Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-2 IF2091 Struktur Diskrit (3 SKS): Induksi Matematika dan Teori Bilangan
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 5 Oktober 2011
Waktu: 75 menit

1. Misalkan proposisi *p*(*n*) menyatakan bahwa untuk setiap bilangan asli *n*,
$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$ bernilai benar. Buktikan kebenaran proposisi ini dengan menggunakan induksi matematika .

Jawaban:

(i) *Basis Induksi* : p(1) benar, karena untuk n=1 kita peroleh

$$(-1)^{1-1}1^2 = \frac{(-1)^{1-1}1(1+1)}{2} = 1$$

(ii) *Langkah induksi* : Misalkan p(n) benar dengan mengasumsikan

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa p(n+1) juga benar, yaitu

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^{n+1-1}(n+1)^2 = \frac{(-1)^{n+1-1}(n+1)(n+1+1)}{2}$$

Untuk membuktikan ini ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}
&1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^{n+1-1}(n+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1-1}(n+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} + (-1)^1(-1)^{n-1}(n+1)(n+1) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} - (-1)^{n-1}(n+1)(n+1) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} - \frac{2(-1)^{n-1}(n+1)(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(-1)^{n-1}(n+1)}{2} - \frac{2(n+1)(-1)^{n-1}(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n-2(n+1))(-1)^{n-1}(n+1)}{2} \\
&= \frac{(-n-1-1)(-1)^{n-1}(n+1)}{2} \\
&= \frac{(-1)(-n-1-1)(-1)(-1)^{n-1}(n+1)}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1-1}(n+1)(n+1+1)}{2}
\end{aligned}$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan asli n, terbukti bahwa
$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$

(15)

2. Misalkan ada sejumlah n ganjil orang ($n > 1$) yang berkumpul di sebuah lapangan, di sini mereka masing-masing memegang sebuah kue *pie* yang siap dilemparkan ke orang lain yang paling dekat dengannya. Jarak antar orang berbeda (tidak ada jarak antar pasangan yang sama). Jika semua orang harus melempar kue dengan simultan(bersamaan), buktikan bahwa minimal ada satu orang yang tidak terkena lemparan kue. (15)

<u>Jawaban</u>:

1. Basis,
   Untuk n=3,ada tiga orang A,B dan C maka akan ada 1 pasang orang dengan jarak terpendek,sebut saja sehingga pasangan tersebut A dan B saling melempar kue satu sama lain, akibatnya C tidak akan kena lemparan kue, C akan melempar salah satu dari A atau B, tergantung yang paling dekat dengan C.
2. Induksi,
   Karena n ganjil, misalkan untuk 2k+1 orang minimal ada yang tidak kena lemparan, akan dibuktikan dengan induksi untuk 2(k+1)+1=2k+3 orang juga terdapat minimal 1 orang yang tidak kena lemparan pie.
   Bukti :
   Misalkan di antara 2k+3 orang, A dan B adalah pasangan terdekat(jadi mereka melempar satu sama lain), di sini akan dibagi menjadi dua kasus :
   a. Jika diantara 2k+1 sisa orang ada minimal satu yang melempar pie ke A atau B, maka akan ada maksimal (2k+3)-3 pie yang dilempar ke 2k+1 orang , artinya ada 2k pie yang dilempar ke 2k+1 orang,sehingga ada 1 orang yang tidak terlempar
   b. Jika diantara 2k+1 sisa orang tidak ada yang melempar ke A dan B, maka masalah selesai(dari induksi 2k+1).

   QED.

3. Perlihatkan bahwa jika $a - c | ab + cd$ maka $a - c | ad + bc$ (12,5)

<u>Jawaban</u>:

Perhatikan bahwa :

$(ab + cd) - (ad + bc) = a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d)$

Karena $(a - c)|(a - c)(b - d)$ maka $(a - c)|(ab + cd) - (ad + bc)$

Karena $(a - c)|(ab + cd) - (ad + bc)$ dan $a - c|ab + cd$, maka $a - c|ad + bc$

4. Bila diketahui kode ISBN dari suatu buku adalah : 0-9716-62P0-7, dengan *P* adalah sebuah bilangan, tentukan *P* pada ISBN tersebut. (15)

<u>Jawaban</u>:

Diketahui karakter uji ISBN = 8. Ini berarti

$$\sum_{i=1}^{9} ix_i mod\ 11 = 8$$

Mula-mula hitung

$$\sum_{i=1}^{9} ix_i = 1.0 + 2.1 + 3.3 + 4.1 + 5.5 + 6.9 + 7.p + 8.1 + 9.8 = 174 + 7p$$

Jadi,

(174 + 7p) mod 11 = 8

atau

p = $\frac{11k+8-174}{7} = \frac{11k-166}{7}$

Nilai-nilaik k yang menghasilkan p bulat adalah k = …,-4, 3, 10, 17, 24, …
Agar ISBN sah maka p harus memenuhi $0 \le p \le 9$. Untuk k = 17, didapatkan p =3

5. Dengan **TIDAK** menggunakan Induksi Matematika**,** buktikan bahwa $8|(7^{2n+1}+1)$. (12,5)

Jawaban:

Perhatikan bahwa :

$(7^{2n+1}+1) = 7x(7^2)^n + 1$

Karena $7^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$, maka $7x(7^2)^n + 1 \ \equiv 7x1 + 1 \ (mod\ 8) \equiv 8 \ (mod\ 8) \equiv 0 \ (mod\ 8)$

Jadi, terbukti bahwa $8|(7^{2n+1}+1)$. **Q.E.D**

6. Tentukan *x* dan *y* bilangan bulat yang memenuhi persamaan garis 312*x* + 70*y* = 2, lalu hitunglah nilai dari: *y* mod *x* (20)

Jawaban:

Dengan menggunakan algoritma Euclid, ditemukan bahwa :

312 = 4.70 + 32 (i)
70 = 2.32 + 6 (ii)
32 = 5.6 + 2 (iii)
6 = 3.2 + 0 (iv)
Persamaan (iii) dapat dituliskan menjadi : 2 = 32 – 5.6 (v)
Persamaan (ii) dapat dituliskan menjadi : 6 = 70 – 2.32 (vi)
Sulihkan persamaan (vi) ke persamaan (v) :
2 = 32 – 5.(70 – 2.32)
2 = 32 – 5.70 + 10.32
2 = 11.32 – 5.70 (vii)
Persamaan (i) dapat dituliskan menjadi : 32 = 312 – 4.70 (viii)

Sulihkan persamaan (viii) ke persamaan (vii) :
2 = 11.(312 – 4.70) – 5.70
2 = 11.312 – 44.70 – 5.70
2 = 11.312 – 49.70 (ix)

Dari persamaan (ix) diketahui *x* dan *y* yang memenuhi adalah
x = 11 dan *y* = -49, sehingga *y* mod *x* = -49 mod 11 = 6

7. Hitunglah nilai dari $5^{2003} mod\ 7$ dan $5^{2003}\ mod\ 11$ dengan menggunakan Fermat's Little Theorem. (10)

Jawaban:

Di sini akan digunakan Fermat's Little Theorem untuk pembuktian

Jawab :

a. Dari Fermat's Little Theorem didapat $5^6 = 1\ mod\ 7$,
   Sehingga $5^{2003} mod\ 7 = 5^{6*333+5} mod\ 7 = 5^5 mod\ 7 = 3125\ mod\ 7 = 3\ mod\ 7$
b. Dari Fermat's Little Theorem didapat $5^{10} = 1\ mod\ 11$,

Sehingga $5^{2003} mod\ 11 = 5^{10*200+3} mod\ 11 = 5^3 mod\ 11 = 125\ mod\ 11 = 4\ mod\ 11$

Jawaban setiap soal ditulis di bawah ini. Gunakan halaman dibalik atau kertas tambahan jika diperlukan.