

# Studi Pewarnaan Graf pada *Radio Frequency Assignment Problem*

Margaretha Siahaan / 13509086  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganessa 10 Bandung 40132, Indonesia  
13509086@std.stei.itb.ac.id

**Abstrak**—Graf sebagai salah satu cabang ilmu matematika diimplementasikan pada berbagai bidang kehidupan, salah satunya adalah di bidang teknologi komunikasi. Gelombang radio merupakan salah satu gelombang elektromagnetik yang paling banyak digunakan pada bidang frekuensi. Teori graf digunakan untuk menganalisis masalah-masalah yang berhubungan dengan garis dan titik. Pewarnaan simpul dan teknik *chromatic polynomial* merupakan teknik pewarnaan dengan mencari jumlah warna paling sedikit untuk mewarnai graf. *Frequency assignment problem* merupakan usaha pengoptimalan bidang frekuensi. Dari penjabaran pada tulisan ini dapat disimpulkan bahwa dengan pewarnaan graf dapat dilakukan pengoptimalan bidang frekuensi.

**Index Terms**—Bilangan Kromatik, *Frequency Assignment Problem*, Pewarnaan Graf, Teori Graf.

## I. PENDAHULUAN

Kebutuhan manusia akan informasi terus meningkat dan teknologi terus-menerus mengalami perkembangan untuk menyediakan dan memudahkan manusia untuk memenuhi kebutuhan informasi yang diinginkannya. Salah satu media komunikasi yang mudah dan sering digunakan oleh manusia adalah radio.

Radio memanfaatkan prinsip gelombang dan menerima informasi dari pemancar dengan media penghantar udara. Informasi dibawa oleh gelombang-gelombang beradiasi dan ketika melewati konduktor elektrik, akan menghasilkan arus yang dapat diubah menjadi suara atau bentuk sinyal lain.

Dengan semakin banyak penggunaan telepon seluler, gelombang wi-fi, dan berbagai aplikasi lain terhadap gelombang, optimasi penggunaan bidang frekuensi (*frequency band*) menjadi sangat penting. Untuk itu, bidang frekuensi dibagi menjadi beberapa saluran (*channel*). Sebuah saluran dapat digunakan jika setiap pemancar tidak berada dalam jarak yang terlalu dekat.

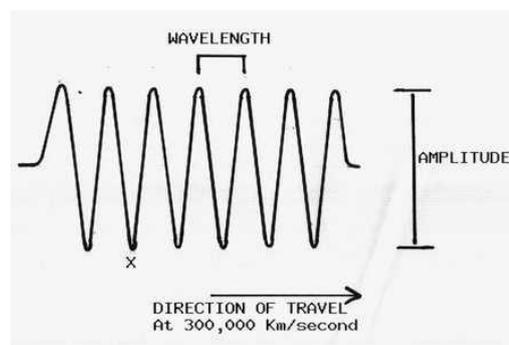
*Frequency Assignment Problem* pada dasarnya merupakan cara untuk mencari jarak terkecil antara dua buah pemancar agar pemancar tersebut tidak saling berinterferensi dan dapat memancarkan gelombang melalui saluran-saluran yang tersedia. Banyak metode yang digunakan untuk memecahkan masalah ini dan salah satunya adalah dengan teori graf. Teknik pewarnaan graf

dapat diimplementasikan untuk menemukan nomor warna yang paling kecil yang menghubungkan kedua pemancar yang direpresentasikan sebagai node. Dengan menggunakan teknik *heuristics* pewarnaan graf, dapat dilakukan optimasi bidang frekuensi.

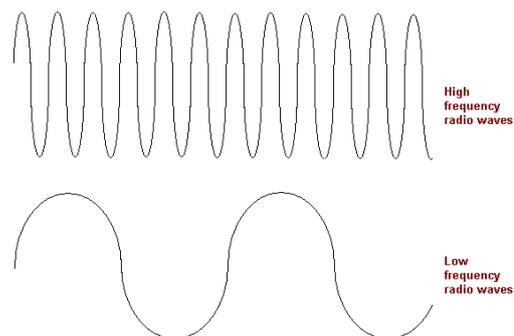
## II. RADIO

### A. Sejarah dan Perkembangan Radio

Radio merupakan sinyal transmisi oleh modulasi dari gelombang elektromagnetik dengan frekuensi yang lebih rendah dari cahaya tampak. Radio pada awalnya tidak bisa menghantarkan suara dan disebut telegraf wirakabel (*wireless telegraph*). Awalnya, penemuan gelombang radio adalah untuk komunikasi radio dengan mobilitas yang lebih tinggi, penyiaran, radar, dan sistem navigasi dan komunikasi satelit lainnya.



Gambar 2.1 Gelombang



Gambar 2.2 Gelombang Radio

Gelombang radio pertama kali diprediksi oleh seorang matematikawan, James C Maxwell pada tahun 1865. Maxwell menemukan sebuah bagian cahaya yang seperti gelombang dan menemukan berbagai kesamaan secara elektrik dan magnetis. Ia kemudian menghasilkan sebuah persamaan yang menjelaskan gelombang cahaya dan gelombang radio sebagai gelombang elektromagnetik.

Pada tahun 1887, Heinrich Hertz mendemonstrasikan teori ini dengan mencoba menghasilkan gelombang radio di laboratoriumnya. Penemuan ini diikuti oleh banyak penemuan-penemuan berikutnya yang menghasilkan penggunaan gelombang radio secara praktis.

Penggunaan istilah “radio” mengalami perkembangan dan memiliki tiga jenis pengertian : komunikasi tanpa kabel, penyiaran radio dan komersialisasi, dan gelombang dan eksperimen. Sistem radio untuk komunikasi akan memiliki elemen-elemen berikut :

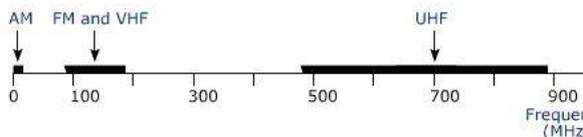
1. Pemancar yang berisi sumber energi listrik, menghasilkan arus dan frekuensi osilasi yang diinginkan
2. Gelombang elektromagnetik yang dapat melewati sebuah ruang secara langsung atau dengan melewati jalur tertentu yang disebabkan oleh refleksi, refraksi, atau difraksi gelombang.
3. Setiap gelombang elektromagnetik tadi diterima oleh sebuah antenna yang menangkap energi dari gelombang dan mengubahnya menjadi arus yang beresilasi. Pada penerima, sinyal ini dimodulasi dan dikonversi menjadi suara.

Radio menjadi sangat berguna setelah alat-alat elektronik seperti *vacuum tube* dan transistor ditemukan. Saat ini, radio sangat banyak digunakan, mulai dari permainan anak-anak sampai dengan dunia penyiaran.

### B. Gelombang Radio

Gelombang radio merupakan gelombang elektromagnetik dengan panjang gelombang lebih dari  $10^{-3}$  meter. Gelombang radio muncul secara alami oleh adanya petir atau oleh objek-objek luar angkasa lainnya.

Frekuensi gelombang radio berada di daerah kHz sampai dengan beberapa ratus MHz. Setiap frekuensi radio yang berbeda memiliki karakteristik propagasi yang berbeda di atmosfer bumi. Frekuensi radio dibedakan menjadi beberapa jenis :



Gambar 2.1 Jenis Frekuensi Gelombang Radio dalam MHz

Berdasarkan rentang frekuensi radio, gelombang radio dibedakan menjadi beberapa bidang frekuensi radio.

Band	Frequency range	Wavelength range
Extremely low frequency (ELF)	< 3 kHz	>100 km
Very low frequency (VLF)	3 - 30 Hz	10 - 100 krn
Low frequency(LF)	30 - 300 kHz	1 - 10 km
Medium frequency (MF)	300 kHz - 3 MHz	100m - 1km
High frequency (HF)	3 - 30 MHz	10 - 100m
Very high frequency (VHF)	30 - 300 MHz	1 - 10m
Ultra high frequency (UHF)	300 MHz - 3 GHz	10cm - 1m
Super high frequency (SHF)	3 - 30 GHz	1 - 10cm
Extremely high frequency (EHF)	30 - 300 GHz	1mm - 1cm

Tabel 2.1 Jenis Bidang Frekuensi Radio

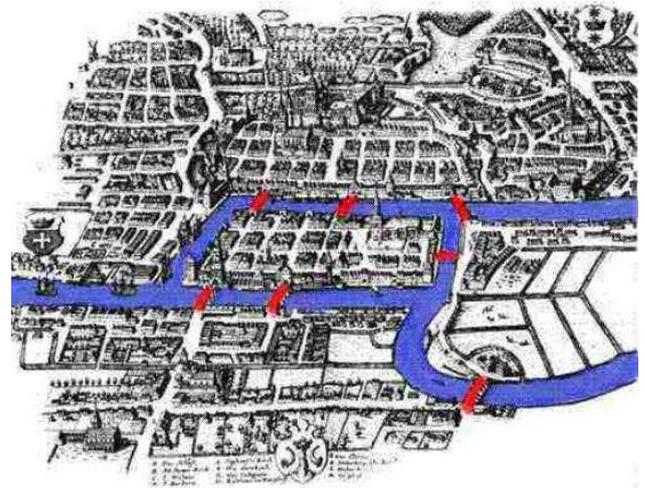
Karena adanya karakteristik propagasi tertentu untuk setiap frekuensi gelombang, bidang radio tertentu akan menghantarkan lebih baik untuk suatu penggunaan tertentu dibandingkan dengan bidang gelombang lainnya.

## III. TEORI GRAF

### A. Sejarah

Teori graf pertama kali digunakan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss, Leonhard Euler. Euler menemukan teori ini ketika memecahkan masalah jembatan Königsberg.

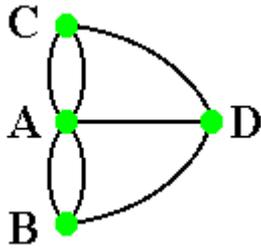
Pada abad ke-18, ada tujuh jembatan yang menghubungkan 4 daerah di Königsberg, yang sekarang bernama Kaliningrad, sebuah kota di Rusia. Kota ini merupakan tempat tinggal para bangsawan abad ke-16. Sungai Pregel membagi Königsberg menjadi empat daerah karena mengalir tepat melalui kota.



Gambar 3.1 Kota Königsberg

Penduduk setempat berusaha mencari tahu apakah ada cara yang memungkinkan mereka untuk menjalani seluruh jembatan dari sebuah titik awal dari sebuah daerah tanpa harus melewati jembatan yang sama lebih dari sekali. Solusi Euler diberikan dengan merepresentasikan jembatan dalam kota Königsberg sebagai sebuah graf dengan keempat daerah sebagai

simpulnya dan tujuh jembatan sebagai tujuh sisi graf.

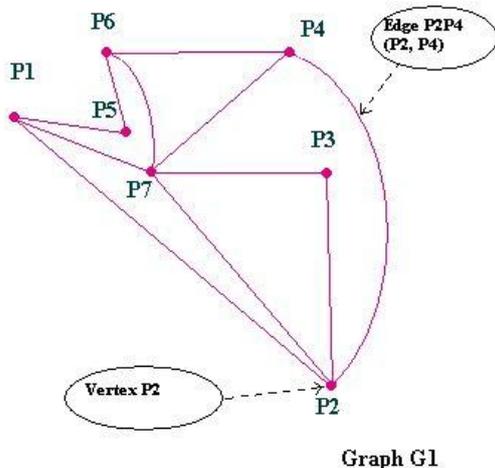


Gambar 3.2 Solusi dengan Teori Graf oleh Euler

Euler menyatakan bahwa ketujuh jembatan tidak mungkin dilalui sekali saja karena derajat seluruh simpulnya tidak genap. Ini dianggap sebagai literature pertama yang menyatakan teori graf.

### B. Konsep Dasar

Graf merupakan sekumpulan titik yang disebut simpul dan dihubungkan oleh garis yang disebut sisi. Sebuah graf  $G$  merupakan pasangan himpunan  $(V, E)$  ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$ .  $V$  merupakan himpunan tidak kosong dari simpul, sedangkan  $E$  adalah himpunan sisi. Sebuah graf harus sedikitnya memiliki sebuah simpul. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul disebut graf trivial.



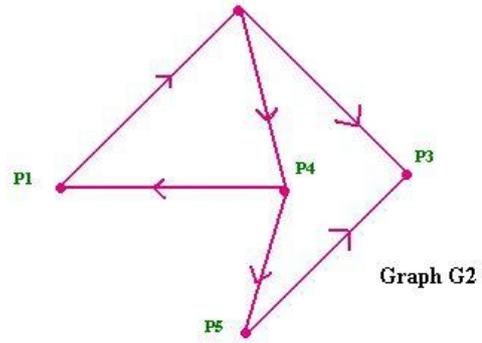
Gambar 3.3 Contoh Graf

Berdasarkan ada tidaknya helas atau sisi ganda, graf dibedakan menjadi dua jenis, yaitu

1. Graf sederhana yang tidak mengandung gelang atau sisi ganda
2. Graf tak-sederhana yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf ini ada dua macam, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*)

Berdasarkan orientasi sisi, graf dibedakan menjadi :

1. Graf tak berarah (*undirected graph*)
2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)



Gambar 3.4 Contoh Graf Berarah

Beberapa terminologi dasar graf :

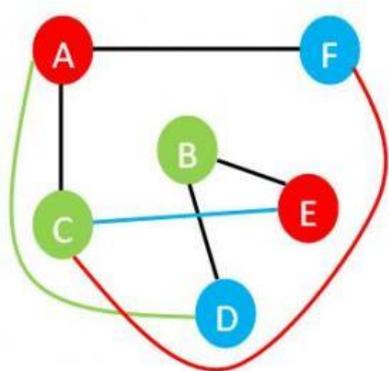
1. Bertetangga (*Adjacent*)  
Dua buah simpul pada graf tak berarah dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.
2. Bersisian (*Incident*)  
Untuk sembarang sisi  $e = (u, v)$ , sisi  $e$  dikatakan bersisian dengan simpul  $u$  dan simpul  $v$ .
3. Derajat (*Degree*)  
Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
4. Lintasan (*Path*)  
Lintasan yang panjangnya  $n$  dari simpul awal ke simpul tujuan adalah barisan berselang-seling simpul dan sisi yang membentuk sisi-sisi dari graf.
5. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)  
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus.
6. Terhubung (*Connected*)  
Suatu graf disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $u$  ke  $v$  (yang berarti ada lintasan dari  $v$  ke  $u$ ).
7. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)  
Graf yang setiap sisinya diberi harga (bobot).

## IV. PEWARNAAN GRAF

Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan daerah. Di dalam persoalan pewarnaan graf, kita tidak hanya sekedar mewarnai simpul-simpul dengan warna yang berbeda dari warna simpul tetangganya saja. Harus dicari cara untuk mewarnai graf dengan sesedikit mungkin warna sehingga dianggap lebih efisien.

### A. Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik merupakan jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul. Bilangan ini ditulis dengan simbol  $\chi(G)$ .



Gambar 4.1 Pewarnaan Simpul Graf

**B. Pewarnaan Simpul**

Pewarnaan simpul adalah member label pada simpul-simpul graf dengan warna sehingga *tidak ada* dua simpul yang memiliki sisi yang sama menggunakan warna yang sama juga. Graf yang berbentuk loop tidak akan bisa diwarnai dengan teknik ini. Oleh karena itu yang mungkin digunakan adalah graf yang tidak memiliki loop.

Terminologi penggunaan warna sama dengan peta pewarnaan. Warna merah dan biru hanya digunakan jika jumlah warna sedikit. Pewarnaan yang sebagian besar menggunakan warna kromatik disebut *k-coloring*.

Pada tahun 1976 sebagai hasil pemecahan persoalan 4-warna (*four colour problem*) yang merupakan persoalan yang sangat terkenal dalam teori graf, Appel dan Haken yang menemukan bahwa *bilangan kromatik graf planar tidak lebih dari 4*.

Sebuah graf G bersifat *k-colorable* atau *k-partite* jika ada sebuah teknik pewarnaan k untuk G. Untuk bilangan kromatik pada graf G :

$$\chi(G) = k$$

dimana G bersifat *k-chromatic*.

Graf yang hanya menggunakan satu warna adalah graf kosong. Graf Bipartite menggunakan dua warna. Teori pewarnaan 4 warna digunakan untuk graf planar. Jika tidak ditentukan, pewarnaan sebuah graf hampir selalu menggunakan teknik pewarnaan simpul.

**C. Chromatic Polynomial**

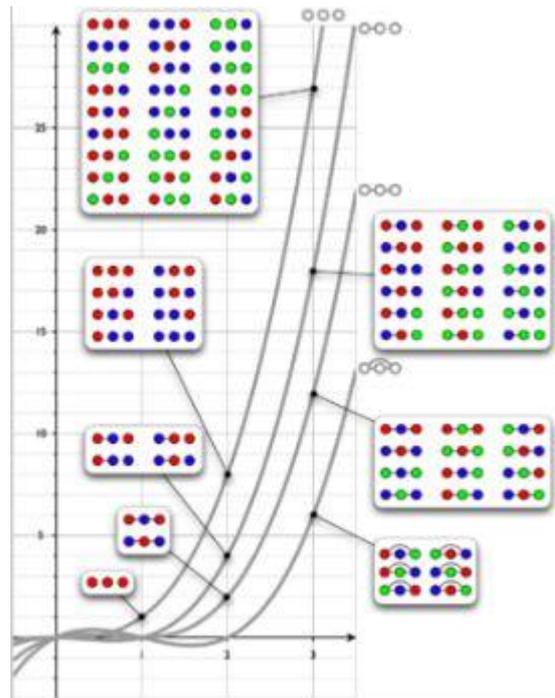
Sebuah graf G dapat memiliki berbagai cara pewarnaan simpul dan menghasilkan jumlah warna yang banyak. Chromatic polynomial menghitung jumlah dari pewarnaan simpul yang sesuai biasanya dinotasikan dengan  $P_G(k)$ ,  $\chi_G(k)$ , atau  $\pi_G(k)$ .

$$\chi(G) = \min\{k: P(G,k) > 0\}$$

Misalnya sebuah graph dengan 3 simpul tidak bisa diwarnai dengan 0 atau 1 warna saja. Diperlukan sedikitnya 2 warna untuk mewarnainya sehingga simpul yang berdekatan tidak memiliki warna yang sama dengan 2 cara. Sedangkan dengan 3 warna dapat dilakukan dengan 12 cara.

Available colors $k$	0	1	2	3
Number of colorings $P_G(k)$	0	0	2	12

Tabel 4.1 Pewarnaan  $P_3$  dengan 3 simpul



Gambar 4.2 Diagram Chromatic Polynomial

Berikut adalah chromatic polynomial untuk graf-graf tertentu :

Triangle $K_3$	$t(t-1)(t-2)$
Path graph $P_n$	$t(t-1)^{n-1}$
Tree dengan n simpul	$t(t-1)^{n-1}$
Siklus $C_n$	$(t-1)n + (-1)^n(t-1)$
Complete graph $K_n$	$t(t-1)(t-2) \dots (t-(n-1))$
Petersen graph	$t(t-1)(t-2)(t^7-12t^6-67t^5-203t^4-529t^3-814t^2-775t-352)$

Tabel 4.2 Tabel chromatic polynomial untuk graf tertentu

**D. Algoritma Welch-Powell**

Algoritma ini dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf G secara mangkus. Dengan memberikan batas atas untuk nilai  $\chi(G)$ , algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan.

Langkah-langkah algoritma :

1. Urutkan simpul-simpul dari G dalam derajat yang menurun (urutan seperti ini mungkin tidak unik karena beberapa simpul mungkin memiliki derajat yang sama).
2. Gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama (yang mempunyai derajat tertinggi) dan simpul-simpul lain (dalam urutan yang berurut)

yang tidak bertetangga dengan simpul pertama ini.

3. Mulai lagi dengan simpul derajat tertinggi berikutnya di dalam daftar terurut yang belum diwarnai dan ulangi proses pewarnaan simpul dengan warna kedua.
4. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua simpul telah diwarnai.

## V. FREQUENCY ASSIGNMENT PROBLEM

*Frequency assignment problem* pertama kali muncul di tahun 1960. Perkembangan dari layanan nirkabel seperti telepon selular pertama memulai proses kelangkaan frekuensi dalam spectrum radio. FAP yang juga dikenal sebagai *channel assignment problem*, berkembang dengan cukup cepat. Ada beberapa pemodelan dari FAP, namun ada dua kesamaan yang selalu ada, yaitu :

1. Sebuah set alat komunikasi nirkabel (atau sebuah antena) harus ditunjukkan frekuensi seperti data transmisi dari dua ujung koneksi yang mungkin.
2. Frekuensi ditunjuk ke dua koneksi yang mungkin menimbulkan interferensi yang akan mengakibatkan hilangnya sinyal. Dua kondisi yang memungkinkan terjadinya interferensi :
  - a. Kedua frekuensi dekat dengan bidang elektromagnetik
  - b. Kedua koneksi berada dekat satu sama lain sehingga sinyal terinterferensinya cukup kuat untuk mengganggu sinyal asli.

## VI. PEWARNAAN GRAF PADA FREQUENCY ASSIGNMENT PROBLEM

Dengan teknik pewarnaan simpul pada graf, dapat ditemukan jarak terkecil yang memungkinkan dua pemancar untuk melakukan transmisi data tanpa mengalami interferensi. Hal ini akan mengoptimasi penggunaan bidang frekuensi.

Langkahnya adalah dengan member warna pada setiap simpul (dalam hal ini pemancar) dengan algoritma yang telah ada. Kemudian algoritma tersebut ditambah sebuah kondisi bahwa setiap node akan mencari jalur terpendek. Kemudian jalur itulah yang akan dipilih untuk gelombang dari pemancar tersebut. Algoritma akan memilih simpul yang paling tinggi derajatnya jika ada yang bobotnya sama.

Sampai awal tahun 1980-an kebanyakan kontribusi dari penunjukan frekuensi menggunakan metode *heuristics* yang didasarkan pada pewarnaan graf. Penggunaan telepon selular digital berstandar GSM pada akhir 1980an dan awal 1990an mengakibatkan peningkatan yang terlalu tinggi untuk frequency assignment.

## VII. KESIMPULAN

Dari pemaparan pada tulisan di atas, dapat disimpulkan:

1. *Frequency Assignment Problem* adalah teknik pengoptimalan penggunaan bidang frekuensi dengan mencari dua jalur terpendek antara dua pemancar sehingga gelombang transmisi yang dipancarkan keduanya tidak mengalami interferensi.
2. Teori graf dapat diimplementasikan pada *Frequency Assignment Problem* yaitu dengan teknik pewarnaan simpul.

## REFERENCES

- [1] <http://wikipedia.org> Tanggal akses : 16 Desember 2010.
- [2] Munir, Rinaldi. (2006), *Matematika Diskrit*. Penerbit Informatika, Bandung, Indonesia.
- [3] Park, Taehoon, Chae Y. Lee, *Application of the Graph Coloring Algorithm to the Frequency Assignment Problem*. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.97.1563&rep=rep1&type=pdf>. Tanggal akses : 16 Desember 2010.
- [4] Aardal, Karen I, et al, *Models and Solution Techniques for Frequency Assignment Problems*. [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2002/01/429.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2002/01/429.pdf). Tanggal akses : 16 Desember 2010.
- [5] *Application to Graph Theory*. <http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/graph.htm>. Tanggal akses : 16 Desember 2010.
- [6] *Vertex Coloring*. <http://mathworld.wolfram.com/VertexColoring.html>. Tanggal akses : 16 Desember 2010.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2010

Margaretha Siahaan / 13509086