

# Pembuktian Persoalan Logika dengan Komputer

Akhiles L. Danny Sindra – 135 09 063  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
danny.sindra@students.itb.ac.id

Dalam ilmu matematika, suatu pernyataan (definisi / sifat) dikatakan sah apabila telah dibuktikan kebenarannya. Kebenaran ini tidak selalu harus dibangun dari awal karena keberadaan teorema-teorema yang telah dibuktikan bisa dimanfaatkan untuk mendukung kebenaran pernyataan tersebut. Tetapi ada banyak pembuktian matematika yang tidak tergantung pada teorema saja, namun memerlukan kalkulasi atau komputasi yang terkadang sangat panjang – bahkan di luar batas kemampuan manusia – sehingga manusia mulai menggunakan komputer yang dapat melakukan operasi matematika dengan kecepatan dan ketelitian yang sangat tinggi. Fokus dari makalah ini adalah peran dan signifikansi dari komputer sebagai alat bantu dalam pembuktian teorema matematika. Diawali dengan tantangan masalah matematika yang memicu penggunaan komputer, seberapa jauh peran algoritma dan komputasi dalam program komputer sebagai alat pembuktian, contoh kasus yang terselesaikan dan kontroversi yang ditimbulkannya.

**Kata kunci:** komputer, pembuktian, persoalan, teorema.

## I. PENDAHULUAN

Dalam ilmu matematika, teorema memiliki fungsi penting sebagai dasar logika dari ekspresi-ekspresi matematika yang berupa proposisi atau pernyataan. Berbeda dengan pembuktian matematis yang menggunakan notasi dan lambang aritmatika, sebuah teorema adalah inferensi yang diambil dari pernyataan lain yang telah disepakati kebenarannya secara universal, sehingga tidak selalu bergantung kepada hasil observasi atau penelitian.

Meskipun umumnya pembuktian matematis dari teorema itu sendiri dianggap bukan bagian dari teorema, keberadaannya akan selalu diperlukan sebagai basis dan pertanggungjawaban. Hal ini diperlukan untuk membuat teorema tersebut lebih mudah dipahami.

Sebuah teorema bisa berupa sebuah proposisi sederhana dengan pembuktian yang cukup rumit – melibatkan banyak cabang ilmu matematika, tetapi ada juga teorema yang pembuktiannya mudah dipahami namun sulit untuk dituliskan secara langsung, sehingga untuk mengetes kebenarannya digunakan bantuan kemampuan komputasional komputer (yang akan dicek lagi menggunakan sebuah program). Contoh dari teorema yang pembuktiannya menggunakan bantuan komputer [2] adalah *Four Color Theorem* dan *Kepler Conjecture*. Pada

awalnya banyak matematikawan yang tidak menyetujui bentuk pembuktian berbasis komputer, tetapi hal ini kemudian semakin diterima dalam beberapa tahun terakhir.

## II. PERSOALAN MATEMATIKA YANG MEMICU PENGGUNAAN KOMPUTER

Sebagai ilmu berbasis logika, matematika digunakan untuk memecahkan berbagai persoalan yang timbul. Pemecahan persoalan ini dilakukan dengan mengenal sifat-sifat dari akar persoalan tersebut, dan menggunakan langkah-langkah logika yang dapat dibuktikan kebenarannya melalui aksioma dan teorema (*formal proof*).

Dalam perkembangan zaman, timbul beberapa persoalan yang ternyata tidak dapat diselesaikan / dibuktikan hanya menggunakan aksioma dan teorema saja. Pembuktian yang dibutuhkan kadangkala melibatkan banyak kasus / kemungkinan kejadian, sehingga memerlukan ketelitian dan kesabaran tinggi untuk mengevaluasi semuanya.

Berikut adalah empat contoh persoalan yang membutuhkan komputasi dalam jumlah besar:

- *Travelling Salesperson Problem* (TSP)
- Pewarnaan Peta dengan Empat Warna
- *Connect Four* (*game*)

### 1. Travelling Salesperson Problem

Persoalan ini berasal dianalogikan dengan seorang pedagang yang berkeliling ke kota-kota dengan menempuh jarak tertentu antar setiap kota. Yang ingin ditentukan adalah sirkuit terpendek yang bisa dilalui pedagang tersebut jika ingin mengunjungi setiap kota tepat satu kali dari kota keberangkatan dan kembali lagi. Dalam kenyataannya, persoalan ini memiliki banyak terapan di bidang teknik, seperti rute perjalanan mobil pos, pengencangan sejumlah mur pada mesin menggunakan lengan robot, atau perubahan urutan produksi yang dilakukan oleh mesin.

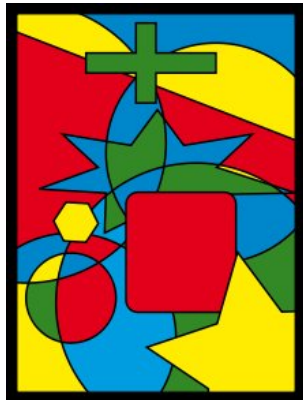
Persoalan TSP dapat direpresentasikan dengan teori graf, di mana kota dinyatakan sebagai simpul dan jarak antar kota sebagai bobot dari sisi graf. Pada persoalan ini graf yang digunakan adalah graf lengkap berbobot (tiap simpul mempunyai sisi ke simpul lain). Pilih sembarang simpul sebagai kota

asal, maka tersedia (jumlah simpul – 1)! pilihan jalan. Dalam sembarang graf lengkap dengan  $n$  buah simpul, jumlah sirkuit Hamilton yang berbeda adalah  $(n-1)!/2$ . Dengan demikian untuk mencari sirkuit terpendek dalam TSP ada  $((n-1)!/2)$  sirkuit yang perlu dienumerasi dan dihitung masing-masing jarak tempuhnya [1].

Untuk  $n$  yang besar, misal  $n = 20$ , akan terdapat  $(20-1)!/2$  sirkuit Hamilton atau  $6 \times 10^{16}$  kemungkinan.

## 2. Four Color Mapping

Four Color Mapping atau Perkiraan Empat Warna adalah persoalan yang dikemukakan oleh Francis Guthrie, seorang mahasiswa Universitas London, yang belajar di bawah asuhan De Morgan. Ia menyadari bahwa hanya empat warna berbeda yang dibutuhkan untuk mewarnai peta sehingga tidak ada wilayah-wilayah yang bersebelahan yang memiliki warna yang sama. Pemikiran ini ia sampaikan kepada De Morgan. Namun De Morgan tidak mampu membuktikannya, persoalan ini dilemparkan kepada matematikawan lainnya.



Gambar 1. Contoh Peta 4 Warna

Pada 17 Juli 1879, Alfred Bray Kempe mengumumkan bahwa dia telah membuktikan empat perkiraan warna. Kempe adalah seorang pengacara di London yang belajar Matematika di bawah asuhan Cayley di Cambridge dan mencurahkan sebagian waktunya untuk penemuan di bidang Matematika. Atas saran Cayley, Kempe mengajukan teoremanya ke *American Journal of Mathematics* yang dipublikasikan pada tahun 1879.

Namun pada tahun 1890, Teorema Empat Warna kembali menjadi Dugaan Empat Warna karena seorang dosen Durhan England, Percy John Heawood menunjukkan bahwa pembuktian yang dilakukan oleh Kempe adalah salah.

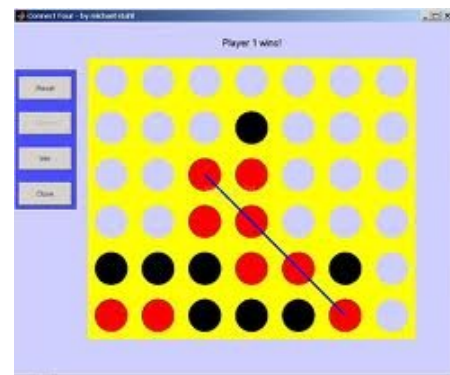
Sepanjang tahun 1960-an hingga 1970-an, matematikawan berkebangsaan Jerman Heinrich Heesch mengembangkan metode untuk mengaplikasikan komputer untuk mencari bukti. Tahun 1976 Dugaan Empat Warna baru bisa

dibuktikan oleh Kenneth Appel dan Wolfgang Haken menggunakan algoritma komputer [3].

Karena kompleksitasnya, Teorema Empat Warna merupakan teorema pertama yang dibuktikan dengan bantuan komputer. Sampai saat ini teorema tersebut belum pernah dibuktikan dengan tangan.

## 3. Connect Four

*Connect Four* adalah permainan dua pemain menggunakan dua tipe bola yang berbeda warna. Pemenang dari permainan ini adalah yang bisa menaruh empat bola berurutan secara vertikal, horizontal, atau diagonal terlebih dahulu. Permainan ini merupakan salah satu dari *solved game* – yaitu permainan yang hasilnya bisa diprediksi dari posisi apapun ketika kedua pemain bermain secara optimal.



Gambar 2. Permainan *Connect Four*

Pembuktian dari permainan *Connect Four* dilakukan oleh James D. Allen, kemudian diteruskan secara independen oleh Victor Allen pada tahun 1988 menggunakan program VICTOR. Program ini menjamin bahwa pemain yang mendapat giliran pertama akan memenangkan permainan dengan mendasarkan algoritmanya pada *Nine Strategic Rules* – sembilan aturan strategi yang digunakan sebagai pertimbangan dalam menentukan langkah terlogis berikutnya.

## III. KEMAMPUAN KOMPUTASI KOMPUTER DAN PERANNYA DALAM PEMBUKTIAN TEOREMA

Kemampuan komputer dalam pemrosesan data dalam waktu singkat, pemberian hasil dengan tingkat ketelitian tinggi, penyimpanan data dalam jumlah besar, dan penanganan data algoritmik yang fleksibel dalam berbagai kasus membuatnya sebagai alat bantu yang bisa diandalkan dalam menyelesaikan persoalan matematika. Beberapa keunggulan komputer yang melebihi kemampuan manusia antara lain:

- Kemampuan *Brute Force*

*Brute Force* adalah suatu algoritma yang mengerjakan seluruh kemungkinan jawaban sampai menemukan satu yang paling tepat.

Performa dari algoritma ini murni berbasis kepada kemampuan komputasi komputer yang cepat dan teliti.

Meskipun algoritma Brute Force tidak sepenuhnya merepresentasikan solusi dari suatu persoalan, ia memiliki posisi penting karena menjamin adanya hasil – meskipun terkadang membutuhkan jumlah waktu yang signifikan. *Brute Force* berguna dalam mengetes kebenaran atau ketepatan dari algoritma lain yang lebih cepat, atau melakukan evaluasi pada seluruh kasus / kemungkinan yang belum ditemukan algoritma ringkasnya.

- Struktur data dengan kapasitas memori besar  
Dua dari persoalan di atas menggunakan representasi graf dalam jumlah besar. Bila semua graf dikerjakan secara manual tentu akan memerlukan banyak kertas. Terlebih lagi usaha penyimpanan, pencarian dan pemrosesan dari satu kertas ke kertas lainnya akan memakan waktu, apalagi dalam jumlah yang sedemikian banyak.  
Komputer sanggup menyediakan struktur data untuk graf dengan kombinasi dari struktur data list dan matriks. Masing-masing struktur memiliki kelebihan dan kekurangannya – list umumnya digunakan untuk *sparse graphs* karena penggunaan memorinya lebih kecil, sementara matrix menyediakan akses data yang lebih cepat, namun mengonsumsi kapasitas memori yang sangat besar [4].

#### IV. PENANGANAN PERSOALAN DENGAN KOMPUTER

Berangkat dari potensi komputasi komputer, berikut adalah peran dan algoritma yang menjadi alat bantu pembuktian ketiga persoalan di atas:

##### 1. *Travelling Salesman Problem* (TSP)

Sampai tanggal makalah ini dibuat, belum ditemukan algoritma yang mangkus untuk memecahkan persoalan TSP untuk  $n$  sembarang – meskipun sudah ada beberapa metode heuristik. Solusi yang tersedia adalah mengetes semua kombinasi (*Brute Force*) dan mencari jarak tempuh yang terkecil.

Cara kerja dari algoritma *Brute Force* adalah sebagai berikut:

1. Enumerasi (*list*) setiap solusi yang mungkin dengan cara yang sistematis,
2. Evaluasi setiap kemungkinan solusi satu-persatu dan simpan solusi terbaik yang ditemukan sampai sejauh ini (*the best solution found so far*),
3. Bila pencarian solusi selesai, berikan solusi terbaik (*the winner*) [6].

Waktu *run* dari pendekatan ini memiliki kompleksitas waktu  $O(n^2^n)$  – dengan  $n$  menyatakan jumlah kota, sehingga membutuhkan ruang memori dan waktu yang besar.

Pada Maret 2005, persoalan TSP melewati 33,810 simpul dalam papan sirkuit diselesaikan menggunakan *Concorde TSP Solver*. Jarak yang ditempuh adalah 66.048.945 unit dan telah dibuktikan bahwa tidak ada sirkuit lain yang lebih pendek. Komputasi yang dilakukan oleh program tersebut memakan waktu 15.7 tahun CPU. Kemudian pada April 2006 persoalan yang serupa – dengan 85,900 simpul – diselesaikan dengan program yang sama selesai dalam waktu 136 tahun CPU [5].

##### 2. *Four Color Theorem*

Four Color Theorem merupakan bagian dari persoalan *Map-Coloring*. Secara umum, algoritma dari pewarnaan peta yang digunakan adalah Welch-Powell [1] sebagai berikut:

1. Untuk inisialisasi, catat semua simpul beserta derajatnya masing-masing,
2. Urutkan tiap simpul derajatnya dari yang paling besar ke yang paling kecil,
3. Cari simpul dengan derajat terbesar dan belum diwarnai, lalu beri warna pada simpul tersebut,
4. Cari simpul lain yang belum diwarnai, tidak bersisian dengan simpul pada langkah (3), dan tidak bersisian dengan simpul berwarna sama,
5. Ulangi langkah (3) sampai semua simpul diwarnai.

Dugaan Empat Warna baru bisa dicek kebenarannya pada tahun 1976 oleh Kenneth Appel dan Wolfgang Haken dengan menggunakan bantuan komputasi komputer. Mereka dibantu dalam beberapa pekerjaan algoritmik oleh John Koch.

Jika dugaan empat warna salah, aka nada setidaknya satu buah peta dengan jumlah kemungkinan warna yang digunakan adalah lima. Bukti menunjukkan bahwa contoh-kontra minimal seperti itu tidak ada melalui penggunaan dua konsep teknis:

- Sebuah kumpulan yang tak dapat dihindari mengandung daerah yang sedemikian hingga setiap peta haruslah memiliki sedikitnya satu daerah dari kumpulan tersebut.
- Sebuah konfigurasi yang dapat diturunkan adalah sebuah susunan dari daerah-daerah yang tidak dapat terjadi dalam contoh-kontra minimal. Jika sebuah peta mengandung konfigurasi yang dapat diturunkan, dan sisa dari

peta dapat diwarnai dengan empat warna, keseluruhan peta dapat diwarnai dengan empat warna, sehingga peta tersebut tidaklah minimal.

Dengan menggunakan aturan matematika dan prosedur berdasarkan sifat konfigurasi yang dapat diturunkan, Appel dan Haken menemukan sebuah kumpulan yang tak dapat dihindari, membuktikan bahwa contoh-kontra minimal dari dugaan empat warna tidak dapat ditemukan. Bukti yang mereka berikan mengatakan bahwa hanya ada 1936 (yang kemudian direduksi lagi menjadi 1476) konfigurasi peta yang harus diperiksa oleh komputer.

Meskipun menggunakan bantuan komputasi komputer, verifikasi bukti dari Appel dan Haken membutuhkan waktu 1200 jam.

Pada tahun 1996, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour, dan Robin Thomas menemukan algoritma baru yang lebih mangkus (kompleksitas waktu  $O(n^2)$ ) dalam menangani persoalan ini. Algoritma yang mereka ciptakan didasarkan pada pembuktian Appel dan Haken, hanya saja mereduksi kompleksitasnya dan menyisakan hanya 633 konfigurasi.

### 3. Connect Four – VICTOR

Pembuktian bahwa pemain pertama yang akan selalu memenangkan permainan Connect Four [7] didasarkan pada langkah-langkah strategis dan murni menggunakan logika.

Pertama-tama Victor Allis menyederhanakan program penentuan langkahnya dengan mereduksi kemungkinan langkah yang diambil. Papan yang digunakan berukuran  $7 \times 6$ , dengan ada tiga kemungkinan pada setiap kotak: kosong, bola pemain satu, atau bola pemain dua. Dengan demikian jumlah kemungkinan posisi seluruhnya adalah  $3^{42} (\geq 10^{20})$ . Reduksi dilakukan dengan mempertimbangkan berbagai langkah illegal, seperti pemain kedua menaruh bolanya terlebih dahulu) sehingga total kemungkinan adalah  $1.6 \times 10^{13}$  posisi.

Sembilan Langkah Strategis yang dirumuskan oleh Victor Allis adalah:

1. Claimeven
2. Baseinverse
3. Vertical
4. Aftereven
5. Lowinverse
6. Highinverse
7. Baseclaim
8. Before
9. Specialbefore

Kesembilan langkah tersebut tidak akan dijelaskan dalam makalah ini karena fokus utama di sini adalah peran komputer sebagai alat bantu pembuktian persoalan logika, sehingga yang akan

ditunjukkan hanya baris program menggunakan bahasa C yang digunakan untuk menentukan batas atas dari jumlah posisi sah pada papan permainan.

Penyusunan program ini dilakukan berdasarkan observasi berikut:

- Jumlah bola di papan berkisar antara 0 dan  $COLUMNS * ROWS$
- Untuk tiap sejumlah bola, dihitung jumlah cara mendistribusikannya pada kolom-kolom berbeda. Hal ini dilakukan dengan menaruh sejumlah bola di baris pertama kemudian beberapa diletakkan pada baris kedua, di atas bola yang diletakkan pada baris pertama.
- Seterusnya, akan didapat deret jumlah yang menurun, menandakan jumlah bola pada baris satu hingga ROWS.
- Jika jumlah ini dinamai  $a(1)$  sampai  $a(ROWS)$ , jumlah cara yang bisa dipilih pada kolom  $a(1)$  untuk meletakkan bola pada baris pertama adalah  $Chose(ROWS, a(1), a(2))$  cara, dan seterusnya.
- Total cara untuk mendistribusikan bola pada kolom-kolom berbeda dikalikan dengan jumlah kombinasi warna antara kedua bola (bola pemain satu dan bola pemain dua).

Baris program dapat dilihat pada Apendiks.

## V. KONTROVERSI PEMAKAIAN KOMPUTER

Banyak matematikawan yang berargumen bahwa komputer tidak dapat digunakan dalam pembuktian matematika karena sulit untuk diverifikasi – membutuhkan pengetahuan akan pemrograman, spesifikasi komputer dan *compiler* yang digunakan, dan sebagainya. Terlebih lagi pembuktian menggunakan komputer ‘kurang elegan’ karena tidak menggunakan kemampuan berpikir manusia seutuhnya sehingga lebih tepat disebut ‘kalkulasi’ daripada ‘pembuktian’.

Oleh sebab itu, standar program yang digunakan dalam pembuktian dengan komputer sangat ketat: memiliki keterangan yang jelas pada setiap fungsi dan prosedur yang digunakan, harus transparan dan mudah dipahami, dapat diperiksa menggunakan berbagai *compiler*, sistem operasi, dan perangkat keras komputer

Pada kenyataannya komputer telah menghasilkan banyak kebenaran dalam matematika. Dua di antaranya yang paling fenomenal adalah:

- Kesalahan kalkulus

Pada tahun 1960-an, Melvin Klerer dan Fred Grossman memulai sebuah proyek komputer untuk membuat dan mengetes integral kalkulus. Keduanya menemukan bahwa banyak buku teks matematika yang keliru dalam perhitungan. Meskipun awalnya kedua orang tersebut menduga telah melakukan kesalahan pada program, *exhaustive testing* menunjukkan bahwa kesalahan memang ada pada perhitungan yang digunakan pada buku-buku tersebut. Dari hasil penelitian mereka, tingkat kesalahan yang

ditunjukkan melebihi 25%.

- Teorema Empat Warna  
Pembuktian dengan komputer yang dilakukan oleh Appel dan Haken menuai kontroversi karena metode yang dipakai hanyalah semacam algoritma *Brute Force*, sementara matematikawan lain berargumen bahwa yang mengerti pembuktian semacam ini hanyalah yang memiliki pengetahuan tentang pemrograman komputer.

## VI. KESIMPULAN

Melalui berbagai contoh kasus yang telah dibahas, dapat dilihat bahwa terdapat sejumlah teorema atau persoalan matematika yang tidak dapat diselesaikan sepenuhnya secara manual.

Pembuktian semacam ini menuai kontroversi di kalangan matematikawan. Tentu saja ada pihak yang pro, maupun kontra.

Pada kenyataannya pembuktian persoalan matematika dengan komputer merupakan terobosan luar biasa dalam ilmu matematika. Kemajuan yang diberikan olehnya tidak dapat dipungkiri dan seharusnya mendapat perhatian yang lebih layak dari kaum matematikawan. Hal ini dapat dilihat dari pembuktian pada persoalan TSP (persoalan dengan banyak aplikasi pada bidang teknik) dan Teorema Empat Warna (yang sebelumnya tidak dapat diselesaikan dalam 124 tahun).

## VII. APENDIKS

Berikut adalah baris program VICTOR dari langkah strategis Connect Four – untuk menentukan batas atas jumlah posisi yang mungkin terjadi dalam permainan:

```
#define COLUMNS 7
#define ROWS 6
#define MIN(A,B) ((A) < (B) ? (A) : (B))

double Chose[COLUMNS * ROWS + 1][COLUMNS *
ROWS + 1];

main()
{
int Men;
double Total, Extra, Distributions();

Total = (double) 0;
InitChose();
for (Men = 0; Men <= COLUMNS * ROWS; Men++) {
    Extra = Distributions(Men) *
    Chose[Men][Men/2];
    printf("Total with %d men, is %.0f0, Men,
    Extra);
    Total += Extra;
}
```

```
printf("Total number of positions on %d x %d board is
at most %.0f0,
    COLUMNS, ROWS, Total);
}
```

```
InitChose()
{
int i, j;

for (i = 0; i <= COLUMNS * ROWS; i++) {
    Chose[i][0] = (double) 1;
for (j = 1; j < i; j++) {
    Chose[i][j] = Chose[i-1][j] + Chose[i-1][j-1];
}
    Chose[i][i] = (double) 1;
}
}
```

```
double
Distributions(Men)
int Men;
{
double Distribute();

return (Distribute(1, COLUMNS, (double) 1, Men));
}
```

```
double
Distribute(Row, UpperBound, Product, MenLeft) int
Row, UpperBound, MenLeft;
double Product;
{
int i;
double Sum;

if ((ROWS - Row + 1) * UpperBound < MenLeft) {
    return ((double) 0);
}
if (Row > ROWS) {
    return (Product);
}
Sum = (double) 0;
for (i = MIN(UpperBound, MenLeft); i >= 0; i--) {
    Sum += Distribute(Row+1, i,
    Product * Chose[UpperBound][i], MenLeft - i);
}

return (Sum);
}
```

## REFERENCES

- Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit edisi ketiga*, Informatika, 2005.  
<http://www.math.washington.edu/~billey/computer.proofs.html>,  
*Computer Proofs*, diakses pada 14 Desember 2010, 19.00 WIB  
<http://www.docstoc.com/docs/18529785/Tugas-Makalah-Matematika-Diskrit>,  
*Permasalahan Empat Warna dalam Teori Pewarnaan Graf*, diakses pada 14 Desember 2010, 20.00 WIB  
[http://www.wordiq.com/definition/Graph\\_theory#Graphs\\_as\\_data\\_structures](http://www.wordiq.com/definition/Graph_theory#Graphs_as_data_structures),  
*Graph as Data Structures*, diakses pada 15 Desember 2010, 11.00 WIB  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling\\_salesman\\_problem#Heuristic\\_and\\_approximation\\_algorithms](http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem#Heuristic_and_approximation_algorithms),  
*Travelling Salesman Problem*, diakses pada 15 Desember 2010, 12.00 WIB  
<http://dedyjsn.wordpress.com/2008/03/24/algorithm-brute-force>,  
*Algoritma Brute Force*, diakses pada 15 Desember 2010, 12.00 WIB
- Victor Allis, *A Knowledge-based Approach of Connect-Four*, sudah dipublikasikan.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 29 April 2010

ttd

Akhiles L. Danny Sindra (135 09 063)