

# Pembuktian Formula Euler

Muhammad Hilman Beyri (13509047)  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13509047@std.itb.ac.id

**Abstract**—Makalah ini membahas teorema dasar dalam teori graf yaitu *Euler's formula* yang berasal dari kasus khusus *Euler's characteristic*. *Euler's characteristic* adalah *topological property*, sebuah bilangan yang mendeskripsikan bentuk atau struktur *topological's space* yang dilambangkan dengan  $\chi$ . Karakteristik Euler aslinya didefinisikan untuk polyhedra (bentuk jamak dari polyhedron). Formula Euler sendiri didefinisikan untuk kasus khusus polyhedron yaitu *convex polyhedron*. Berbagai macam pembuktian formula ini dengan beberapa pembuktian salah (termasuk pembuktian oleh Euler sendiri) dan beberapa pembuktian benar menjadikan pembuktian formula Euler topik menarik dalam bahasan graf.

**Index Terms**—Formula Euler, bukti, graf, polyhedron.

## I. INTRODUCTION

Formula Euler adalah salah satu teori paling dasar dari graf. Formula ini ditemukan pertama kali oleh Euler pada tahun 1750 untuk mendeskripsikan polyhedra. Sisi (*edges*), wilayah (*faces*), dan simpul (*vertices*) secara intuitif adalah ciri-ciri dari suatu polyhedron. Akan tetapi hal ini belum bisa dijelaskan secara ringkas sampai sekitar tahun 1700. Leonhard Euler, menyadari kekurangan ini, memulai penelitian tentang polyhedral umum, dan hubungan elemen-elemennya.

Uniknya, Euler tidak bisa membuktikan formula buatannya sendiri secara absolut. Akan tetapi formula Euler menunjukkan hasil yang benar untuk graf planar. Sejak saat itu berbagai ilmuwan mencoba untuk membuktikan formula Euler. Pembuktian-pembuktiannya sendiri beragam seperti pendekatan induksi matematis, menggunakan logika graf planar, pendekatan dengan kurva Jordan (*Jordan's Curve*), atau pendekatan dengan muatan listrik (*electrical charge*). Berbagai macam pembuktian-pembuktian ini, dengan menggunakan beragam sudut pandang, membuat formula Euler adalah topik menarik untuk dipelajari. Terdapat minimal 19 pembuktian shahih menurut situs <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>.

Pembuktian formula Euler ini sendiri tidak disajikan di diktat kuliah IF2091 sehingga penulis mencari tahu pembuktian formula tersebut untuk melengkapi ilmu penulis. Tidak semua pembuktian-pembuktian formula Euler akan ditunjukkan dalam makalah ini, hanya beberapa pembuktian-pembuktian yang menggunakan ilmu yang sudah dipelajari di kuliah dan juga sedikit

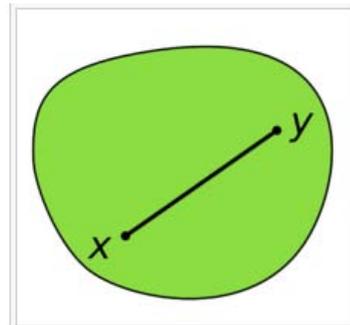
penambahan ilmu yang belum dipelajari saat kuliah.

## II. DASAR-DASAR TEORI

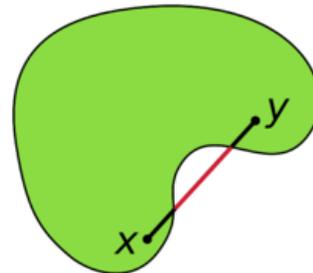
### A. Polyhedron

Polyhedron yang digunakan di makalah ini adalah definisi yang digunakan P. Cromwell dalam bukunya yang berjudul "Polyhedra". Polyhedron sendiri adalah istilah untuk polytope dalam dimensi tiga sementara polygon adalah untuk dimensi dua. Polytope adalah suatu benda geometris yang mempunyai sisi bidang datar.

Convex polytope atau convex polyhedron adalah kasus khusus dari polytope yang mempunyai sifat tambahan yaitu polytope adalah himpunan titik-titik *convex (convex set)* dalam ruang dimensi  $n \in \mathbf{R}^n$ . Dalam ruang Euclid, suatu objek dikatakan *convex* jika untuk setiap pasang titik di dalam objek tersebut, setiap titik pada garis yang menghubungkan kedua titik tersebut juga berada di dalam objek tersebut. Sebagai contohnya, kubus adalah *convex*, tetapi apapun yang berlubang di tengah atau bengkok, misalkan bentuk bulan sabit bukan *convex*.



Gambar 2.1 Contoh objek convex

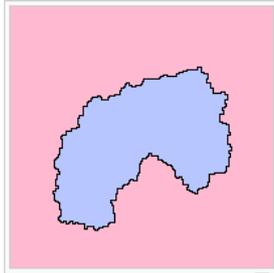


Gambar 2.2 Contoh objek bukan convex

### B. Kurva Jordan

Kurva Jordan adalah suatu kurva yang berupa

cincin(loop) kontinu yang tidak memotong dirinya sendiri(non-self-intersecting). Teorema kurva Jordan menyatakan bahwa setiap kurva Jordan membagi bidang menjadi wilayah “interior” yang dibatasi oleh kurva tersebut dan wilayah “exterior” yang memuat titik-titik lainnya sehingga suatu garis yang menghubungkan kedua wilayah tersebut memotong kurva tersebut pada daerah tertentu. Walaupun secara intuitif, pernyataan ini nampak jelas tetapi ternyata pembuktiannya relatif susah.



**Gambar 2.1 Ilustrasi kurva Jordan**

### C. Graf dan Pohon

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

“Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V,E)$  yang dalam hal ini:  $V$  = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul(vertices atau node) =  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E$  = himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul =  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  atau dapat ditulis singkat notasi  $G = (V,E)$ .”[1]

Graf dual  $G^*$  didapatkan dari graf planar  $G$  yang direpresentasikan sebagai graf bidang. Graf bidang sendiri adalah graf planar yang digambarkan tanpa sisi-sisi yang berpotongan[1]. Untuk mendapatkan graf dual yang secara geometri adalah dual dari graf planar tersebut adalah dengan cara sebagai berikut:

1. Pada setiap wilayah atau muka(face)  $f$  di  $G$ , buatlah sebuah simpul  $v^*$  yang merupakan sebuah simpul untuk  $G^*$
2. Untuk setiap sisi  $e$  di  $G$ , tariklah sisi  $e^*$ (yang menjadi sisi untuk  $G^*$ ) yang memotong sisi  $e$  tersebut. Sisi  $e^*$  menghubungkan dua buah simpul  $v_1^*$  dan  $v_2^*$  (simpul-simpul di  $G^*$ ) yang berada di dalam muka  $f_1$  dan  $f_2$ . Yang dipisahkan oleh sisi  $e$  di  $G$ . Untuk sisi  $e$  yang salah satu simpulnya merupakan simpul berderajat satu(jadi sisi  $e$  seluruhnya terdapat dalam sebuah muka), maka sisi  $e^*$  adalah berupa sisi gelang[1].

Pohon adalah kasus khusus graf. Definisi pohon adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit(asiklik)[1]. Pohon merentang adalah pohon yang didapatkan dari suatu graf dengan cara memutus sisi-sisi dari graf tersebut sampai tidak ada lagi sirkuit pada graf tersebut. Untuk setiap graf terhubung mempunyai paling sedikit satu buah pohon merentang[1].

### D. Formula Euler

Euler menekankan lima komponen penting dari suatu polyhedron dalam usaha untuk mencari hubungan diantara mereka. Lima komponen ini adalah jumlah

simpul( $v$ ), jumlah wilayah( $f$ ), dan jumlah sisi( $e$ ). Dalam tulisannya yang berjudul *proof of some of the properties of solid bodies enclosed by planes*, ia mencoba membuktikan  $F-E+V = 2$  dan formula lainnya yang belum ia buktikan untuk convex polyhedron. Walaupun bukti yang ia tawarkan dalam tulisannya itu sekilas meyakinkan tetapi ternyata ada *counter-example* yang membuat bukti tersebut salah. Bukti orisinal Euler dalam tulisannya akan dibahas di bab III.

### E. Induksi Matematik

Induksi Matematik adalah suatu metode pembuktian untuk pernyataan perihal bilangan bulat dalam matematika. Salah satu prinsip induksi matematik adalah prinsip induksi yang dirampatkan.

Prinsip induksi yang dirampatkan menyatakan bahwa :

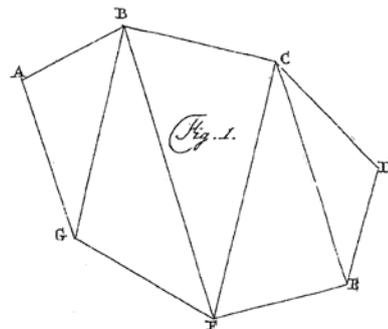
“misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ . Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:  $p(n_0)$  benar dan untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ , jika  $p(n)$  benar maka  $p(n+1)$  juga benar”[1].

## III. PEMBUKTIAN FORMULA EULER

### A. Bukti Orisinal Euler

Euler memulai pembuktian formula  $F-E+V = 2$  dengan mendefinisikan *solid bodies* sebagai “yang tertutup oleh bidang” atau dalam istilah sekarang convex polyhedron yang berarti bahwa bola tidak termasuk definisi *solid bodies* yang ia maksud.

Pertama-tama, Euler mendemonstrasikan bagaimana membuktikan sesuatu dengan suatu cara reduksi yang mirip dengan prinsip induksi matematik sekarang. Ia mendemonstrasikannya pertama kali untuk dimensi dua, untuk menunjukkan sudut dalam suatu polygon dengan  $A$  sudut berjumlah  $(2A-4)*90$  derajat. Andaikan ada suatu polygon seperti gambar 3.1 yang secara implisit diasumsikan convex. Kemudian Euler membagi-bagi polygon tersebut sehingga terbentuk segitiga-segitiga dengan cara menggambarkan garis diagonal GB, BF, FC, CE.



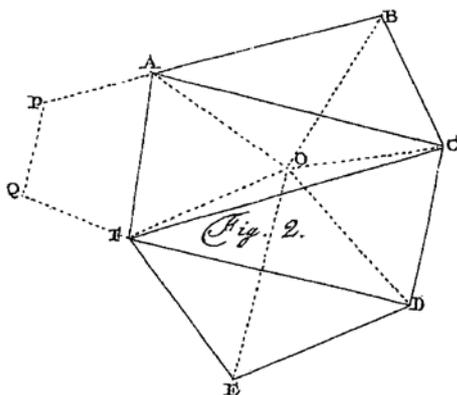
**Gambar 3.1 Poligon triangulasi**

Euler kemudian mengatakan dengan menghilangkan segitiga CDE akan menghasilkan polygon baru dengan  $A$

1 sudut, dan jumlah sudut berkurang sebesar 180 derajat. Pada akhirnya setelah sejumlah  $n$  langkah, kita mendapatkan  $A-n = 3$  dan tersisa segitiga  $ABG$ , dengan jumlah sudutnya adalah 180 derajat. Sehingga jumlah sudut polygon orisinalnya adalah  $(2n+2)*90$  derajat atau  $(2A-4)*90$  derajat.

Selanjutnya Euler mencari analogi dimensi tiga untuk *triangulation* yang ia gunakan untuk dimensi dua. Tetapi daripada membentuk piramid-piramid dengan alas piramid tersebut sebagai wilayah dari orisinal polyhedron, ia mencoba pendekatan pemotongan simpul. Ia membuat lemma :

“dalil 1 : Andaikan terdapat suatu benda solid yang ditutup oleh bidang-bidang, maka jika suatu sudut benda tersebut dipotong, pada benda solid yang tersisa, jumlah sudutnya berkurang satu.”

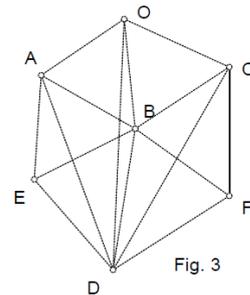


Gambar 3.2 Convex Polyhedron

Tujuan Euler, diilustrasikan pada gambar 3.2, adalah menghilangkan simpul O. Simpul O terhubung dengan simpul A, B, C, D, E, F. Sehingga, jika ia memotong simpul O, ia juga akan menghilangkan sejumlah piramida triangular,  $OABC$ ,  $OACF$ ,  $OCDF$ , dan  $ODEF$ . Perhatikan bahwa titik P dan Q tidak digunakan untuk dalil pertama. Euler menggunakan kembali gambar dua tersebut untuk dalil keduanya. Ia kemudian menunjukkan dengan cara memotong simpul O bersama dengan semua piramida triangularnya tetap menjaga sifat hubungan antara E, V, dan F. Ia menyimpulkan jika ia terus memotong simpul seperti ini, pada akhirnya ia akan mendapatkan hanya empat simpul yang tersisa yaitu sebuah piramida triangular. Karena  $F-E+V=2$  untuk piramida triangular, ia menyimpulkan  $F-E+V=2$  berlaku juga untuk polyhedron semula.

Euler berargumen seperti ini. Jika kita memotong simpul O, maka  $V$  berkurang satu. Andaikan  $k$  adalah jumlah wilayah yang bertemu di O. Maka  $k$  juga adalah jumlah sisi yang bertemu di O. Maka, polygon triangulasi memberikan  $k-2$  wilayah, dan triangulasi tersebut membutuhkan penambahan  $k-3$  sisi. Sehingga, memotong O berarti membuang satu simpul(O),  $k$  sisi(OA, OB, dst), dan  $k$  wilayah(OAB, OBC, OCD, dst) tetapi juga menambahkan  $k-2$  wilayah triangulasi dan  $k-3$  sisi yang digunakan untuk triangulasi tersebut. Sehingga pada

polyhedron baru,  $V$  digantikan dengan  $V-1$ ,  $E$  digantikan dengan  $E-k+(k-3)=E-3$ , dan  $F$  digantikan dengan  $F-k+(k-2)=F-2$  sehingga  $V-E+F$  digantikan dengan  $V-1-(E-3)+F-2=V-E+F$ , yaitu  $V-E+F$  tidak berubah. Sehingga,  $V-E+F=2$  untuk piramida triangular setelah semua reduksi, maka  $V-E+F=2$  juga untuk polygon semula.



Gambar 3.3 Counter-example dari bukti orisinal Euler

Sekilas bukti ini nampak benar, tetapi terdapat kesalahan serius dalam bukti yang ditawarkan Euler ini. Pemotongan suatu simpul tidak selalu menghasilkan convex polyhedron. Sehingga kita mungkin tidak dapat mengulangi proses yang disebutkan Euler diatas. Sebagai contohnya adalah gambar 3.3. Jika kita menghilangkan simpul O, maka terdapat dua polyhedron yang tersisa yaitu  $AEBD$  dan  $CFBD$ , yang bersisian pada  $BD$ . Euler tidak akan menerima objek ini sebagai polyhedron.

Polyhedra yang dihasilkan dari pemotongan simpul bisa jadi mempunyai sifat tak terduga lain yang membuat memperbaiki bukti ini menjadi lebih susah daripada yang kita harapkan, dan, walaupun bukti ini dapat diperbaiki, bukti yang ditawarkan oleh Euler ini tetap salah dan tidak lengkap. Akan tetapi, teorema ini tetap benar.

### B. Bukti Von Staudt

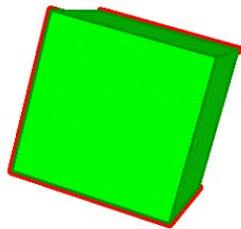
Von Staudt memulai pembuktian formula Euler dengan pendekatan pewarnaan simpul. Pilih satu simpul untuk diwarnai pada convex polyhedron, misalkan dengan warna merah, selanjutnya, dari simpul ini, cari simpul berikutnya yang belum diwarnai dan hubungkan simpul tersebut dan beri warna merah pada sisinya. Kemudian, di simpul yang baru, cari simpul berikutnya yang belum diwarnai dan hubungkan simpul tersebut dengan mewarnai sisinya. Lakukan proses ini sampai tidak ditemukan simpul lain yang bisa dikunjungi.

Jika tidak ada simpul lagi yang bisa diwarnai, berarti semua simpul telah diwarnai. Dengan melintasi polyhedron seperti ini, kita dapat melihat bahwa bukti ini memerlukan setidaknya selalu ada lintasan yang menyentuh semua simpul minimal sekali. Karena kita pertama kali menghubungkan dua buah simpul dan kemudian untuk semua simpul yang kita warnai, kita mendapatkan simpul lain yang belum dikunjungi, maka dengan menghitung jumlah sisi yang kita warnai, kita dapat menghitung jumlah simpul yang kita warnai yaitu simpul merah =  $V - 1$ .

Selanjutnya, Von Staudt menyatakan bahwa semua

simpul telah diwarnai. Untuk membuktikan ini, asumsikan ada pernyataan tersebut salah, maka terdapat simpul yang belum diwarnai, yang berarti kita belum selesai mewarnai simpul dengan warna merah.

Selanjutnya kita akan memeriksa wilayah polyhedron. Ambil sebuah wilayah dan warnai misalkan dengan warna hijau, dan juga sisi-sisi yang belum diwarnai merah. Lanjutkan untuk wilayah yang lain yang hanya mempunyai satu sisi warna hijau, dan warnai dengan hijau seperti sebelumnya. Lanjutkan sampai tidak ada lagi wilayah yang bisa diwarnai sesuai syarat tadi. Karena mustahil ada wilayah dengan keempat sisinya diwarnai, semua wilayah pasti berwarna hijau. Hubungan jumlah sisi warna hijau dengan jumlah wilayah adalah simpul hijau =  $F - 1$ .



**Gambar 3.4 Ilustrasi proses pembuktian Von Staudt**

Jumlah semua sisi,  $E$ , akan sama dengan jumlah sisi hijau dan sisi merah.

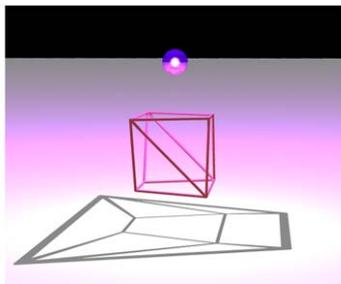
$$E = \text{sisi merah} + \text{sisi hijau}$$

$$E = V - 1 + F - 1$$

sehingga,

$$E = V + F - 2.$$

Bukti Von Staudt juga dapat lebih mudah dimengerti dengan pendekatan pohon merentang. Bukti dengan pendekatan ini memanfaatkan prinsip dualisme graf planar. Untuk membuat graf planar dari sebuah polyhedron, letakkan sumber cahaya di dekat salah satu wilayah dari convex polyhedron, dan sebuah bidang di seberangnya.

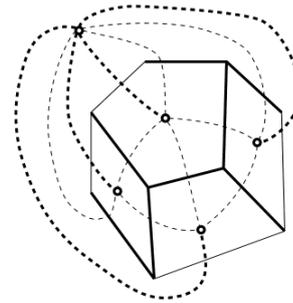


**Gambar 3.5 Bayangan sisi graf planar dari convex polyhedron**

Bayangan dari sisi polyhedron membentuk graf planar. Simpul dari graf planar adalah simpul dari polyhedron, sisi graf planar adalah sisi polyhedron, dan wilayah polyhedron bersesuaian dengan wilayah graf planar dengan wilayah polyhedron yang paling dekat dengan sumber cahaya bersesuaian dengan wilayah luar graf planar.

Kemudian dari graf planar  $G$  dengan jumlah sisi  $E$

tersebut, buat pohon merentang  $T$  dalam  $G$ , yang berarti  $T$  adalah subgraf asiklik terhubung.



**Gambar 3.6 Ilustrasi graf  $T$  dengan sisi cetak tebal dan graf  $(G-T)^*$  dengan sisi putus-putus tebal**

Kemudian dari  $T$  tersebut kita buat subgraf dual dari komplementnya,  $(G-T)^*$ , membentuk subgraf asiklik terhubung  $G^*$  yang juga adalah sebuah pohon merentang. Perhatikan bahwa pohon  $T$  mempunyai jumlah simpul  $V - 1$  dan pohon  $(G-T)^*$  mempunyai jumlah simpul  $F - 1$  (jumlah simpul graf dual sama dengan jumlah wilayah graf semula). Sehingga jumlah sisi  $E$  adalah

$$E = E_T + E_{(G-T)^*} = (V - 1) + (F - 1)$$

$$E = F + V - 2$$

$$F + E + V = 2.$$

### C. Bukti Induksi Simpul

Basis induksi. Jika graf planar terhubung  $G$  hanya memiliki satu simpul, maka tiap sisi adalah kurva Jordan, sehingga ada wilayah  $E + 1$  dan  $F + V - E = (E + 1) + 1 - E = 2$ .

Langkah induksi. Andaikan untuk sembarang  $G$  dengan simpul  $V_n \geq 1$  pernyataan  $E_n = F_n + V_n - 2$  adalah benar. Akan diperlihatkan bahwa  $E_{n+1} = F_{n+1} + V_{n+1} - 2$  adalah juga benar dengan  $V_{n+1} = V_n + 1$  dan  $F_{n+1}$  adalah jumlah wilayah dengan simpul sebanyak  $n + 1$ .

Pilih satu sisi  $e$  yang menghubungkan dua simpul berbeda, mampatkan sisi tersebut, sehingga jumlah simpul (kedua simpul melebur) dan jumlah sisi berkurang satu sehingga

$$E_{n+1} = F_{n+1} + V_{n+1} - 2 = F_n + (V_n + 1) - 2$$

$$E_{n+1} = F_n + (V_n + 1) - 2$$

$$E_n = F_n + V_n - 2.$$

Karena langkah basis induksi dan langkah induksi telah dibuktikan benar, maka untuk sembarang graf planar terhubung  $G$  dengan jumlah simpul lebih dari sama dengan satu.

### D. Bukti Induksi Sisi

Basis induksi. Jika graf planar terhubung  $G$  tidak mempunyai simpul, maka simpul tersebut adalah simpul terisolasi dan  $V + F - E = 1 + 1 - 0 = 2$ .

Langkah induksi. Andaikan untuk sembarang graf planar terhubung  $G$  dengan  $V_n = n \geq 0$  pernyataan  $V_n + F_n - E_n = 2$  adalah benar. Akan diperlihatkan  $V_{n+1} + F_{n+1} - E_{n+1} = 2$  juga benar dengan  $V_{n+1} = V_n + 1$  dan  $F_{n+1}$  adalah jumlah wilayah dengan simpul  $n + 1$ .

Pilih satu sisi  $e$  manapun. Jika  $e$  menghubungkan dua simpul berbeda, mampatkan sisi tersebut, sehingga

jumlah simpul(kedua simpul melebur) dan jumlah sisi berkurang satu sehingga  $E_{n+1} = F_{n+1} + V_{n+1} - 2 = F_n + (V_n + 1) - 2 = E_n + 1$  sehingga persamaan tersebut tereduksi menjadi  $E_{n+1} = E_n = F_n + V_n - 2$ . Jika  $e$  tidak menghubungkan dua simpul yang berarti  $e$  berupa cincin (*loop*) dan ,menurut teorema kurva Jordan, memisahkan dua wilayah. Hapus sisi tersebut sehingga mengurangi wilayah dan sisi sebanyak satu sehingga  $E_{n+1} = F_{n+1} + V_{n+1} - 2 = (F_n + 1) + V_n - 2 = E_n + 1$  sehingga persamaan tersebut tereduksi menjadi  $E_n = F_n + V_n - 2$ .

#### IV. KESIMPULAN

Walaupun pembuktian Euler sendiri ternyata salah, tetapi teorema yang dibuatnya secara mengejutkan tetap benar. Formula Euler ini, walaupun Euler bermaksud hanya menerapkannya untuk convex polyhedron, ternyata dapat juga diterapkan pada graf planar terhubung sederhana. Pembuktian demi pembuktian telah ditawarkan para ilmuwan untuk mendukung teorema dasar graf tersebut. Beberapa diantaranya adalah dengan pendekatan induksi matematik dan pohon merentang. Berbagai macam sudut pandang yang ditawarkan oleh pembuktian tersebut juga semakin membuka wawasan penulis dalam struktur diskrit khususnya teori graf.

#### VII. TERIMA KASIH

Penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada Allah SWT, ayah, ibu, dan pak rinaldi atas semua bimbingannya selama ini sehingga penulis dapat menyelesaikan makalah struktur diskrit ini tanpa permasalahan yang berarti.

#### REFERENCES

- [1] Munir, Rinaldi. "Diktat Kuliah IF2091 Struktur Diskrit", Bandung: STEI ITB, 2008.
- [2] <http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2009%20V%20E%20and%20F%20part%202.pdf> 14 Desember 2010
- [3] [http://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_characteristic](http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic) 14 Desember 2010
- [4] <http://en.wikipedia.org/wiki/Polytope> 13 Desember 2010
- [5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Jordan\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve) 13 Desember 2010
- [6] <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> 14 Desember 2010

#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2010

ttd

Muhammad Hilman Beyri  
13509047