

Penyelesaian *Five Coins Puzzle* dan Penghitungan *Worst-case Time* dengan Pembuatan Pohon Keputusan

Lio Franklyn Kemit (13509053)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13509053@std.stei.ib.ac.id

Abstrak—*Five Coins Puzzle* adalah sebuah permasalahan yang berusaha untuk menebak satu koin palsu diantara lima keeping koin. Penyelesaian masalah ini dapat dilakukan dengan menggunakan timbangan untuk mengukur berat dari dua buah koin. Kemudian dari hasil timbangan antara dua koin, kita membangun sebuah pohon keputusan yang dapat digunakan untuk menentukan koin mana yang palsu. Kemudian menentukan *worst-case time* untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Kata Kunci—koin palsu, pohon keputusan, *worst case time*



I. PENDAHULUAN

Five coins puzzle adalah sebuah permasalahan yang muncul dari lima buah koin. Diantara kelima koin tersebut, ada satu buah koin palsu. Empat koin yang lain memiliki berat yang sama satu dengan yang lainnya. Namun koin palsu tersebut memiliki berat yang lebih atau kurang jika dibandingkan dengan koin yang lain.

Untuk memeriksa koin yang mana diantara kelima koin tersebut yang palsu, diberikan sebuah timbangan yang dapat menimbang berat hanya antara dua buah koin. Dengan melakukan penimbangan antar koin, diharapkan penimbang dapat menentukan koin mana yang palsu dan apakah koin tersebut adalah koin yang lebih berat dari koin yang lain atau koin tersebut adalah koin yang lebih ringan dari koin lainnya.

Dalam penyelesaian masalah ini, digunakan pohon keputusan yang kemudian ditelusuri sesuai dengan kasus penimbangan yang dilakukan untuk mendapatkan hasil yang diharapkan dalam permasalahan, yaitu koin mana diantara lima koin yang merupakan koin palsu.

II. DASAR TEORI

A. Pohon

Pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit.

Menurut teorma, misallkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n . Maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen :

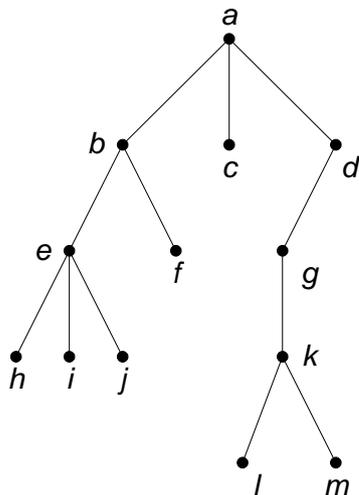
1. G adalah pohon.
2. Setiap pasan simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal.
3. G terhubung memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
4. G tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
5. G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.
6. G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan.

Teorema di atas dapat juga disebut definisi dari sebuah pohon.

B. Pohon Berakar

Pohon berakar adalah pohon yang sebuah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah menjauh dari akar.

Berikut adalah contoh sebuah pohon berakar :



Dalam pohon berakar, terdapat beberapa terminology yang digunakan untuk mendeskripsikan pohon berakar, antara lain :

1. Anak dan Orangtua
2. Lintasan
3. Keturunan dan Leluhur
4. Saudara Kandung
5. Upapohon
6. Derajat
7. Daun
8. Simpul Dalam
9. Tingkat atau kedalaman

C. Pohon Keputusan

Pohon keputusan adalah pohon yang dibangun berdasarkan pilihan-pilihan yang ditawarkan untuk menyelesaikan suatu permasalahan.

Pohon keputusan memiliki beberapa fungsi, yaitu :

1. Pohon keputusan dapat digunakan untuk membuat suatu pemodelan persoalan yang terdiri dari serangkaian keputusan yang mengarah ke solusi dari permasalahan tersebut.
2. Pohon keputusan dapat digunakan untuk menentukan suatu algoritma.
3. Pohon keputusan dapat digunakan untuk menetapkan suatu batas bawah untuk *worst-case time* untuk beberapa masalah.

Beberapa aplikasi penggunaan pohon keputusan dalam penyelesaian masalah adalah peluang kemunculan suatu kejadian, biaya sumber daya, permasalahan sorting, puzzle koin, dan beberapa contoh lainnya.

Pohon keputusan dibangun dari simpul dan percabangan layaknya sebuah pohon biasa. Beberapa cabang dapat memperpanjang dari satu titik, yang mewakili beberapa alternatif pilihan yang berbeda atau hasil. Ada dua jenis percabangan, yaitu :

1. Percabangan keputusan merupakan cabang dimana pengambil keputusan dapat memilih

hasilnya

2. Percabangan kesempatan merupakan cabang dimana hasilnya dikendalikan secara kebetulan atau kekuatan eksternal.

Sebuah pohon keputusan berasal dari titik awal di salah satu ujung (biasanya di atas atau di samping kiri) melalui serangkaian cabang, atau node, sampai dua atau lebih hasil akhir yang tercapai pada akhir berlawanan. Setidaknya salah satu cabang mengarah ke percabangan keputusan atau percabangan kesempatan. Diagram dapat terus memisah membentuk cabang baru sebagai pilihan yang berbeda dan kemungkinan yang digambarkan. Setiap cabang yang dibentuk akan memberikan suatu hasil yang mungkin dari setiap kemungkinan yang muncul.

D. Worst-case Time

Dalam pembuatan suatu algoritma yang bersifat penanganan suatu kasus, terkadang terdapat perbedaan waktu dalam penyelesaian permasalahan tergantung kasus mana yang ditemui. Perbedaan waktu tersebut diakibatkan adanya perbedaan jalur yang ditempuh oleh sebuah data untuk mencapai hasil yang diinginkan. Namun, terdapat suatu nilai yang merupakan waktu maksimal dalam penanganan permasalahan. Waktu maksimal tersebut diperoleh dengan melakukan penelusuran kasus terburuk yang ditempuh. Waktu maksimal inilah yang disebut *worst-case time*.

Misalkan, dalam kasus algoritma untuk pencarian nilai maksimal dalam sebuah array. Untuk hasil tercepat adalah ditempuhnya kasus bahwa array kosong. Penelusuran kasus ini hanya membutuhkan waktu satu kasus. Untuk kasus terburuk, array tidak kosong dan nilai maksimum ditemukan. Kasus ini menghabiskan waktu 2 kasus. Sehingga algoritma ini mempunyai *worst-case time* sebesar dua.

III. PENYELESAIAN PUZZLE DENGAN POHON KEPUTUSAN

Diantara lima koin yang ada, terdapat satu buah koin yang palsu dimana koin tersebut lebih berat atau lebih ringan dari yang lain. Dengan membandingkan dua buah koin dengan menggunakan sebuah timbangan, kita dapat menentukan yang mana diantara kelima koin tersebut yang palsu.

Setiap koin akan diberi nama C1, C2, C3, C4, dan C5. Dalam pembuatan pohon keputusan, kita akan mempunyai sebuah kondisi penimbangan dan hasil penimbangan. Kondisi penimbangan merepresentasikan dua keeping koin yang sedang ditimbang dengan timbangan pada saat ini. Misalnya untuk kondisi koin awal, kita melakukan penimbangan terhadap koin C1 dan C2. Dimana kemudian dari kondisi penimbangan,

kita akan mempunyai hasil penimbangan. Misalkan ketika kita melakukan penimbangan antara koin C1 dan C2 dengan menempatkan koin C1 di lengan kiri timbangan dan koin C2 di lengan kanan timbangan, hasil penimbangan dari suatu kondisi penimbangan dapat direpresentasikan dengan tiga buah simbol. Tiga buah simbol tersebut adalah sebagai berikut :

1.  : berarti koin C1 lebih berat daripada koin C2 yang ditunjukkan dengan lengan kiri dari timbangan berada lebih rendah daripada lengan kanan dari timbangan.
2.  : berarti koin C1 lebih ringan daripada koin C2 yang ditunjukkan dengan lengan kanan lebih berat daripada lengan kiri dari timbangan.
3.  : berarti koin C1 sama berat dengan koin C2 yang ditunjukkan dengan kedua lengan timbangan membentuk sebuah garis horizontal.

Dengan begitu kita dapat membuat sebuah pohon keputusan dengan lebih dahulu membuat akar dari pohon keputusan dengan menganalisis kemungkinan-kemungkinan yang muncul ketika kita melakukan penimbangan terhadap satu keeping koin dengan satu keeping koin lainnya.

Misalnya pada akar pohon keputusan, kita melakukan perbandingan antara koin C1 dan C2 kita akan memperoleh tiga kemungkinan hasil penimbangan. Dari ketiga hasil penimbangan, kita dapat menentukan kemungkinan sifat dari koin C1 dan C2. Kita akan menganalisis ketiga kemungkinan hasil penimbangan.

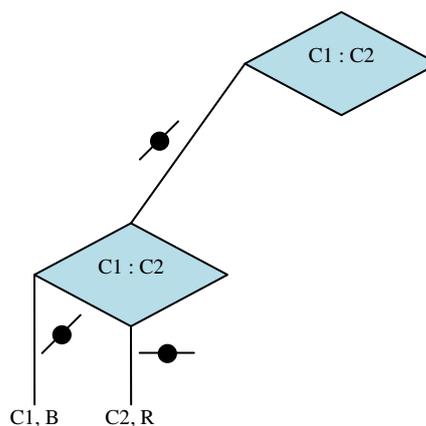
Hasil penimbangan yang mungkin adalah sebagai berikut :

Pertama, ketika hasil penimbangan menunjukkan simbol , kita tahu bahwa koin C1 lebih berat daripada koin C2, namun kita tidak dapat menentukan langsung apakah koin C1 atau koin C2 adalah koin palsu karena ada kemungkinan bahwa koin C1 adalah koin palsu yang dimaksud dengan sifat yang lebih berat daripada koin normal atau koin C2 adalah koin palsu yang dimaksud dengan sifat lebih ringan daripada koin normal. Untuk menentukan yang mana diantara dua kemungkinan tersebut yang benar, kita akan membandingkan salah satu koin, misalnya C1, dengan salah satu dari tiga koin lainnya, misalnya C5, yang sudah pasti dapat disimpulkan bahwa koin tersebut adalah koin dengan berat normal untuk kondisi ini.

Kemudian, koin C1 akan ditimbang dengan koin C5. Kemungkinan hasil penimbangan hanya ada 2 kemungkinan, yaitu  dan . Jika hasil penimbangan menunjukkan simbol  maka dapat diambil kesimpulan bahwa koin C1 yang dari hasil penimbangan sebelumnya menunjukkan bahwa koin tersebut kemungkinan koin palsu yang lebih berat daripada koin lainnya memang benar. Namun, jika hasil penimbangan menunjukkan

simbol  berarti, koin C2 yang diduga lebih ringan daripada koinnya lainnya memang benar karena dugaan bahwa koin C1 lebih berat ternyata sama berat dengan koin C5 yang berat ternyata salah dan menyisakan kemungkinan bahwa koin C2 koin palsu yang lebih ringan yang sudah dapat dipastikan benar.

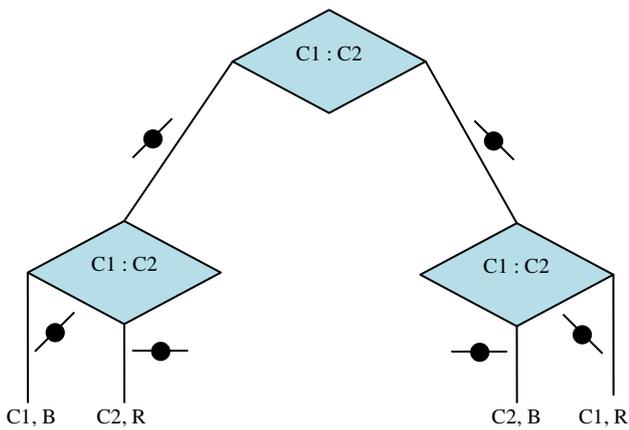
Maka dari kasus pengujian pertama dari kondisi awal, kita dapat membuat sebuah pohon keputusan yang menghasilkan kesimpulan koin C1 adalah koin palsu yang lebih berat (C1, B; B adalah berat) atau koin C2 adalah koin palsu yang lebih ringan (C2, R; R adalah ringan). Berikut adalah pohon keputusan untuk kondisi pertama dari kondisi penimbangan awal :



Kedua, ketika hasil penimbangan kondisi awal menunjukkan simbol , kita tahu bahwa koin C1 lebih ringan daripada koin C2. Namun, ada dua kemungkinan yaitu, koin C1 adalah koin palsu dengan sifat lebih ringan daripada koin lainnya atau koin C2 adalah koin palsu dengan sifat lebih berat daripada koin lainnya.

Kemudian untuk menentukan kebenaran salah satu dari dua kemungkinan tersebut, kita akan melakukan penimbangan salah satu koin, misalnya C1, dengan koin normal lainnya, misalnya C2. Jika hasil yang muncul adalah , berarti dapat disimpulkan bahwa koin C1 koin palsu yang lebih ringan (C1, L), sedangkan jika hasil penimbangan adalah , berarti dapat disimpulkan bahwa koin C2 adalah koin palsu yang lebih berat dari koin lainnya (C2, H).

Kemudian, kita dapat melengkapi pohon keputusan sebelumnya dengan keputusan yang kita bentuk, sebagai berikut :



Ketiga, ketika kita mendapatkan hasil timbangan untuk kondisi awal adalah \bullet , maka kita dapat memastikan bahwa koin C1 dan koin C2 adalah koin yang normal.

Ketika kita mendapatkan hasil ketiga, kita harus melakukan pengecekan terhadap ketiga koin lainnya.

Pengecekan pertama adalah koin C3 dengan koin C4. Hasil pengecekan kedua buah koin tersebut dapat dibagi menjadi tiga hasil.

Pertama, ketika hasil penimbangan adalah \bullet , kita dapat mengetahui bahwa salah satu diantara kedua koin tersebut palsu dan menyatakan kemungkinan antara koin C3 lebih berat atau koin C4 lebih ringan. Untuk menentukan kemungkinan mana yang benar, kita kembali menggunakan koin C5 yang memiliki berat normal. Kemudian salah satu koin, misalkan C3, kita timbang dengan koin C5 untuk menentukan koin mana yang palsu.

Penimbangan antara C3 dan C5 akan menghasilkan dua kemungkinan. Jika hasil penimbangan antara dua koin tersebut adalah \bullet , maka kita dapat mengambil kesimpulan bahwa koin yang palsu adalah koin C3 dengan sifat yang lebih berat daripada koin lainnya (C3, B). Sedangkan jika hasil penimbangan \bullet , kita dapat menyimpulkan bahwa koin yang palsu adalah koin C4 yang lebih ringan daripada koin lainnya (C4, R).

Kedua, ketika hasil penimbangan adalah \bullet , kita dapat mengetahui bahwa salah satu diantara kedua koin tersebut adalah koin palsu dan kemungkinan antara koin C3 lebih ringan atau koin C4 lebih berat dari koin lainnya. Untuk menentukan kemungkinan mana yang benar, kita kembali menggunakan koin C5 yang memiliki berat normal. Kemudian salah satu koin, misalkan C3, kita timbang dengan koin C5 untuk menentukan koin mana yang palsu.

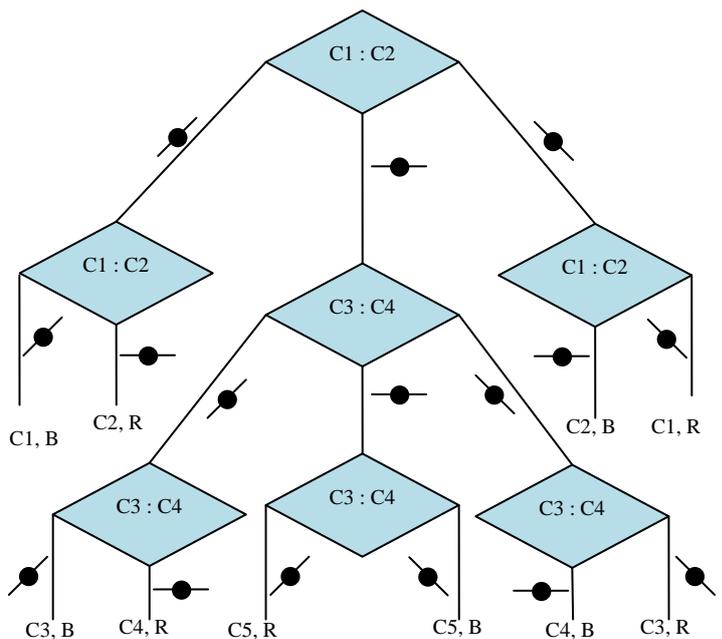
Penimbangan antara C3 dan C5 akan menghasilkan dua kemungkinan. Jika hasil penimbangan antara dua koin tersebut adalah \bullet , maka kita dapat mengambil kesimpulan bahwa koin yang palsu adalah koin C3 dengan sifat yang lebih ringan daripada koin lainnya (C3, R). Sedangkan jika hasil penimbangan \bullet , kita dapat menyimpulkan bahwa koin yang palsu adalah koin

C4 dengan sifat lebih berat daripada koin lainnya (C4, B).

Ketiga, ketika hasil penimbangan antara C3 dan C4 adalah \bullet , kita dapat memastikan bahwa koin C3 dan koin C4 bukan koin palsu, sehingga menyisakan koin C5. Namun kita tidak tahu apakah koin lima adalah koin palsu dengan sifat lebih berat daripada koin lainnya atau koin C5 adalah koin yang lebih ringan dengan koin lainnya. Untuk itu, kita akan melakukan penimbangan lagi antara koin C5 dengan koin lain yang normal, misalkan C1.

Dari hasil penimbangan antara koin C5 dan koin C1, kita dapat menentukan antara koin C5 lebih berat atau lebih ringan. Ketika hasil penimbangan \bullet , berarti koin C5 adalah koin palsu yang lebih ringan daripada koin lainnya (C5, R), sedangkan ketika hasil penimbangan \bullet , berarti koin C5 adalah koin palsu yang lebih berat daripada koin lainnya (C5, B).

Dari analisis di atas, kita dapat melengkapi pohon keputusan sehingga pohon tersebut menjadi lengkap dan dapat menyelesaikan permasalahan ini. Berikut adalah pohon keputusan untuk permasalahan ini :



Dari pohon keputusan tersebut, kita dapat memilih jalur kemungkinan koin mana yang palsu dan sifat palsu apa yang dimiliki koin tersebut dengan menelusuri pohon keputusan di atas sesuai dengan hasil penimbangan yang kita lakukan.

Pohon di atas, merupakan algoritma yang memiliki *worst-case time* sebanyak tiga untuk menyelesaikan permasalahan ini. Untuk menentukan *worst-case time*, kita cukup menghitung kedalaman dari pohon keputusan yang dibentuk dalam kasus ini, kedalaman pohon keputusan adalah tiga. *Worst-case time* bernilai tiga

maksudnya kita butuh maksimal 3 penimbangan untuk menyelesaikan permasalahan ini untuk kasus terburuk dalam pencarian koin palsu.

Dengan membuat sebuah pohon keputusan, kita dapat memastikan bahwa algoritma untuk pohon keputusan tersebut adalah algoritma yang paling optimal. Dan kita dapat memastikan tidak ada algoritma lain yang dapat menyelesaikan kasus ini dengan *worst-case time* yang lebih kecil dari tiga.

V. KESIMPULAN

Dalam penyelesaian suatu masalah yang berupa pilihan, kita dapat membuat sebuah pohon keputusan yang dapat membantu kita dalam pembuatan algoritma penanganan masalah tersebut. Dengan sebuah pohon keputusan, kita dapat menghitung *worst-case time* dari sebuah algoritma sesuai dengan kedalaman pohon tersebut.

Membuat pohon keputusan juga salah satu cara membuat sebuah algoritma yang mangkus karena dengan membuat pohon keputusan, kita dapat menjamin bahwa suatu algoritma dapat menyelesaikan permasalahan paling cepat dan optimal.

REFERENCES

- [1] Richard Johnsonbaugh, "Discrete Mathematics", 6th ed. ,Pearson Prentice Hall: United State of America, 2005, ch 9.
- [2] Rinaldi Munir, "Matematika Diskrit", 3thed, Informatika Bandung : Bandung, 2007, ch 9.
- [3] <http://www.referenceforbusiness.com/encyclopedia/Cos-Des/Decision-Tree.html>, *Decision Tree*, diakses pada tanggal 16 Desember 2010

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2010

ttd

Lio Franklyn Kemit (13509053)