Art Gallery Problem

Nanda Ekaputra Panjiarga - 13509031
Program StudiTeknikInformatika
SekolahTeknikElektrodanInformatika
InstitutTeknologiBandung, Jl. Ganesha 10 Bandung40132, Indonesia
arga_nep@yahoo.com

***Abstrak*—Art Gallery Problem, atau dikenal juga dengan nama Museum adalah persoalan yang berhubungan dengan ilmu geometri dan visibilitas. Kasus ini membahas sebuah ruang galeri seni yang akan dipasangi beberapa kamera pengawas. Kamera pengawas ini diasumsikan memiliki ruang pandang 360 derajat, dapat melihat sejauh mungkin, dan pandangannya hanya dapat dihalangi oleh tembok. Kamera pengawas ini bersifat statis, yang artinya mereka akan tetap diam di posisi masing-masing sembari mengawasi lingkungan yang berada 360 derajat di sekitar mereka. Persoalannya sekarang adalah menemukan dan memosisikan kamera-kamera tersebut agar hanya diperlukan kamera sesedikit mungkin dengan seluruh area pada ruang galeri seni tersebut terawasi. Ilmu graf dan geometri dapat diaplikasikan untuk memecahkan persoalan ini. Ruangan tersebut akan dianalogikan sebagai poligon sembarang, yang titik-titik sudutnya merepresentasikan simpul-simpul dari sebuah graf. Kemudian akan dicari jumlah dan posisi penempatan simpul agar persoalan ini teratasi. Hasil dari langkah-langkah ini kemudian dirangkum dalam teorema Chvatal's art gallery. Untuk memperkecil ruang lingkup dari makalah ini, hanya akan dibahas art gallery problem dengan bentuk ruangan yang tidak memiliki lubang di tengahnya.**

***Kata Kunci*—Art Gallery Problem, Chvatal's art gallery, Geometri, Graf, Poligon**

I. Pendahuluan

Bayangkan anda adalah pemilik sebuah galeri dengan koleksi benda-benda seni yang berharga. Galeri anda merupakan sebuah ruangan yang bentuknya poligon bebas sesuai dengan imajinasi anda. Galeri ini dapat berbentuk bujur sangkar sederhanaataupun bentuk rumit dengan belasan sudut dan sisi. Untuk melindungi benda-benda seni berharga yang dipamerkan di galeri anda, anda akan memasang kamera-kamera pengawas di titik-titik tertentu. Persoalan selanjutnya adalah efisiensi. Muncul pertanyaan seperti "Berapa jumlah kamera minimal yang dibutuhkan agar seluruh ruangan terawasi?" dan "Dimana kamera-kamera tersebut harus diletakkan?" Persoalan ini kemudian dinamakan *Art Gallery Problem.*

Art Gallery Problem pertama kali diperkenalkan oleh Victor Klee di tahun 1973 dalam sebuah diskusi dengan Vaclav Chvatal. Persoalan ini telah dipelajari secara mendalam selama dekade terakhir dalam berbagai kemungkinan variasi. Dalam makalah ini akan dibahas persoalan paling sederhana dari variasi-variasi yang ada, yaitu pengamanan sebuah ruang galeri sederhana yang berbentuk poligon tanpa lubang di dalamnya. "Tanpa lubang" berarti interior dan eksterior ruangan tersebut merupakan sebuah kesatuan yang tidak terpisah-pisah.

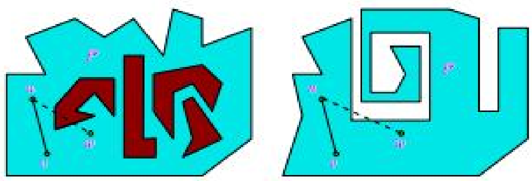
Tujuan dari makalah ini adalah untuk menemukan dan memahami solusi dasar dari Art Gallery problem ini. Dalam pencarian solusi dari persoalan ini, diperlukan pemahaman akan ilmu graf dan geometri poligon pada struktur diskrit. Karena itulah pada bab pendahuluan ini akan diberikan sedikit pembahasan mengenai graf dan poligon.

II. Poligon dan Visibilitas

A. Poligon

Kata "Poligon" berasal dari kata yunani *polus* yang memiliki arti "banyak" dan kata *gonia* yang memiliki arti "sudut".

Sebuah poligon P didefinisikan sebagai daerah tertutup pada suatu bidang yang dibatasi oleh garis-garis lurus yang terhitung sehingga terdapat jalur di antara dua sudut dari P yang tidak memotong sisi manapun dari P. Jika sisi dari P terdiri dari dua atau lebih siklus, maka P adalah poligon dengan lubang.



(a) (b)

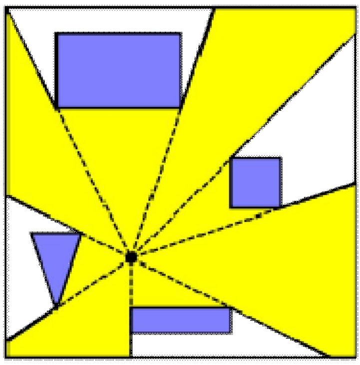
Gambar 2.1 (a) Poligon dengan lubang, dan (b) Poligon tanpa lubang.

Poligon konveks adalah poligon yang setiap dua titik didalamnya dapat disatukan oleh sebuah garis lurus yang tidak memotong sisi poligon. Segitiga, bujur sangkar, dan poligon-poligon beraturan lainnya merupakan contoh poligon konveks.

B. Visibilitas

Jika terdapat sebuah titik u dan sebuah titik v sebagaimana terlihat pada gambar, maka u dinyatakan terlihat oleh v bila terdapat garis lurus yang menghubungkan u dan v yang tidak memotong sisi manapun dari poligon P. Dalam gambar 2.1, u terlihat oleh v namun tidak terlihat oleh w.

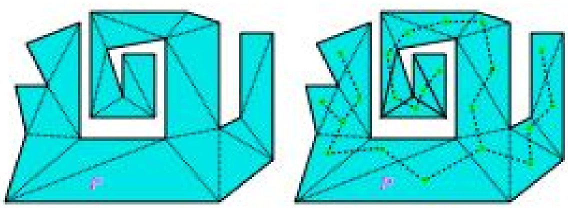
Poligon visibilitas atau *daerah visibilitas* dari sebuah titik p adalah poligon yang merepresentasikan daerah pandang dari titik p tersebut. Poligon ini dibentuk dari daerah yang merupakan kumpulan titik-titik yang terlihat oleh titik asal p. Contoh Poligon visibilitas dapat dilihat pada gambar 2.2.



Gambar 2.2 Poligon Visibilitas yang ditandai dengan warna kuning.

C. Triangulasi Poligon

Triangulasi Poligon adalah proses pembagian poligon menjadi poligon-poligon kecil yang berbentuk segitiga. Caranya adalah dengan menghubungkan titik-titik sudut yang saling terlihat sedemikian rupa sehingga terbentuk segitiga. Garis yang menyatukan dua titik sudut tersebut disebut diagonal poligon.



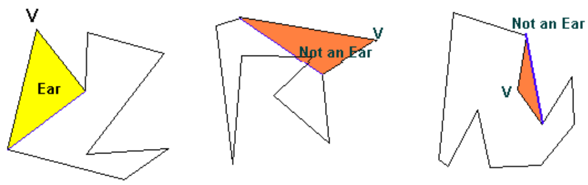
(a) (b)

Gambar 2.3 (a) Hasil triangulasi sebuah poligon sederhana. (b) Terdapat pohon yang bersesuaian.

Apakah semua poligon sederhana dapat ditriangulasi? Jawabannya adalah ya. Untuk membuktikannya, lihat terlebih dahulu kedua teorema berikut.

Teorema 2.1 Semua poligon sederhana dapat ditriangulasi.
Teorema 2.2 Semua poligon sederhana mempunyai dua telinga.

Telinga poligonal adalah area di depan suatu sudut V yang berbentuk segitiga, yang dibentuk oleh V dan dua sudut lainnya, dimana seluruh area tersebut berada di dalam poligon P dan tidak terdapat sudut lain di dalamnya. (gambar 2.4)



(a) (b) (c)

Gambar 2.4 (a) merupakan telinga poligonal, (b) dan (c) bukan merupakan telinga poligonal

Teorema kedua dapat dibuktikan dengan induksi matematika.

Basis: kita memiliki poligon 4 sudut. Poligon ini dapat dipisahkan menjadi dua segitiga yang merupakan dua telinga dari poligon tersebut.

Hipotesis Induksi: Setiap poligon sederhana dengan sudut kurang dari n mempunyai dua telinga.

Langkah Induksi: P adalah poligon dengan n sudut. Jika V adalah salah satu sudut konkaf P, maka V dan dua sudut disebelahnya bisa membentuk telinga atau tidak.

Kasus pertama katakanlah V membentuk telinga. Ketika telinga ini dipisahkan dari poligon P, maka terbentuk poligon baru dengan sudut n-1, sehingga poligon tersebut pasti memiliki dua telinga.

Pada kasus kedua katakanlah V tidak membentuk telinga. Berarti paling tidak ada satu sudut z yang memasuki area yang dibentuksegitiga V dan dua sudut sebelahnya. Ketika V dihubungkan dengan z, maka poligon akan terbagi menjadi dua poligon yang masing-masing mempunyai sudut kurang dari n, sehingga menurut hipotesis mereka mempunyai dua telinga. Maka dengan ini teorema kedua terbukti.

Teorema pertama dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema kedua. Karena setiap poligon memiliki setidaknya dua telinga, kita mendapatkan metode untuk membuktikan teorema ini. Misalkan diambil sudut V dimana terdapat telinga P. Hilangkan V dan tambahkan sisi antara kedua tetangganya. Sekarang terdapat poligon Pnew tanpa sudut V. Lakukan hal ini secara berulang sampai tercipta suatu segitiga. Garis-garis yang diciptakan untuk membuat poligon baru adalah diagonal-diagonal yang mentriangulasi P.

Triangulasi Poligon memiliki sifat-sifat yang ditunjukkan oleh beberapa lemma dan corollary sebagai berikut:

Lemma 2.1 Setiap triangulasi dari sebuah poligon tanpa lubang P yang memiliki n sudut mempunyai n-3 diagonal dan n-2 segitiga.
Corollary 2.1 Jumlah sudut internal dari sebuah poligon sederhana dengan n sudut adalah $(n-2)\pi$.
Lemma 2.2 Dual dari triangulasi sebuah poligon adalah pohon.

III. GRAF DAN PEWARNAANNYA

Aspek penting dari ilmu graf yang digunakan dalam makalah ini adalah pewarnaannya. Karena itu dalam bab ini akan sedikit diperkenalkan definisi dan contoh-contoh graf serta bagaimana proses pewarnaannya.

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungannya. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Graf G adalah pasangan himpunan (V,E), yang dalam hal ini:

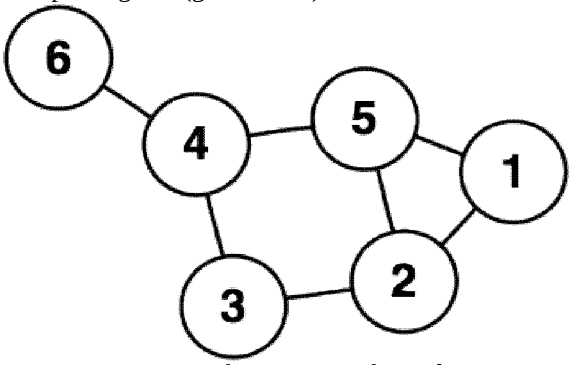
V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (vertices atau node) = { v_1, v_2, ..., v_n }

dan

E = himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul = { e_1, e_2, ... e_n }

atau dapat disingkat G(V,E).

Secara geometri graf digambarkan sebagai sekumpulan titik simpul di atas bidang yang dihubungkan dengan sekumpulan garis. (gambar 3.1)



Gambar 3.1 Contoh Graf

A. Terminologi Dasar

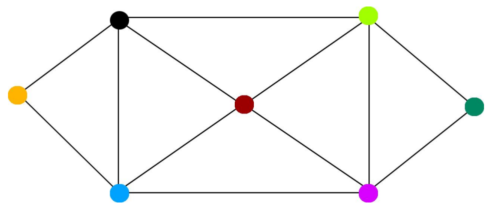
Di bawah ini akan didefinisikan terminologi yang berkaitan dengan graf.

1. *Bertetanggaan* (Adjacent)
   Dua buah simpul pada graf G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.
2. *Bersisian (Incident)*
   Untuk sembarang sisi c = (Vj,Vk), sisi c dikatakan bersisian dengan simpul Vj dan simpul Vk.
3. *Simpul Terpencil (Isolated Vertex)*
   Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya
4. *Graf Kosong (Null Graph atau Empty Graph)*
   Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.
5. *Derajat (Degree)*
   Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
   Pada graf berarag, derajat simpul dinyatakan dengan jumlah busur yang masuk + jumlah busur yang keluar.
6. *Lintasan (Path)*
   Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal ke simpul tujuan dalam graf g adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang merupakan bagian dari graf G.
7. *Terhubung (Connected)*
   Graf tak berarah G disebut graf terhubung bila untuk setiap pasang simpul di G terdapat lintasan yang saling menghubungkan.
   Graf berarah G dikatakan terhubung bila graf tak berarahnya terhubung.
   Graf berarah G dikatakan terhubung kuat bila untuk setiap pasang simpul sembarang di G terhubung kuat (terdapat lintasan dari kedua arah).

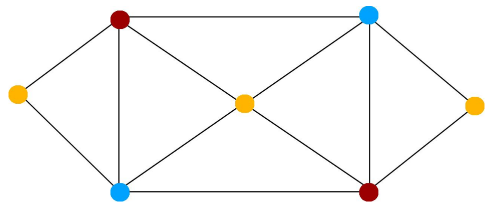
B.Pewarnaan Graf (Graph Colouring)

Dalam makalah ini, yang akan dibahas adalah pewarnaan simpul dari graf. Pewarnaan simpul adalah memberi warna pada simpul-simpul suatu graf sedemikian rupa sehingga tidak ada dua simpul bertetanggaan mempunyai warna sama.

Pewarnaan tidak hanya sekedar mewarnai simpul-simpul dengan warna berbeda tetapi juga meminimalisasi frekuensi kemunculan semua warna. Sebagai contoh, pada gambar 3.2 dapat kita lihat contoh pewarnaan graf yang optimal bila dibandingkan dengan pewarnaan yang tidak optimal.



(a)



(b)

Gambar 3.2 Contoh pewarnaan simpul pada suatu graf secara (a) tidak optimal dan (b) optimal

Pada gambar 3.2, sebenarnya graf dapat diwarnai hanya dengan tiga warna saja, yaitu merah, biru, dan kuning. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul disebut bilangan kromatik graf G, disimbolkan dengan χ(G).

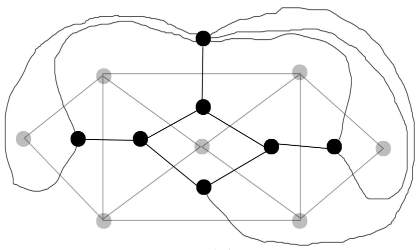
C. Graf Dual (Dual Graph)

Misalkan kita mempunyai sebuah graf planar G yang direpresentasikan sebagai graf bidang. Kita dapat membuat suafu graf G* yang secara geometri merupakan dual dari graf planar tersebut dengan cara sebagai berikut:

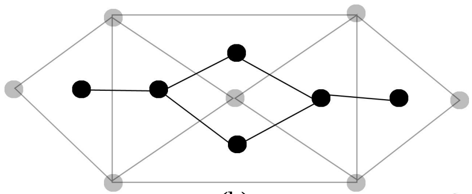
1. Buat sebuah simpul v* yang merupakan simpul untuk G* pada setiap wilayah muka f di G.
2. Untuk setiap sisi e di G, tarik sisi e* (yang menjadi

sisi G*) yang memotong sisi e tersebut. Hubungkan simpul-simpul v* yang telah dibuat sebelumnya.

Graf G* yang terbentuk dengan cara penggambaran demikian disebut graf dual (atau tepatnya dual geometri) dari graf G. Di bawah ini terdapat contoh graf dual dari graf pada gambar 3.2. Pada contoh (b), graf dual tidak menggunakan bidang luar sebagai simpul. Graf dual ini yang akan kita gunakan dalam pembahasan makalah ini.



(a)



(b)

Gambar 3.3 (a) Dual graf yang menggunakan bidang luar sebagai simpul (b) Dual graf yang tidak menggunakan bidang luar sebagai simpul.

IV. TEOREMADANPEMBUKTIANSOLUSIART GALLERY PROBLEM

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, art gallery problem membahas sebuah ruangan berbentuk poligon sembarang yang akan dipasangi kamera pengawas untuk memastikan seluruh bagian ruangannya terawasi. Terdapat banyak variasi dari persoalan ini. Sebagai contoh ruangan tersebut bisa saja memiliki lubang di dalamnya, terdapat syarat tambahan bahwa kamera tidak dapat diletakkan di salah satu sisi ruangan, dan sebagainya.

Dalam makalah ini akan dibahas versi dimana kamera harus diletakkan di salah satu sudut ruangan dan ruangan tersebut tidak memiliki lubang di dalamnya. Tidak memiliki lubang berarti interior dan eksterior ruangan tersebut merupakan satu kesatuan yang tidak terpisah-pisah.

Selain itu, akan diasumsikan kamera yang kita gunakan memiliki ruang pandang sejauh mungkin dengan sudut 360 derajat. Kamera dapat mencapai sudut ruangan manapun selama tidak ada tembok yang menghalanginya.

Pertanyaan paling mendasar mungkin “Berapa kamera yang dibutuhkan untuk sebuah galeri dengan bentuk bujur sangkar?” Jawabannya adalah satu. Kamera tersebut dapat diletakkan dimanapun pada galeri tersebut. Lebih jauh lagi, semua poligon yang berbentuk konveks dapat dilindungi dengan menggunakan satu kamera. Namun, persoalan menjadi rumit ketika poligon tersebut memiliki bentuk yang kompleks.

Untuk memecahkan masalah ini dengan metode komputasi geometri, bentuk ruangan galeri dianalogikan sebagai poligon sederhana tanpa lubang, dan tiap kamera direpresentasikan oleh titik-titik dalam poligon tersebut. Sebuah himpunan titik S dinyatakan melindungi poligon dengan baik bila dari setiap titik p di poligon tersebut, terdapat q ∈ S sehingga garis lurus di antara p dan q tidak memotong sisi poligon.

A. Teorema Chvatal’s Art Gallery

Teorema Chvatal’s art gallery, yang dinamakan atas Vaclav Chvatal, memberikan batas atas dari jumlah minimal kamera.Teorema ini berbunyi:

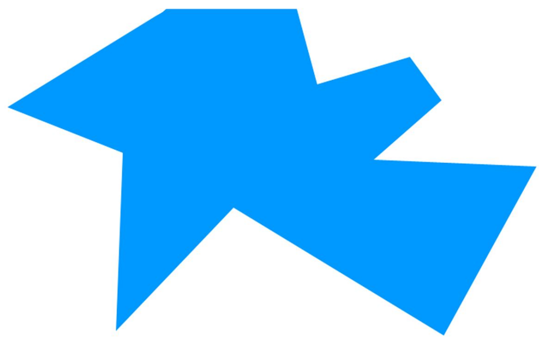
Teorema 3.1 Sebuah poligon sederhana yang memiliki sudut sebanyak n selalu cukup diawasi oleh $\lfloor n/3 \rfloor$kamera.
Lemma 3.1 Semua sudut pada P dapat diwarnai dengan hanya 3 warna (sebagai contoh, {1,2,3}) sehingga dua sudut yang dihubungkan oleh salah satu sisi P atau oleh diagonal dalam triangulasi P memiliki dua warna yang berbeda.

Persoalan ini dilontarkan oleh Victor Klee pada tahun 1973 dan kemudian dibuktikan oleh Chvatal. Pembuktian Chvatal kemudian disimplifikasi oelh Steve Fisk dengan menggunakan graf 3 warna.

B. Pembuktian Fisk

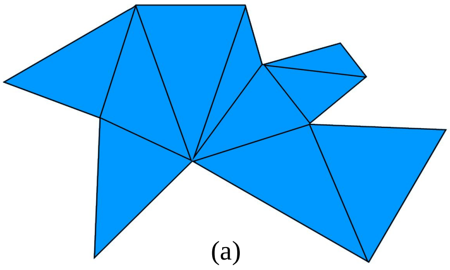
Pada tahun 1978, Steve Fisk membuktikan teorema Chvatal dengan metode berikut.

Misalkan ruang galeri yang akan kita bahas memiliki bentuk seperti pada gambar 4.1. Dalam kasus ini ruangan kita memiliki 12 sisi dengan 12 simpul.

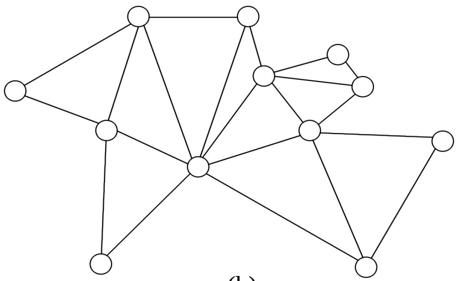


Gambar 4.1 Ruang galeri yang direpresentasikan sebagai poligon sembarang.

Pertama, poligon ditriangulasi tanpa menambahkan sudut atau titik baru di dalamnya. Hasil triangulasi ini kemudian direpresentasikan sebagai graf, dimana titik-titik sudut merupakan simpul dari graf, dan garis yang menghubungkannya sebagai sisinya.



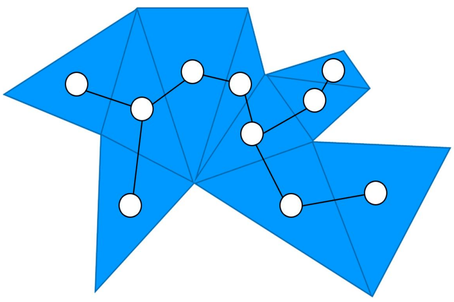
(a)



(b)

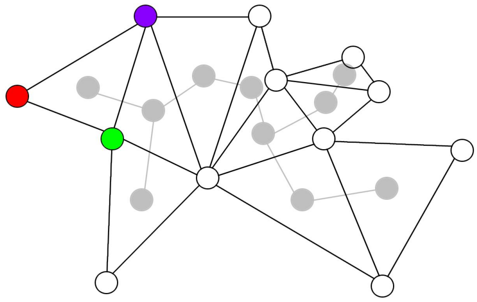
Gambar 4.2 (a) Hasil triangulasi poligon, dan (b) Graf yang dibentuk oleh triangulasi poligon.

Langkah selanjutnya adalah mewarnai titik-titik sudut pada poligon tersebut dengan 3 warna. Kenapa harus 3 warna? Karena tiap hasil triangulasi merupakan sebuah segitiga, maka simpul-simpul graf yang terdapat di masing-masing segitiga kecil harus diwarnai dengan 3 warna berbeda. Dengan demikian, pada akhirnya kita dapat memilih salah satu warna untuk menempatkan seluruh kamera di titik-titik dengan warna tersebut. Karena semua segitiga memiliki warna tersebut, maka kita dapat memastikan bahwa seluruh poligon terawasi oleh kamera.

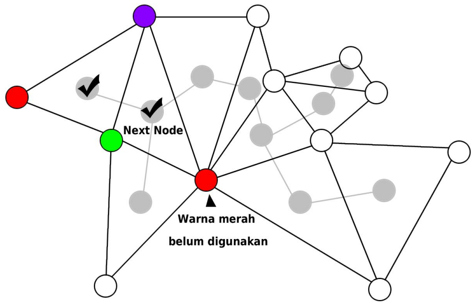


Gambar 4.3 Pohon hasil dual dari graf hasil triangulasi.

Beginilah langkah mewarnai graf tersebut. Buatlah dual dari graf yang terbentuk oleh triangulasi poligon (gambar 4.3). Hasilnya adalah sebuah pohon. Lalu pilihlah salah satu simpul pohon tersebut, dan warnai 3 simpul yang merupakan simpul pada graf yang mengelilingi simpul pada pohon itu dengan 3 warna berbeda. Kemudian traversal ke simpul-simpul pohon berikutnya. 2 simpul pada area berikutnya pasti sudah diwarnai, sehingga kita hanya perlu menambahkan warna yang belum ada pada simpul sisa. (gambar 4.4)



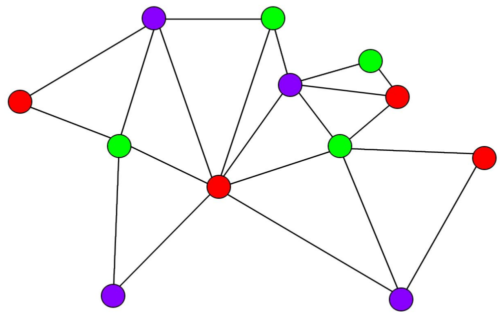
(a)



(b)

Gambar 4.4 Langkah-langkah pewarnaan simpul

Setelah semua simpul selesai diwarnai, carilah warna yang memiliki jumlah paling sedikit. Dalam contoh ini, semua warna memiliki jumlah yang sama yaitu 4 simpul. (gambar 4.5) Sehingga jumlah kamera maksimal yang dibutuhkan adalah 4 kamera. Hal ini sesuai dengan teorema Cvathal's art gallery yang menyatakan bahwa jumlah kamera yang selalu cukup bila dibutuhkan ruangan dengan n sudut adalah $\lfloor n/3 \rfloor$kamera.



Gambar 4.5 Semua simpul telah selesai diwarnai

V. KESIMPULAN

Untuk setiap galeri dengan bentuk poligon sembarang dengan n sisi dan n sudut tanpa lubang di dalamnya, dibutuhkan paling banyak $\lfloor n/3 \rfloor$kamera pengawas untuk memastikan seluruh area dalam ruang poligon tersebut terawasi.

Teorema ini telah dibuktikan dengan mengaplikasikan ilmu geometri poligon dan graf di bidang struktur diskrit.

VII. TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya makalah ini. Tidak lupa penulis juga mengucapkan terima kasih kepada bapak Rinaldi Munir dan ibu Harlili selaku pengajar telah memberikan kesempatan bagi penulis untuk menuntut ilmu sebanyak-banyaknya. Selain itu, ucapan terima kasih juga diberikan kepada orang tua dan teman-teman informatika, atas semangat dan dukungannya dalam menjalani hari-hari kuliah.

Akhir kata, penulis berharap karya tulis ini dapat bermanfaat bagi orang lain dan ilmunya dapat disebarluaskan.

REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi, "Diktat Kuliah IF 2091 StrukturDiskrit", Program StudiTeknikInformatika, SekolahTeknikElektro danInformatika, InstitutTeknologi Bandung, 2008
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Art_gallery_problem Selasa, 14 Desember 2010 08:32
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Visibility_polygon Selasa, 14 Desember 2010 08:45
[4] http://id.wikipedia.org/wiki/Teori_graf Selasa, 14 Desember 2010 09:55
[5] http://www.cse.iitd.ernet.in/~ssen/cs852/scribe/lect12/lec1_2.pdf Selasa, 14 Desember 2010 08:35
[6] http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/cg-projects/97/Thierry/thierry507webprj/artgallery.html Selasa, 14 Desember 2010 08:36
[7] http://www.tcs.tifr.res.in/~ghosh/artgallery.pdf Selasa, 14 Desember 2010 08:36

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2010

ttd

Nanda Ekaputra Panjiarga - 13509031