

Prinsip Rumah Merpati dalam Penyelesaian Permasalahan Matematika

Aditya Agung Putra (13510010)¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹adityaagungputra@students.itb.ac.id

Abstrak- Makalah ini akan membahas salah satu aspek dalam ilmu kombinatorik yaitu prinsip rumah merpati. Prinsip ini sangat sederhana namun memiliki banyak aplikasi. Dalam implementasinya, prinsip ini dapat dihubungkan dengan beberapa permasalahan dalam aspek matematika lainnya seperti teori bilangan, aljabar, dan geometri. Contohnya dalam teori graf, prinsip ini berperan dalam masalah pewarnaan sisi. Nantinya, artikel ini akan menegaskan bahwa setiap aspek matematika saling memiliki kesinambungan.

Kata kunci: Prinsip rumah merpati, teori bilangan, geometri, graf, teorema Ramsey, kombinatorik

I. Pendahuluan

Matematika yang sering disebut ratu ilmu pengetahuan memiliki ruang lingkup yang luas dan banyak aplikasi di kehidupan nyata. Ruang lingkungannya pun walaupun mengkaji aspek yang berbeda namun tetap memiliki kesinambungan. Seperti adanya beberapa prinsip kombinatorik yang dapat membantu pembuktian teorema-teorema dalam teori bilangan. Ada juga suatu prinsip sederhana yang disebut prinsip rumah merpati. Prinsip rumah merpati (Pigeonhole principle atau disebut The Box Principle pada beberapa referensi) ditemukan pada tahun 1834 oleh seorang matematikawan Jerman bernama Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Walaupun sederhana, prinsip ini termasuk alat bantu kombinatorika yang membantu dalam aspek matematika lainnya.

II. Teori Dasar

Prinsip rumah merpati awalnya mengatakan bahwa jika banyak merpati terbang ke sarangnya yang tidak banyak jumlahnya, kita akan mendapatkan setidaknya satu sarang yang ditempati lebih dari dua merpati. Secara matematis, teorema ini dapat dituliskan sebagai berikut

Prinsip 1 Jika $n+1$ benda disimpan pada n kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang memuat dua atau lebih benda tersebut.

Teorema tersebut jelas dan dapat dibuktikan dengan mudah. Jika tiap-tiap kotak memuat maksimal satu benda maka banyak benda tersedia paling banyak yaitu n . Karena

kita memiliki $n+1$ benda maka harus ada kotak yang memuat lebih dari satu benda.

Prinsip tersebut dapat kita nyatakan dalam bentuk seperti ini

Prinsip 2 Jika f merupakan fungsi dari himpunan berhingga X ke himpunan berhingga Y dengan $|X| > |Y|$ maka terdapat beberapa $x_1, x_2 \in X$ dengan $x_1 \neq x_2$ dan $f(x_1) = f(x_2)$.

Bentuk tersebut juga dapat dinyatakan secara ekuivalen dengan pernyataan berikut

Prinsip 3 Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y , dimana $|X| = n$, $|Y| = m$ dan $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = k$ maka kita akan mendapatkan paling sedikit k anggota $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ sedemikian sehingga $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k)$.

Pernyataan terakhir dapat dibuktikan dengan kontradiksi. Misalkan pernyataan diatas salah, maka akan terdapat paling banyak $k-1$ anggota X sehingga nilai f untuk $k-1$ bilangan tersebut sama. Hal ini berarti terdapat paling banyak $m(k-1)$ anggota X . Namun, $m(k-1) < mk < n$

sebagai akibat dari persamaan $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = k$. Dengan demikian, pernyataan semula yang mengatakan bahwa terdapat paling sedikit k anggota X dengan nilai fungsi yang sama adalah benar.

Ketiga prinsip tersebut dengan jelas dapat membuktikan hal-hal seperti berikut:

1. Diantara tiga orang, pasti terdapat dua orang dengan jenis kelamin sama karena hanya terdapat dua jenis kelamin di dunia ini.
2. Diantara 13 orang yang berbeda, paling sedikit terdapat dua orang dengan bulan kelahiran yang sama karena di dunia ini hanya terdapat 12 bulan berbeda.
3. Diantara n orang dalam suatu ruangan, setidaknya terdapat dua orang yang memiliki jumlah kenalan dalam ruangan tersebut sama karena kejadian ada seseorang yang tidak mengenal siapapun dan ada

seseorang yang mengenal semua orang lain dalam ruangan tersebut tidak mungkin ditemui bersamaan.

4. Dari dalam lemari yang memuat 5 jenis kaos kaki berbeda dalam jumlah banyak, kita dapat mengambil 6 kaos kaki untuk memastikan kita mendapatkan sepasang kaos kaki berwarna sama.

Untuk masalah penempatan objek pada kotak, terdapat juga kasus khusus untuk prinsip ini.

Prinsip 4 Misalkan q_1, q_2, \dots, q_n bilangan asli. Jika $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ benda disimpan pada n kotak berbeda, maka setidaknya salah satu dari ke- n pernyataan berikut haruslah benar: Kotak pertama memuat paling sedikit q_1 benda, kotak kedua memuat paling sedikit q_2 benda, dan seterusnya hingga kotak ke- n yang paling sedikit memuat q_n benda.

Kembali prinsip diatas dapat dibuktikan melalui kontradiksi, yaitu jika tidak ada pernyataan yang terpenuhi, maka jumlah benda yang terdistribusikan tidak akan melebihi $(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \dots + (q_n - 1)$ atau $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n$ sehingga salah satu pernyataan semula terpaksa benar jika kita ingin meletakkan 1 benda terakhir pada salah satu dari n kotak.

Prinsip tersebut mengacu pada perluasan prinsip rumah merpati ini pada prinsip rerata (*averaging principle*) yang berbunyi

Jika rerata dari n bilangan bulat tak negatif melebihi $r-1$, atau

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} > r - 1$$

maka paling sedikit salah satu dari ke- n bilangan tersebut lebih dari atau sama dengan r .

Prinsip tersebut dapat dikembangkan pada saat kondisi reratanya kurang dari $r+1$ maka salah satu bilangannya juga kurang dari $r+1$. Kita juga dapat mengatakan salah satu bilangan tersebut lebih besar sama dengan r saat reratanya juga lebih besar atau sama dengan r .

III. Pembahasan

A. Penggunaan dalam Objek Teori Bilangan

Dalam teori bilangan, kita dapat memanfaatkan prinsip rumah merpati ini dalam masalah keterbagian bilangan. Seperti yang sudah kita ketahui sebelumnya, jika suatu bilangan asli dibagi dengan bilangan asli lainnya, katakanlah m maka akan terdapat m sisa pembagian yang mungkin, yaitu $0, 1, 2, \dots, m-1$. Dengan begitu, melalui prinsip rumah merpati dapat dibuktikan dengan mudah bahwa diantara $m+1$ bilangan cacah yang berbeda, paling sedikit terdapat dua bilangan berbeda yang memberikan sisa yang sama saat dibagi oleh m . Contohnya, diantara 5 bilangan cacah berbeda, akan terdapat dua buah bilangan yang memberi sisa yang sama saat dibagi 4.

Sebagai contoh lain, misalkan terdapat a , yaitu bilangan yang relatif prima terhadap 2 dan 5. Kita dapat memperlihatkan bahwa untuk suatu n , terdapat bilangan a berpangkat yang berakhir dengan $000\dots 1$ dimana terdapat $n-1$ digit 0.

Pernyataan tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut.

Misalkan terdapat 10^n bilangan, yaitu $a^1, a^2, \dots, a^{10^n}$. Bagi semua bilangan dengan 10^n . Karena a relatif prima terhadap 10 maka sisa pembagian 0 tidak akan muncul sehingga terdapat 10^n-1 kemungkinan sisa, yaitu $1, 2, 3, \dots, 10^n-1$. Maka akan terdapat dua bilangan dengan sisa yang sama. Katakanlah kedua bilangan itu a^p dan a^q dengan $p > q$ tanpa mengurangi keumuman. Karena memberikan sisa yang sama saat dibagi 10^n , maka $a^p - a^q$ habis dibagi 10^n . Karenanya, $10^n \mid a^q(a^{p-q} - 1)$ dan haruslah $10^n \mid a^{p-q} - 1$ karena 10 dan a saling relatif prima.

Dengan begitu, kita dapatkan $a^{p-q} = m \cdot 10^n + 1$ untuk suatu bilangan bulat m . Dan bilangan tersebut lah yang berakhir dengan $\underbrace{000\dots 1}_n$. Terlihat bahwa prinsip rumah

merpati telah membantu kita menyelesaikan permasalahan yang sekilas terlihat tidak mungkin seperti contoh diatas.

Sifat yang telah dibuktikan diatas juga dapat digunakan dalam membuktikan bentuk lain dari *Chinese remainder theorem* yang mengatakan untuk bilangan relatif prima m dan n , terdapat a dan b dengan $0 \leq a < m$ dan $0 \leq b < n$ sehingga terdapat x yang dapat dinyatakan sebagai $x = pm + a = qn + b$ untuk bilangan bulat p dan q .

Untuk membuktikannya, misalkan terdapat n bilangan: $a, m+a, 2m+a, \dots, (n-1)m+a$ yang sama-sama bersisa a saat dibagi oleh m . Asumsikan dua diantaranya memiliki sisa yang sama saat dibagi oleh n . Katakanlah kedua bilangan tersebut $im+a$ dan $jm+a$ dimana $0 \leq i < j \leq n-1$. Sehingga hasil pengurangan keduanya habis dibagi n atau $n \mid (j-i)m$. Karena m dan n relatif prima maka $n \mid j-i$.

Namun, hal tersebut tidak mungkin karena i dan j tidak lebih besar dari n sementara n harus lebih kecil sama dengan $j-i$. Oleh karena itu, asumsi awal kita salah dan ke- n bilangan semula memiliki sisa yang berbeda-beda saat dibagi n , yaitu $0 \leq r < n$, termasuk b . Misalkan bilangan yang bersisa b saat dibagi n itu adalah $pm+a$, maka telah kita dapatkan suatu x sehingga $x = pm + a = qn + b$. (Q.E.D.)

B. Penggunaan dalam Objek Geometri

Konsep rumah merpati ini juga dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan dengan objek geometri, yaitu jarak antar titik di bidang.

Pada bidang dua dimensi contohnya, dari 5 titik dengan komponen absis dan ordinatnya bilangan bulat yang

dipilih secara acak, dapat kita temui sepasang titik yang titik tengahnya juga merupakan titik latis. Titik latis yaitu titik dengan komponen absis dan ordinat berupa bilangan bulat.

Dengan mudah, kita dapat membuktikan pernyataan diatas menggunakan prinsip rumah merpati. Setiap bilangan bulat memiliki dua kemungkinan paritas, yaitu genap atau ganjil. Rerata dari dua bilangan bulat akan bulat jika paritasnya sama. Sifat inilah yang dapat kita manfaatkan pada prinsip rumah merpati kali ini. Setiap titik latis pada bidang dua dimensi memiliki salah satu dari pasangan paritas berikut: (genap, genap), (ganjil, ganjil), (genap, ganjil), atau (ganjil, genap). Menurut prinsip rumah merpati, jika kita memilih 5 titik latis, maka akan kita dapatkan dua dengan pasangan paritas yang sama. Kesamaan pasangan paritas tersebut membuat reratanya merupakan bilangan bulat sehingga titik tengahnya merupakan titik latis juga. Hal yang sama berlaku pada bidang tiga dimensi dimana terdapat dua titik dengan titik tengah berupa titik latis dari sembilan titik latis yang dipilih sebelumnya.

Berikutnya, prinsip rumah merpati dapat digunakan dalam membahas jarak antar titik dengan memanfaatkan prinsip 4 dan *averaging principle* pada bagian pembahasan. Kita simak contoh persoalan berikut:

Jika kita memilih 5 titik secara acak dari dalam suatu persegi dengan panjang sisi 2cm, maka terdapat dua titik dengan jarak kurang dari atau sama dengan $\sqrt{2}$ cm. Persoalan tersebut dapat dibuktikan dengan ilustrasi sebagai berikut

Kita bagi persegi tersebut kedalam empat wilayah persegi kecil dengan panjang 1cm. Dalam menempatkan empat titik pertama, haruslah kita menempatkannya pada persegi kecil yang berbeda karena jarak maksimum yang mungkin dari dua titik pada persegi dengan panjang sisi 1 cm adalah $\sqrt{2}$ cm, yaitu panjang diagonalnya. Oleh karena itu, saat kita hendak menempatkan titik kelima, sebut saja P5, P5 tersebut terpaksa diletakkan pada salah satu dari persegi yang sudah ditempati satu titik. Dengan demikian, jarak P5 dengan titik yang berada pada satu persegi kecil yang sama dengannya haruslah lebih kecil sama dengan $\sqrt{2}$ cm. Jadi, kita telah mendapatkan dua titik tersebut dalam keadaan apapun. Ilustrasi pada gambar 3.1 memperlihatkan bahwa dua titik tersebut adalah P1 dan P5 yang berada di wilayah persegi kecil yang sama.



Gambar 3.1 Ilustrasi persoalan jarak maksimum antar titik

Ilustrasi diatas merupakan cara kita dalam membuat rumah merpati sendiri dalam sebuah bangun geometri, dalam hal ini adalah persegi. Argumen serupa tentunya dapat membuktikan contoh persoalan-persoalan seragam sebagai berikut:

1. Dipilih lima titik dari suatu segitiga sama sisi dengan panjang 1, bisa kita dapatkan dua titik dengan jarak tidak melebihi $\frac{1}{2}$.
2. Pada enam titik dari suatu persegi panjang berukuran 3×4 , ada dua titik dengan jarak tidak melebihi $\sqrt{5}$.

Penyelesaian untuk kedua contoh tambahan diatas diserahkan kepada pembaca.

C. Penggunaan dalam Objek Teori Graf

Kita akhirnya sampai pada kaitan prinsip rumah merpati dengan teori graf. Konsep rumah merpati ini dapat dimanfaatkan dalam hal pewarnaan sisi pada graf. Prinsip ini sederhananya dapat menentukan eksistensi suatu upagraf berupa graf komplet dengan satu warna (monochrome). Ketentuan tersebut dijabarkan dalam Teorema Ramsey.

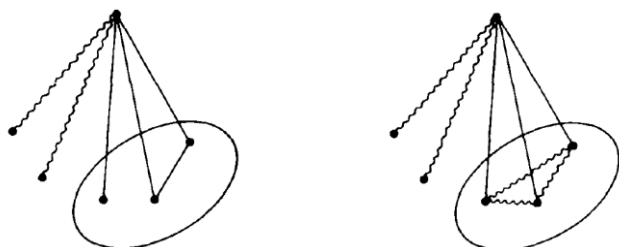
Prinsip umum dari Teorema Ramsey ini dituliskan dalam persoalan sederhana sebagai berikut

Dari keenam orang berbeda, bisa kita dapatkan sekelompok tiga orang yang saling mengenal atau saling tidak mengenal.

Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita modelkan keenam orang sebagai enam titik pada suatu graf. Untuk hubungan antar orang, analogikan hubungan saling kenal dengan sisi berwarna merah dan hubungan saling tidak kenal dengan sisi berwarna biru. Hubungan semua orang pun dapat diperlihatkan dalam suatu K_6 .

Pandang salah satu titik, misalkan P1. P1 ini memiliki 5 sisi berdasarkan hubungannya dengan titik-titik lainnya. Menurut prinsip rumah merpati, paling sedikit terdapat tiga sisi dengan warna sama, katakanlah merah. Berikutnya, pandang ketiga sisi dengan warna sama tersebut. Misalkan titik-titik yang dihubungkan bersama P1 tersebut adalah P2, P3, dan P4. Jika semua sisi (P2, P3), (P2, P4), dan (P3, P4)

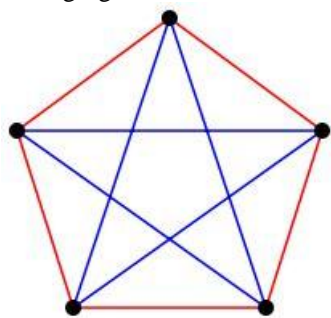
tidak berwarna merah maka ketiga sisi tersebut membentuk membentuk segitiga monokromatik dengan warna biru. Namun, jika salah satunya berwarna merah, kita akan mendapatkan sebuah segitiga monokromatik berwarna merah. Ilustrasi tersebut digambarkan pada gambar 3.2 berikut



Gambar 3.2 Penentuan salah satu dari segitiga monokromatik pada K_6 pada kedua kasus

Ilustrasi serupa berlaku dalam membuktikan bahwa diantara 17 mahasiswa yang saling membicarakan salah satu dari tiga topik berbeda, kita bisa mendapatkan tiga mahasiswa yang saling membicarakan topik yang sama. Hal ini dibuktikan menggunakan pendekatan yang sama, hanya saja kita memanfaatkan prinsip rumah merpati sekali lagi disaat meninjau salah satu titik.

Berikutnya, akan diperkenalkan bilangan Ramsey yang dinotasikan dengan $R(m,n)$ yaitu banyaknya titik minimum pada suatu graf sehingga kita dapat menemukan salah satu dari K_m dan K_n yang monokromatik. Pada kedua permasalahan di atas, diperlihatkan $R(3,3)=6$ dan $R(3,3,3)=17$. Dapat dibuktikan juga bahwa $R(3,3) \neq 5$ karena kita dapat menemukan pewarnaan K_5 oleh dua warna tanpa kita mendapatkan segitiga monokromatik



Gambar 3.3 Salah satu pewarnaan K_5 tanpa kita mendapatkan segitiga monokromatik

kita juga dapat menentukan nilai dari $R(2,n)$ dengan argument bahwa $R(2,n) \leq n$ karena pada K_n dengan dua warna, kita bisa mendapatkan salah satu sisi dengan warna berbeda dari sisi lainnya (K_2) atau semua sisi pada K_n berwarna sama dan $R(2,n) > n-1$ karena jika kita mewarnai semua sisi K_{n-1} dengan warna sama, kita tidak akan mendapatkan K_2 atau K_n yang monokromatik. Dengan cara yang sama, dapat juga dibuktikan bahwa $R(m,n)=R(n,m)$.

Hingga saat ini, memang belum dapat ditentukan rumus baku dalam menentukan nilai pasti dari $R(m,n)$ untuk nilai

m dan n yang sangat besar. Hanya saja, tetap dapat ditentukan batasan terhadap nilai tersebut melalui induksi matematika.

Batasan tersebut adalah $R(m,n) \leq R(m,n-1) + R(m-1,n)$. Kita akan menentukan eksistensi nilai $R(m,n)$ dengan menentukan batas atasnya. Dengan induksi, kita tahu bahwa $R(m,n-1)$ dan $R(m-1,n)$ ada. Lalu, kita perhatikan suatu graf lengkap dengan jumlah titik $R(m,n-1)+R(m-1,n)$. Jika kita mengambil titik v dan membagi sisanya kedalam himpunan M dan N dengan ketentuan: titik w anggota M jika (v,w) berwarna merah dan anggota N jika (v,w) berwarna biru. Karena graf tersebut memiliki $|M|+|N|+1$ titik, maka salah satu dari pernyataan berikut benar: $|M| \geq R(m-1,n)$ atau $|N| \geq R(m,n-1)$. Jika graf pada himpunan M memuat K_{m-1} berwarna merah, maka graf semula juga mengandungnya. Lalu, jika M memuat K_{m-1} berwarna biru, graf semula pun memuatnya. Untuk kasus lain, argumen analog bisa diterapkan.

Dalam perkembangannya, sudah ditemukan nilai dan batasan bagi $R(m,n)$ untuk angka-angka kecil seperti diperlihatkan pada tabel 3.1. Walaupun sudah menggunakan teori lain diluar pembahasan ini, tetap saja prinsip rumah merpati ini menjadi dasar dalam penentuan nilai dari bilangan Ramsey.

Tabel 3.1 Bilangan Ramsey untuk beberapa nilai

m, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36
4	1	4	9	18	25	35-41	49-61	56-84	73-115
5	1	5	14	25	43-49	58-87	80-143	101-216	126-316
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165	113-298	132-495	169-780
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205-540	217-103	241-171
8	1	8	28	56-84	101-216	132-495	217-103	282-187	317-358
9	1	9	36	73-115	126-316	169-780	241-171	317-358	565-658

Untuk bilangan Ramsey dengan lebih dari dua parameter, berarti terdapat lebih dari dua warna dalam pewarnaan graf lengkapnya. Seperti $R(3,3,3)=17$ yang permulaannya dapat ditentukan melalui prinsip rumah

merpati. Namun, hal ini tidak akan dibahas atas pertimbangan batasan pembahasan.

IV. Kesimpulan

Dari uraian sebelumnya tentang penerapan prinsip rumah merpati, kita dapat menarik beberapa kesimpulan, diantaranya adalah:

1. Prinsip rumah merpati adalah suatu konsep matematika sederhana yang dapat menyelesaikan permasalahan yang terkadang rumit dan mengejutkan.
2. Prinsip rumah merpati dapat digunakan dalam menjelaskan beberapa aspek matematika lainnya seperti teori bilangan, geometri, dan teori graf.
3. Penerapan prinsip rumah merpati sebagai dasar dari teorema Ramsey telah membantu dalam perkembangan matematika diskrit.

V. Referensi

- [1] Brualdi, Richard A., *Introductory Combinatorics Fourth Edition*. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2004. hal 26-37
- [2] Bryant, Victor, *Aspect of Combinatorics*. New York: Cambridge University Press, 1993. hal 202-203
- [3] Engel, Arthur, *Problem Solving Strategies*. New York: Springer, 1998. hal 62-63
- [4] Petrovic, Nikola, *The IMO Compendium*. New York: Springer, 2006. hal 341
- [5] "Ramsey's Theorem", URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey%27s_theorem, diakses tanggal 11 Desember 2011, 23.45 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Desember 2011



Aditya Agung Putra/13510010