2,9
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5			3,8	3,9
		4,3	4,4		4,6			4,9
			5,4		5,6		5,8	
6,1			6,4		6,6		6,8	
7,1	7,2	7,3		7,5	7,6	7,7	7,8	
				8,5	8,6			
9,1		9,3						9,9

Gambar 10. Pewarnaan Hijau (angka 2)

Simpul  $v_{2,7}$ ,  $v_{3,3}$ ,  $v_{4,9}$ , dan  $v_{7,1}$  tidak bertetangga dengan  $v_{1,4}$ ,  $v_{5,5}$ ,  $v_{6,2}$ ,  $v_{8,8}$ , dan  $v_{9,6}$  yang sudah berwarna biru dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna biru.

	1,2				1,6	1,7		1,9
			2,4	2,5				2,9
3,1	3,2		3,4	3,5			3,8	3,9
		4,3	4,4		4,6			
			5,4		5,6		5,8	
6,1			6,4		6,6		6,8	
	7,2	7,3		7,5	7,6	7,7	7,8	
				8,5	8,6			
9,1		9,3						9,9

Gambar 11. Pewarnaan Biru (angka 3)

Simpul  $v_{3,4}$ ,  $v_{6,6}$ , dan  $v_{7,3}$  tidak bertetangga dengan  $v_{1,8}$ ,  $v_{2,2}$ ,  $v_{4,7}$ ,  $v_{5,1}$ ,  $v_{8,9}$ , dan  $v_{9,5}$  yang sudah berwarna ungu dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna ungu.

	1,2				1,6	1,7		1,9
			2,4	2,5				2,9
3,1	3,2			3,5			3,8	3,9
		4,3	4,4		4,6			
			5,4		5,6		5,8	
6,1			6,4				6,8	
	7,2			7,5	7,6	7,7	7,8	
				8,5	8,6			
9,1		9,3						9,9

Gambar 12. Pewarnaan Ungu (angka 4)

Simpul  $v_{1,7}$ ,  $v_{3,5}$ ,  $v_{4,4}$ ,  $v_{6,8}$ ,  $v_{7,2}$ ,  $v_{8,6}$ , dan  $v_{9,9}$  tidak bertetangga dengan  $v_{2,1}$  dan  $v_{5,3}$  yang sudah berwarna kuning dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna kuning.

	1,2				1,6			1,9
			2,4	2,5				2,9
3,1	3,2						3,8	3,9
		4,3			4,6			
			5,4		5,6		5,8	
6,1			6,4					
				7,5	7,6	7,7	7,8	
				8,5				
9,1		9,3						

Gambar 13. Pewarnaan Kuning (angka 5)

Simpul  $v_{1,6}$ ,  $v_{3,8}$ ,  $v_{5,4}$ , dan  $v_{7,5}$  tidak bertetangga dengan  $v_{2,3}$ ,  $v_{4,1}$ ,  $v_{6,9}$ ,  $v_{8,7}$ , dan  $v_{9,2}$  yang sudah berwarna merah muda dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna putih.

	1,2							1,9
			2,4	2,5				2,9
3,1	3,2							3,9
		4,3			4,6			
					5,6		5,8	
6,1			6,4					
					7,6	7,7	7,8	
				8,5				
9,1		9,3						

Gambar 14. Pewarnaan Putih (angka 6)

Simpul  $v_{1,9}$ ,  $v_{2,5}$ ,  $v_{3,1}$ ,  $v_{4,3}$ ,  $v_{5,8}$ ,  $v_{6,4}$ , dan  $v_{7,6}$  tidak bertetangga dengan  $v_{8,2}$ , dan  $v_{9,7}$  yang sudah berwarna oranye dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna oranye.

	1,2							
			2,4					2,9
	3,2							3,9
					4,6			
					5,6			
6,1								
						7,7	7,8	
				8,5				
9,1		9,3						

Gambar 15. Pewarnaan Oranye (angka 7)

Simpul  $v_{2,9}$ ,  $v_{3,2}$ ,  $v_{4,6}$ ,  $v_{6,1}$ ,  $v_{7,8}$ , dan  $v_{9,3}$  tidak bertetangga dengan  $v_{1,5}$ ,  $v_{5,7}$ , dan  $v_{8,4}$  yang sudah berwarna abu - abu dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna abu - abu.

#### IV. KESIMPULAN

Teori graf memiliki terapan dalam berbagai bidang, penggunaannya dapat memudahkan penyelesaian berbagai macam soal, termasuk dalam Sudoku ini.

Untuk penyelesaian Sudoku, digunakan pewarnaan graf yang notabene mudah. Manusia juga lebih menyukai hal – hal yang berwarna, sehingga lebih nyaman ketika mengeksekusi Sudoku menggunakan metode graf.

Untuk Sudoku berukuran  $n \times n$ , dibutuhkan  $n$  warna juga untuk penyelesaiannya.

#### REFERENCES

- [1] Herzberg, Agnes; M. Ram Murty, Sudoku Squares and Chromatic Polynomials  
<http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf>. Tanggal Akses: 11 Desember 2011 pukul 10.00
- [2] Munir, Rinaldi, Diktat Kuliah IF 2153, Matematika Diskrit, Edisi Keempat, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2008.
- [3] Wikipedia, Wikipedia – Free Encyclopedia, [www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com)., Tanggal akses : 10 Desember 2011, pukul 14.00 WIB.
- [4] Samawa, Adeka, Pewarnaan Graf (Graph Coloring) <http://adekasamawa.wordpress.com/2010/01/26/pewarnaan-graf-graph-coloring/>. Tanggal Akses: 11 Desember 2011 pukul 11.00

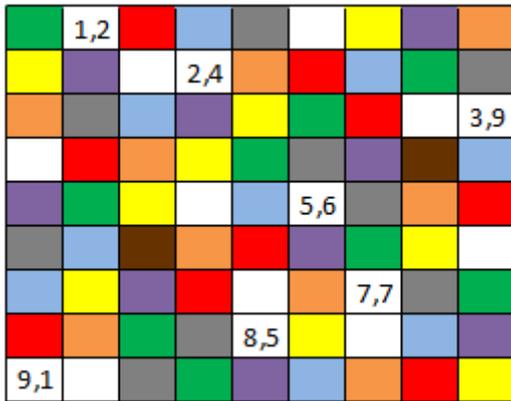
#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2011

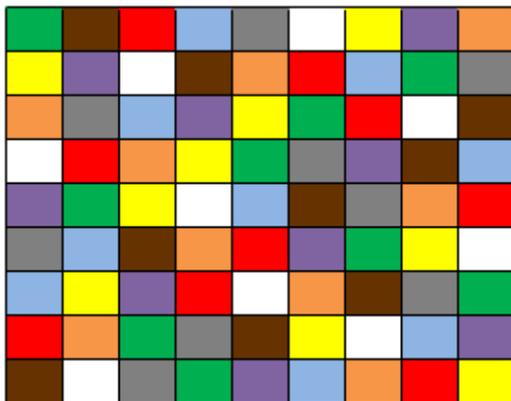


Mahdan Ahmad F A H / 13510104



Gambar 16. Pewarnaan Abu - Abu (angka 8)

Simpul  $v_{1,2}$ ,  $v_{2,4}$ ,  $v_{3,9}$ ,  $v_{5,6}$ ,  $v_{7,7}$ ,  $v_{8,5}$ , dan  $v_{9,1}$  tidak bertetangga dengan  $v_{4,8}$ , dan  $v_{6,3}$  yang sudah berwarna cokelat dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna cokelat.



Gambar 17. Pewarnaan Cokelat (angka 9)

Setelah semua warna terpenuhi dan tidak ada simpul yang bertetangga yang sama warnanya, maka kita kembalikan warna tersebut menjadi angka.

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6	9	7	1	3	2	8
7	8	3	4	5	2	1	6	9
6	1	7	5	2	8	4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9	7	1	4	2	5	6
3	5	4	1	6	7	9	8	2
1	7	2	8	9	5	6	3	4
9	6	8	2	4	3	7	1	5

Gambar 18. Sudoku Akhir