Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Pencarian Solusi Permainan Sudoku

Christabella Chiquita - 13509050
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
christabella.c.b@students.itb.ac.id

ABSTRAK

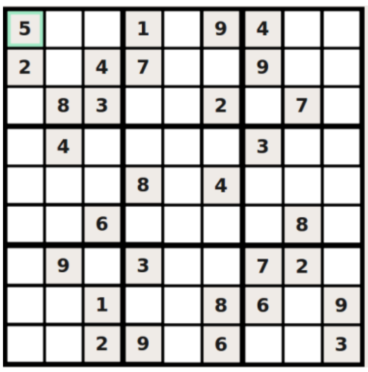
Pada makalah ini dibahas mengenai pencarian solusi untuk menyelesaikan permainan Sudoku yang sangat terkenal saat ini. Permainan Sudoku dengan ukuran n^2 x n^2 dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik pewarnaan graf. Teknik pewarnaan yang digunakan adala pewarnaan simpul. Sudoku tersebut harus diubah terlebih dahulu menjadi graf Sudoku yang mempunyai simpul n^2 x n^2 agar bisa diproses. Graf Sudoku yang diperoleh merupakan graf regular dengan derajat $3n^2 – 2n – 1$. Dengan teknik pewarnaan graf ini, dapat diperoleh solusi daripermainan Sudoku tersebut, dan dapat diketahui apakah solusi tersebut unik atau tidak. Bilangan kromatik yang diperoleh adalah n^2.

***Kata Kunci*—Sudoku, Graf Sudoku, Pewarnaan Graf, Simpul, Bilangan Kromatik.**

1. PENDAHULUAN

1.1 Permainan Sudoku

Sudoku merupakan sebuah permainan angka yang berasal dari Jepang. Sudoku merupakan sebuah singkatan "*Suuji wa dokhusin ni kagiru"* yang berarti angka-angkanya harus tetap tunggal. Permainan ini dapat mengasah otak kita karena berupa teka – teki angka berbasis logika.



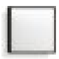
Gambar 1. Contoh Tampilan Permainan Sudoku

Permainan ini terdiri dari kotak dengan ukuran yang bervariasi, namun ukurannya secara umum berupa n^2 x n^2 dengan $n \geq 2$. Contohnya pada gambar 1, adalah Sudoku dengan n = 3. menjadi kotak yang berisi 9 x 9 kotak kecil dan terdapat 3 x 3 kotak sejumlah sembilan yang seperti yang ada pada gambar disamping ini. tujuan permainan ini untuk mengisikan angka-angka dari 1 sampai n^2 ke dalam matriks bujur sangkar n^2 x n^2, yang memuat n^2 sub-matriks berukuran n x n tanpa ada bilangan yang sama dalam suatu baris, kolom, maupun sub-matriks m x n tersebut. Permainan ini akan berakhir jika kita berhasil mengisi semua angka yang ada sesuai dengan aturan permainan ini.

Terdapat aturan dalam permainan ini yaitu :

1. Satu baris harus berisi angka satu sampai n^2, tidak boleh ada angka yang dobel/ganda.
2. Satu Kolom harus berisi angka satu sampai n^2, tidak boleh ada angka yang dobel /ganda.
3. Satu kotak kecil n x n harus berisi angka satu sampai n^2, tidak boleh ada angka yang dobel /ganda.

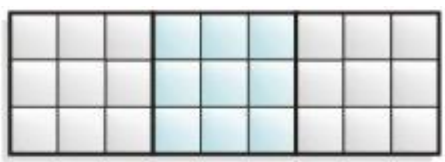
Jika diilustrasikan, untuk Sudoku dengan n = 3, pasti terdapat empat elemen sebagai berikut :



SEL : Kotak terkecil yang seharusnya berisi angka.

BOKS : Kotak lebih besar yang mengandung sembilan sel, 3×3 sel.

DERET : lajur-lajur horisontal
KOLOM : lajur-lajur vertikal.



BLOK : kumpulan tiga boks, vertikal maupun horisontal. Jadi sebuah soal Sudoku terdiri dari 81 sel, atau 9 boks, atau 9 deret, atau 9 kolom, atau 3 blok.

1.2 Graf

Graf merupakan salah satu model matematika yang merepresentasikan objek – objek diskrit dan melihat keterkaitan atau hubungan di antara objek – objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai simpul dan hubungan antarobjek sebagai sisi.

Graf memiliki banyak kegunaan. Umumnya digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan agar dapat menjadi lebih mudah. Contoh permasalahan yang dapat dimodelkan dengan menggunakan graf yaitu: penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, jaringan komunikasi, jaringan network komputer, analisis algoritma, peta, dan lain – lain. Salah satu topik yang menarik pada graf adalah masalah pewarnaan graf (*graph colouring*). Bidang ini memiliki sejarah yang sangat menarik dan teori – teorinya telah menimbulkan banyak perdebatan pada kalangan matematikawan.

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis G = (V, E), yang dalam hal ini V merupakan himpunan tidak kosong dari titik - titik dan E merupakan himpunan sisi – sisi yang menghubungkan sepasang titik.

$V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$

Atau

$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$

Di mana $e = (v_i, v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j.

Dua buah titik pada graf tak berarah G akan dikatakan bertetangga jika keduanya bersisian di sebuah sisi. Suatu simpul pada graf tak – berarah dikatakan berderajat n jika jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut berjumlah n. Hal ini dilambangkan dengan d(v). Derajat maksimum simpul yang terdapat pada suatu graf dilambangkan dengan B(G).

2. PEWARNAAN GRAF

2.1 Pengertian Pewarnaan Graf

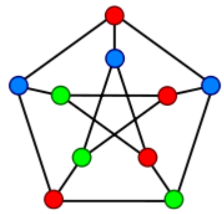
Pewarnaan graf adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya, yaitu memberikan warna pada titik-titik pada batas tertentu. Masalah utama dalam pewarnaan simpul graf adalah bagaimana mewarnai semua simpul pada graf sehingga tidak ada simpul – simpul yang bertetangga, yaitu dihubungkan oleh minimal satu buah sisi, memiliki warna yang sama. Hal ini biasanya kemudian dikaitkan dengan penggunaan warna yang seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai semua simpul disebut bilangan kromatik dari graf G, dan disimbolkan dengan χ (G).

Masalah pewarnaan graf memiliki banyak aplikasi di dalam berbagai bidang seperti dalam pembuatan jadwal, kecerdasan buatan, aliran kerja dalam proyek, pencocokan pola, dan salah satunya adalah dalam pencarian solusi permainan Sudoku.

Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu

1. Pewarnaan simpul (vertex coloring)

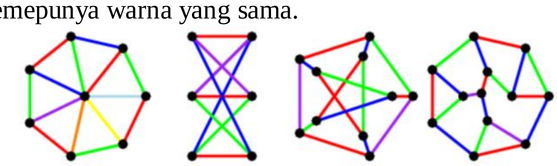
yaitu memeberikan warna berbeda pada setiap titik yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertengga dengan warna yang sama. (vertex coloring) yaitu memeberikan warna berbeda pada setiap titik yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertengga dengan warna yang sama.



Gambar 2. Contoh Pewarnaan Simpul

2. Pewarnaan sisi (edge coloring)

yaitu memberikan warna berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga tidak ada dua sisi yang bertetangga memepunya warna yang sama.



Gambar 3. Contoh Pewarnaan Sisi

3. Pewarnaan bidang

yaitu memberikan warna pada bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga mempunyai warna yang sama.

Gambar 3. Contoh Pewarnaan Bidang

2.2 Bilangan Kromatis

Bilangan kromatis adalah jumlah terkecil warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf, dengan simbol χ. Contohnya pada sebuah sebuah graf lengkap K_n bilangan kromatisnya adalah $\chi(K_n) = n$.

Berikut ini merupakan beberapa sifat bilangan kromatis ($\chi(G)$):.

1. $\chi(G) = 1 \leftrightarrow$ G adalah graf kosong (tidak terhubung sama sekali).
2. $\chi(G) \geq 3 \leftrightarrow$ G memiliki upagraf yang merupakan K_3 atau C_3
3. $\chi(G) \leq B(G)+1$.
4. $\chi(G) \leq B(G)$, kecuali jika G adalah graf lengkap atau graf lingkaran dengan jumlah simpul ganjil.
5. Untuk setiap graf planar, berlaku teorema Four-Colouring, yaitu $\chi(G) \leq 4$.
6. Bila G' adalah upagraf dari G, maka $\chi(G') \leq \chi(G)$.
7. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$.

8. Graf Lingkaran C_n memiliki $\chi(G) = 2$ bila n genap dan $\chi(G) = 3$ bila n ganjil.
9. Graf Teratur derajat n selalu memiliki $\chi(G) = n + 1$ (lihat sifat ke-3)
10. Graf Bipartit hanya membutuhkan dua warna.
11. Graf yang berupa pohon hanya membutuhkan dua warna.

2.3. Polinomial kromatis

Polinomial kromatis menghitung banyaknya cara sebuah graf dapat diwarnai sejumlah warna yang paling sedikit / minimal.

3. PEWARNAAN GRAF PADA PERMAINAN SUDOKU

Permainan sudoku merupakan salah satu aplikasi dalam masalah pewarnaan graf dan memiliki aspek kombinatorik yang menarik. Solusi permainan sudoku dapat diperoleh dengan salah satu teori graf, khususnya pewarnaan simpul. Sudoku dengan ukuran $n^2 \times n^2$ dengan $n \geqslant 2$ dapat diberi warna dengan langkah – langkah dengan ilustrasi sebagai berikut :

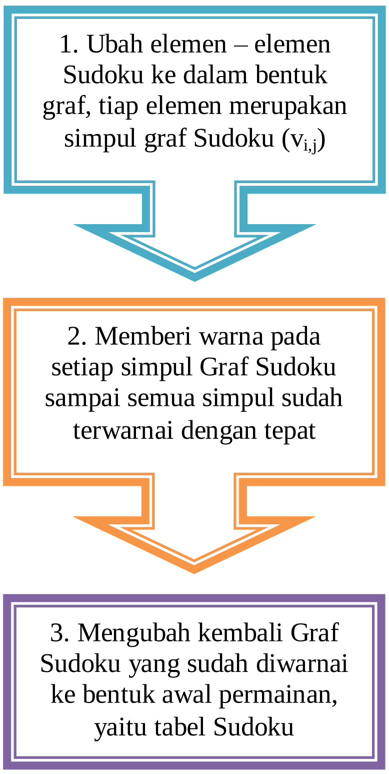
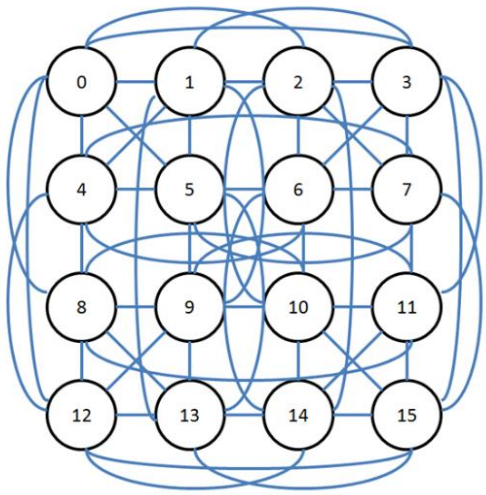


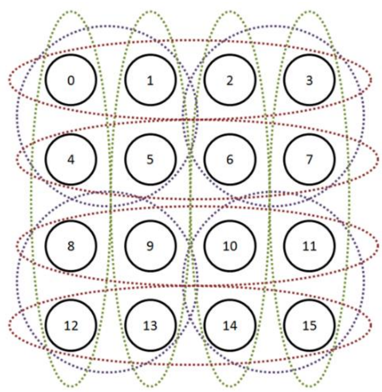
Diagram 1. Diagram Langkah Penyelesaian Sudoku

Keterangan :

1. Mengubah elemen – elemen Sudoku ke dalam bentuk Graf Sudoku di mana setiap elemen merupakan simpul graf tersebut dan dilambangkan dengan $v_{i,j}$ dengan $1 \leq i, j \leq n^2$. Simpul $v_{i,j}$ dan $v_{i',j'}$ dikatakan bertetangga jika $i = i'$ atau $j = j'$ atau $\left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{i'}{n} \right\rceil$ *dan* $\left\lceil \frac{j}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{j'}{n} \right\rceil$ yang dihubungkan oleh sebuah sisi. Sisi – sisi ini dipandang sebagai relasi dari setiap elemen – elemen bilangan pada Sudoku. Graf Sudoku yang terbentuk adalah graf reguler dengan derajat $3n^2 – 2n – 1$
2. Memberikan warna pada setiap simpul Graf Sudoku. Caranya adalah dengan memberikan warna tertentu terhadap suatu simpul, kemudian cari simpul lain yang belum diberi warna dan lakukan proses yang sama. Pencarian ini dilanjutkan pada simpul – simpul lain yang belum diberi warna sampai semua simpul sudah terwarnai dengan tepat. Dalam teori graf, jika simpul – simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak mempunyai warna yang sama disebut "warna yang tepat." Dalam penyelesaian Sudoku pun dicoba untuk meng-*extend* sebagian graf berwarna menjadi pewarnaan yang tepat.
3. Mengubah kembali Graf Sudoku yang sudah diwarnai ke bentuk awal permainan Sudoku, yaitu tabel Sudoku. Warna pada Graf Sudoku diubah menjadi bilangan pada permainan Sudoku.



Gambar 4. Contoh Graf Sudoku dengan n = 2



Gambar 5. Contoh penyederhanaan dari Gambar 4 (Simpul – simpul dikelompokkan dalam lingkaran – lingkarang yang berbeda – beda warna untuk memudahkan dalam melihat simpul – simpul yang terhubung)

3.1 Contoh Teknik Pewarnaan Graf dalam Permainan Sudoku 9 x 9

Sebagai contoh, akan digunakan Sudoku dengan n = 3 dengan nilai awal diberikan seperti Gambar 5.

		1	3	8			4	
5	4	6			1		2	
6						4	9	
4		5		3		8		1
	3	9						6
	7		8			6	3	4
	6			4	3	7		

Gambar 6. Contoh Sudoku 9 x 9

Langkah pertama, mengubah elemen – elemen Sudoku tersebut ke dalam bentuk Graf Sudoku sehingga diperoleh Graf Sudoku dengan 9 x 9 simpul, yaitu simpul $v_{i,j}$ dengan $1 \leq i$ dan $j \leq 9$. Titik $v_{i,j}$ dan $v_{i',j'}$ akan terhubung oleh sebuah sisi jika $i = i'$ atau $j = j'$ atau $\left[\frac{i}{3}\right] = \left[\frac{i'}{3}\right]$ dan $\left[\frac{j}{3}\right] = \left[\frac{j'}{3}\right]$. Dari persamaan $3n^2-2n-1 = (3n+1)(n-1)$ dapat diperoleh derajat Graf Sudoku yang digunakan. Dalam kasus ini n=3, sehingga X_3 adalah graf reguler dengan derajat 20. Dengan penyederhanaan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5, maka diperoleh Graf Sudoku yang sudah dikelompokkan dengan lingkaran – lingkaran berbeda warna, karena ilustrasi Graf Sudoku dengan menampilkan seluruh sisinya akan sulit diamati.

Gambar 7 Penyederhanaan Graf Sudoku n = 3 dengan setiap simpul menyatakan <*i,j*>

Langkah kedua adalah memberi warna untuk setiap simpul pada Graf Sudoku 9 x 9. Karena Graf Sudoku yang terbentuk adalah graf reguler dengan derajat 20, pewarnaan dapat dimulai dari simpul mana pun. Dari gambar 4, langkah – langkah pewarnaan simpul Graf Sudoku tersebut adalah sebagai berikut.

Misalkan :
1 = merah
2 = hijau
3 = biru
4 = ungu
5 = kuning
6 = merah muda
7 = oranye
8 = abu – abu
9 = cokelat

Maka berdasarkan gambar 6, graf menjadi

Gambar 8. Pewarnaan sesuai tabel awal sudoku

- Simpul $v_{3,7}$, $v_{4,2}$, $v_{6,5}$, $v_{7,4}$, $v_{8,1}$, dan $v_{9,8}$ tidak bertetangga dengan $v_{1,3}$, $v_{2,6}$, dan $v_{3,9}$ yang sudah berwarna merah dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna merah.

Gambar 9. Pewarnaan merah

- Simpul $v_{1,1}$, $v_{3,6}$, $v_{4,5}$, $v_{5,2}$, $v_{6,7}$, $v_{7,9}$, $v_{8,3}$, dan $v_{9,4}$ tidak bertetangga dengan $v_{2,8}$ yang sudah berwarna hijau, dan antara kedelapan simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna hijau.

Gambar 10. Pewarnaan hijau

- Simpul $v_{2,7}$, $v_{3,3}$, $v_{4,9}$, dan $v_{7,1}$ tidak bertetangga dengan $v_{1,4}$, $v_{5,5}$, $v_{6,2}$, $v_{8,8,}$ dan $v_{9,6}$ yang sudah berwarna biru dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna biru.

Gambar 11. Pewarnaan biru

- Simpul $v_{3,4}$, $v_{6,6}$, dan $v_{7,3}$ tidak bertetangga dengan $v_{1,8}$, $v_{2,2}$, $v_{4,7}$, $v_{5,1,}$ $v_{8,9,}$ dan $v_{9,5}$ yang sudah berwarna ungu dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna ungu.

Gambar 12. Pewarnaan ungu

- Simpul $v_{1,7}$, $v_{3,5}$, $v_{4,4}$, $v_{6,8}$, $v_{7,2}$, $v_{8,6}$, dan $v_{9,9}$ tidak bertetangga dengan $v_{2,1}$ dan $v_{5,3}$ yang sudah berwarna kuning dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna kuning.

Gambar 13. Pewarnaan kuning

- Simpul $v_{1,6}$, $v_{3,8}$, $v_{5,4}$, dan $v_{7,5}$ tidak bertetangga dengan $v_{2,3}$, $v_{4,1}$, $v_{6,9,}$ $v_{8,7,}$ dan $v_{9,2}$ yang sudah berwarna merah muda dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna merah muda.

Gambar 14. Pewarnaan merah muda

- Simpul $v_{1,9}$, $v_{2,5}$, $v_{3,1}$, $v_{4,3}$, $v_{5,8}$, $v_{6,4}$, dan $v_{7,6}$ tidak bertetangga dengan $v_{8,2}$, dan $v_{9,7}$ yang sudah berwarna oranye dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna oranye.

Gambar 15. Pewarnaan oranye

- Simpul $v_{2,9}$, $v_{3,2}$, $v_{4,6}$, $v_{6,1}$, $v_{7,8}$, dan $v_{9,3}$ tidak bertetangga dengan $v_{1,5}$, $v_{5,7}$, dan $v_{8,4}$ yang sudah berwarna abu - abu dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna abu - abu.

Gambar 16. Pewarnaan abu - abu

- Simpul $v_{1,2}$, $v_{2,4}$, $v_{3,9}$, $v_{5,6}$, $v_{7,7}$, $v_{8,5}$, dan $v_{9,1}$ tidak bertetangga dengan $v_{4,8}$, dan $v_{6,3}$ yang sudah berwarna cokelar dan antara keenam simpul tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna cokelat.

Gambar 17. Pewarnaan cokelat

Langkah ketiga yaitu mengubah kembali graf Sudoku yang sudah diberi pewarnaan dengan tepat ke dalam bentuk awal permainan yaitu tabel Sudoku. Setiap warna langsung diganti dengan angka yang diwakilinya, yaitu merah dengan 1, hijau dengan 2, biru dengan 3, dan seterusnya sampai seluruh tabel Sudoku terisi dengan angka yang benar.

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6	9	7	1	3	2	8
7	8	3	4	5	2	1	6	9
6	1	7	5	2	8	4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9	7	1	4	2	5	6
3	5	4	1	6	7	9	8	2
1	7	2	8	9	5	6	3	4
9	6	8	2	4	3	7	1	5

Gambar 18. Tabel Sudoku lengkap

3.2 Menghitung Polinomial Kromatis

Banyaknya cara pewarnaan graf G dengan k buah warna dikenal dengan sebutan polynomial kromatis. Ada tiga teorema yang menjelaskan mengenai hal tersebut, yaitu :

1. Misalkan G adalah sebuah graf terbatas dengan n buah simpul. Misalkan pula C adalah pewarnaan parsial terhadap y buah simpul dari G menggunakan M warna. Jumlah cara melengkapi warna – warna menggunakan Z warna disimbolkan dengan $P_{G,C}(Z)$, akan menghasilkan pewarnaan G yang tepat. Untuk Z ⩾ M, derajat n – y merupakan koefisien dari polinom $P_{G,C}(Z)$.
2. Misalkan G merupakan sebuah graf dengan bilangan kromatis $\chi(G)$. Misalkan pula C merupakan pewarnaan parsial G menggunakan warna sejumlah $\chi(G) - 2$ warna. Jika pewarnaan parsial bisa diselesaikan menjadi pewarnaan G yang tepat, berarti ada minimal dua cara penambahan warna yang bisa dilakukan.
3. Untuk setiap bilangan asli n, terdaat sebuah cara pewarnaan untuk sebuah graf sudoku X_n dengan mengunakan n^2 warna. Bilangan kromatis untuk X_n adalah n^2

Mengenai contoh penghitungan jumlah solusi permainan Sudoku menggunakan teori Polinomial Kromatis tidak akan dibahas lebih lanjut beserta contoh penghitungannya dalam makalah ini, karena penulis memfokuskan pada teori pewarnaan graf dalam mencari solusi Sudoku dan jumlah warna minimal yang digunakan (bilangan kromatis), bukan penghitungan banyaknya solusi.

4. KESIMPULAN

Teori Graf merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika dan komputer yang dapat diaplikasikan dalam menyelesaikan berbagai persoalam, salah satunya adalah teori graf mengenari pewarnaan simpul.

Solusi permainan Sudoku dapat diperoleh dengan mengaplikasikan teknik pewarnaan simpul, melalui tiga langkah utama yaitu mengubah tabel Sudoku menjadi Graf Sudoku, memberi pewarnaan yang tepat pada setiap simpul sesuai aturan pewaranaan simpul pada graf, dan mengubah kembali Graf Sudoku menjadi bentuk tabel Sudoku.

Untuk Sudoku dengan ukuran n^2 x n^2 dibutuhkan n^2 warna agar diperoleh pewarnaan yang tepat pada semua simpul. Jadi, bilangan kromatis untuk Sudoku berukuran n^2 x n^2 adalah n^2.

5. DAFTAR REFERENSI

[1] Davis, Tom, Coloring, http://www.geometer.org/mathcircles/coloring.pdf . Akses pada tanggal 12 Desember 2010 pk 21.00

[2] Ford, Matt, When Sudoku and Mathematics Intersect. http://arstechnica.com/science/news/2007/06/when-sudoku-and-mathematics-intersect.ars. Akses pada tanggal 13 Desember 2010 pk 23.30

[3] Graph Coloring and Its Generalizations. http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR03/ Akses pada tanggal 12 Desember 2010 pk 20.00

[4] Herzberg, Agnes; M. Ram Murty**,** Sudoku Squares and Chromatic Polynomials http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf. Akses pada tanggal 10 Desember 2010 pk 08.00

[5] Munir, Rinaldi, Diktat Kuliah IF 2153, Matematika Diskrit, Edisi Keempat, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2006.

[6] Samawa, Adeka, Pewarnaan Graf (Graph Coloring) http://adekasamawa.wordpress.com/2010/01/26/pewarnaan-graf-graph-coloring/. Akses pada tanggal 8 Desember 2010 pk 23.30

[7] Synansari, Sudoku Indonesia. http://sudokuindonesia.blogspot.com/2006/04/tehnik-dasar.html. Akses pada tanggal 13 Desember 2010 pk 22.00

[8] Wibisono, Agus, Permainan Sudoku. http://aguswibisono.com/2009/permainan-sudoku/. Akses pada tanggal 8 Desember 2010 pk 23.00

6. PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2010

ttd

Christabella Chiquita - 13509050