

Penggunaan Senarai Sirkuler dan Permutasi Inversi untuk Pengurutan pada *Josephus Problem*

Ali Akbar Septiandri - 13509001
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13509001@std.stei.itb.ac.id

Abstrak—*Josephus Problem* adalah salah satu masalah dalam kombinatorial. Masalah ini bermula dari kasus dalam sejarah sekitar abad pertama. *Josephus Flavius*, seorang Yahudi yang menjadi tawanan pasukan Romawi saat itu, menjadi sumber dari permasalahan ini. Dari orang-orang yang akan membunuh diri masing-masing dalam lingkaran secara berurutan, dia mencari cara agar dia menjadi orang yang terakhir sehingga dia tidak perlu membunuh dirinya sendiri. Dalam hal tersebut, yang dilakukan oleh *Josephus* kurang lebih adalah melakukan pengurutan akan giliran untuk bunuh diri. Kasus tersebut dapat dijabarkan dengan menggunakan salah satu dasar dari kombinatorial, yaitu permutasi. Namun, permutasi yang digunakan di sini lebih digeneralisasi lagi dengan menggunakan permutasi inversi. Dalam hal programming, kasus ini dapat direpresentasikan sebagai sebuah senarai sirkuler. Dalam makalah ini, akan sedikit dijelaskan pula mengenai fungsi rekursif untuk menentukan orang yang terakhir dieksekusi dalam *Josephus Problem*.

Kata Kunci—*Josephus Problem*, kombinatorial, permutasi inversi, senarai sirkuler

I. PENDAHULUAN

Kombinatorial (*combinatoric*) adalah salah satu cabang dalam matematika yang membahas tentang kombinasi, dan kombinasi tersebut dapat berupa himpunan, graf, matriks, rute lalu lintas, manusia, dan sebagainya. Dalam buku *Matematika Diskrit* yang ditulis oleh Rinaldi Munir, “Kombinatorial (*combinatoric*) adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek.”

Lebih dari satu dekade yang lalu, saat kuliah tentang subjek ini pertama kali memasuki kurikulum sarjana, kombinatorial sering dianggap remeh. Akan tetapi, karena fakta menunjukkan bahwa soal-soal yang ada dalam kombinatorial acap kali masuk akal, walaupun jawabannya cukup susah didapatkan, maka kuliah kombinatorial pun menjadi menarik.

Kombinatorial berfokus pada pengaturan objek dari suatu himpunan menjadi pola yang memenuhi aturan-aturan tertentu. Kombinatorial berhubungan dengan eksistensi, enumerasi, analisis, dan optimasi dari struktur diskrit (Brualdi, 2004). Dua jenis masalah yang biasanya muncul adalah:

1. Kemungkinan penyusunan. Jika seseorang ingin

menyusun objek-objek dari suatu himpunan sehingga kondisi-kondisi tertentu terpenuhi, penyusunan tersebut mungkin tidak selalu ada.

2. Enumerasi atau klasifikasi dari penyusunan. Jika penyusunan tersebut memungkinkan, mungkin akan ada beberapa cara untuk melakukannya.

Dari masalah-masalah yang telah diungkapkan sebelumnya, maka dapat diturunkan beberapa bahasan dalam kombinatorial, antara lain kaidah pencacahan, permutasi dan kombinasi, dan koefisien binomial. Dalam makalah ini, pokok bahasan yang akan dimunculkan akan terkait dengan salah satu objek kombinatorial yang mendasar: permutasi. Nantinya, permutasi tersebut akan dikembangkan lebih jauh lagi menjadi permutasi inversi dan penerapannya dalam *Josephus Problem*. Namun, sebelum itu, akan dibahas terlebih dahulu mengenai kaidah perkalian.

A. Kaidah Perkalian

Sebelum memasuki permutasi, terlebih dahulu akan dibahas salah satu kaidah yang mendasari kombinatorial, yaitu kaidah perkalian. Kaidah perkalian sendiri nantinya akan menyusun rumusan yang ada dalam permutasi dan kombinasi.

Kaidah perkalian menyebutkan bahwa jika kita mengasumsikan S adalah himpunan dari pasangan teratur dari suatu objek, dengan objek pertama a dari himpunan dengan ukuran p , dan untuk setiap pilihan objek a terdapat q pilihan untuk objek b , maka ukuran dari S adalah $p \times q$:

$$|S| = p \times q \quad (1.1)$$

Contohnya, jika memiliki 5 buah baju dan 3 buah celana, maka banyaknya cara memilih 1 baju dan 1 celana adalah $5 \times 3 = 15$ cara. Dari contoh tersebut, kita juga dapat melihat perluasan dari kaidah dasar menghitung. Misalkan ada n percobaan, masing-masing dengan pi hasil, maka dengan kaidah perkalian, didapatkan $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ hasil.

B. Permutasi

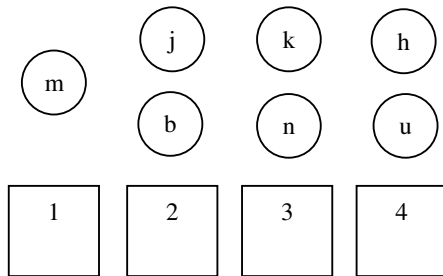
Dalam buku *Implementing Discrete Mathematics*,

dikatakan bahwa kita dapat mendefinisikan permutasi sebagai pengurutan dari bilangan bulat dari 1 sampai n tanpa pengulangan. Permutasi sebagai operasi menentukan peletakan setiap objek dari n objek dalam posisi yang berbeda. "Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek." (Munir, 2005)

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian. Misalkan jumlah objek adalah n , maka urutan pertama dipilih dari n objek, urutan kedua dipilih dari $n - 1$ objek, urutan ketiga dipilih dari $n - 2$ objek, begitu seterusnya, dan urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n - 1)(n - 2)\dots(2)(1) = n! \quad (1.2)$$

Misalkan ada tujuh buah bola yang berbeda warna dan ada empat buah kotak. Jika setiap kotak hanya dapat diisi satu buah bola, maka jumlah urutan berbeda yang mungkin dalam penempatan bola ke dalam kotak dapat dihitung dengan menggunakan permutasi.



Gambar 1.1 Ilustrasi penempatan bola pada kotak

Perhitungan untuk pengisian kotak akan sebagai berikut: 1. Kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 7 bola (7 pilihan); 2. Kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (6 pilihan); 3. Kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (5 pilihan); 4. Kotak 4 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (4 pilihan).

Perampatan dari perhitungan tersebut akan mengakibatkan untuk n buah bola dan r buah kotak dengan $r \leq n$ akan didapatkan bahwa kotak 1 dapat diisi oleh n pilihan, kotak 2 dapat diisi oleh $n - 1$ pilihan, kotak 3 dapat diisi oleh $n - 2$ pilihan, hingga kotak r dapat diisi oleh $n - (r - 1)$ pilihan. Menurut kaidah perkalian, jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah

$$n(n - 1)(n - 2)\dots(n - (r - 1)) \quad (1.3)$$

Rumus (1.3) disebut *permutasi-r* yang dilambangkan dengan $P(n, r)$, yaitu

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2)\dots(n - (r - 1)) = \frac{n!}{n - r!} \quad (1.4)$$

C. Permutasi Inversi

Permutasi inversi adalah permutasi yang setiap objek dan letak tiap-tiap objek yang ada di dalamnya (dalam contoh ini angka) diubah. Contohnya,

$$p_1 = \{3, 8, 5, 10, 9, 4, 6, 1, 7, 2\}$$

$$p_2 = \{8, 10, 1, 6, 3, 7, 9, 2, 5, 4\}$$

adalah permutasi inversi, karena 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dan 10 yang ada di p_1 juga terdapat di p_2 , dan tiap-tiap posisinya berubah. Permutasi inversi terkadang disebut juga permutasi konjugasi atau permutasi resiprokal.

Asumsikan $i_1i_2\dots i_n$ adalah permutasi dari himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$. Pasangan (i_k, i_l) disebut sebuah inversi jika $k < l$ dan $i_k > i_l$. Jadi, sebuah inversi dalam permutasi berkaitan dengan sepasang bilangan yang berada di luar urutan asalnya. Sebagai contoh, permutasi 31524 mempunyai empat inversi, yaitu (3, 1), (3, 2), (5, 2), (5, 4). Satu-satunya permutasi dari $\{1, 2, \dots, n\}$ yang tidak mempunyai inversi adalah $12\dots n$. Untuk permutasi $i_1i_2\dots i_n$ kita akan menyebut a_j sebagai bilangan dari inversi yang komponen keduanya adalah j . Dengan kata lain, a_j sama dengan jumlah angka yang mendahului j dalam permutasi, tetapi lebih besar dari j (untuk mengukur seberapa besar ketidakterurutan j).

Urutan bilangan a_1, a_2, \dots, a_n disebut *urutan inversi* dari permutasi $i_1i_2\dots i_n$. Jumlah dari $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ mengukur ketidakterurutan dari permutasi. Sebagai contoh, urutan inversi dari permutasi 31524 adalah 1, 2, 0, 1, 0. Penjelasan, $a_1 = 1$ berarti angka yang lebih besar dari '1' tetapi berada sebelum '1' dalam 31524 hanya '3', $a_2 = 2$ berarti angka yang lebih besar dari '2' tetapi berada sebelum '2' pada 31524 ada 2, yaitu '3' dan '5', demikian seterusnya.

Urutan inversi a_1, a_2, \dots, a_n dari permutasi $i_1i_2\dots i_n$ akan memenuhi kondisi

$$0 \leq a_1 \leq n - 1, 0 \leq a_2 \leq n - 2, \dots, 0 \leq a_n - 1 \leq 1, a_n = 0$$

Ini mungkin terjadi karena untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$ terdapat $n - k$ bilangan bulat dalam himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$ yang lebih besar dari k . Dengan menggunakan kaidah perkalian, kita dapat melihat bahwa jumlah dari urutan bilangan bulat b_1, b_2, \dots, b_n dengan

$$0 \leq b_1 \leq n - 1, 0 \leq b_2 \leq n - 2, \dots, 0 \leq b_n - 1 \leq 1, b_n = 0 \quad (1.5)$$

akan sama dengan (1.2).

Dari permutasi yang berbeda untuk $\{1, 2, \dots, n\}$ akan diperoleh urutan inversi yang berbeda pula. Jika kita dapat menunjukkan bahwa setiap urutan dari bilangan bulat b_1, b_2, \dots, b_n yang memenuhi (1.5) adalah urutan inversi dari permutasi untuk $\{1, 2, \dots, n\}$, maka dengan *pigeonhole principle* dapat dilihat bahwa permutasi yang berbeda akan memiliki urutan inversi yang berbeda pula.

Permutasi inversi bekerja dengan menggeser angka satu

per satu. Jika permutasi $i_1 i_2 \dots i_n$ mempunyai urutan inversi b_1, b_2, \dots, b_n dan $k = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ adalah jumlah dari inversinya, maka $i_1 i_2 \dots i_n$ dapat dibuat menjadi $12 \dots n$ dengan k kali pertukaran angka yang bersebelahan. Kita akan menggeser '1' ke kiri sebanyak b_1 kali, menggeser '2' sebanyak b_2 kali, dan seterusnya. Hingga pada akhirnya akan sampai ke $12 \dots n$ setelah $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ pertukaran.

Sebagai contoh, kita akan mengubah permutasi 361245 menjadi 123456 dengan pertukaran dengan angka yang bersebelahan. Urutan inversi dari 361245 adalah 2, 2, 0, 1, 1, 0. Maka langkah pertukarannya akan menjadi

```

3 6 1 2 4 5
3 1 6 2 4 5
1 3 6 2 4 5
1 3 2 6 4 5
1 2 3 6 4 5
1 2 3 4 6 5
1 2 3 4 5 6

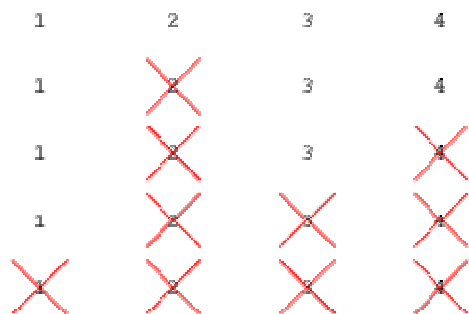
```

Dapat terlihat dari pengurutan tersebut bahwa dibutuhkan 6 langkah ($2+2+0+1+1+0$) untuk mengurutkan 361245 menjadi 123456.

D. Josephus Problem

Secara umum, *Josephus Problem* adalah salah satu masalah dalam matematika diskrit tentang kombinatorial yang membahas apabila ada n orang yang duduk melingkar, dan setiap orang ke- m akan dieksekusi hingga hanya tersisa satu orang, maka cari posisi $L(n, m)$ agar dapat menjadi orang yang terakhir bertahan. Urutan eksekusi masing-masing orang dapat dinotasikan sebagai $Josephus[n, m]$.

Contohnya, anggap ada empat orang duduk dalam lingkaran ($n = 4$) dan diberikan nomor 1-4, lalu setiap orang kedua ($m = 2$) akan dibunuh secara iteratif, maka dapat dilihat bahwa orang 1 akan dibunuh keempat, orang 2 akan dibunuh pertama, orang 3 akan dibunuh ketiga, dan orang 4 akan dibunuh kedua. Dari hasil tersebut, dapat dilihat bahwa $Josephus[4, 2]$ akan mengembalikan senarai $\{4, 1, 3, 2\}$.

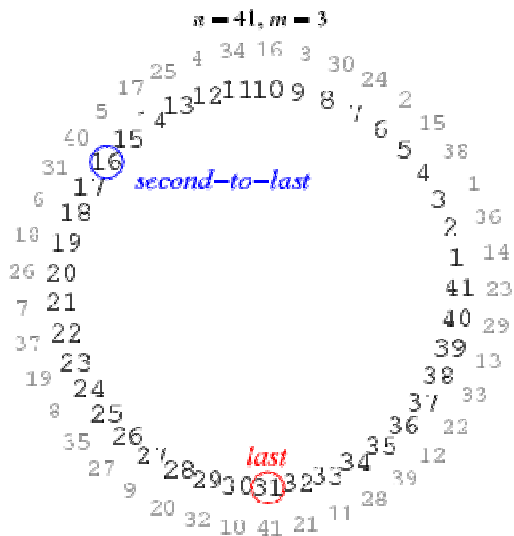


Gambar 1-2 Ilustrasi contoh *Josephus Problem*

Untuk mendapatkan senarai urutan dari orang-orang yang terbunuh, permutasi inversi dapat diaplikasikan pada keluaran dari *Josephus*, sehingga jika mengambil contoh di atas, maka $InversePermutation[Josephus[4, 2]]$ akan mengembalikan $\{4, 1, 3, 2\}$.

Kasus ini dinamakan *Josephus Problem* karena terinspirasi dari cerita sejarah abad pertama. Flavius Josephus, seseorang yang selamat dari perang Yahudi-Roma karena kemampuan matematikanya. Dalam legenda dikisahkan bahwa Josephus adalah salah satu dari 41 orang Yahudi yang ditangkap oleh pasukan Roma. Teman-temannya memilih bunuh diri sebagai pelarian, sehingga mereka memutuskan untuk membentuk sebuah lingkaran dan membunuh setiap orang ketiga, lalu diteruskan mengelilingi lingkaran tersebut hingga tidak ada yang tersisa. Josephus dan seorang temannya tidak setuju dengan ide untuk membunuh diri sendiri, sehingga dia memperhitungkan di mana dia dan temannya harus berdiri untuk selamat dari lingkaran tersebut dengan menjadi orang yang kedua-terakhir dan terakhir bunuh diri.

Bentuk awal *Josephus Problem* memuat lingkaran yang terdiri dari 41 orang, dengan setiap orang ketiga dibunuh ($n = 41, m = 3$). Lingkaran yang luar menunjukkan urutan orang-orang tersebut dibunuh, maka dua orang yang akan terakhir dibunuh adalah orang nomor 16 (kedua terakhir) dan orang nomor 31 (terakhir).



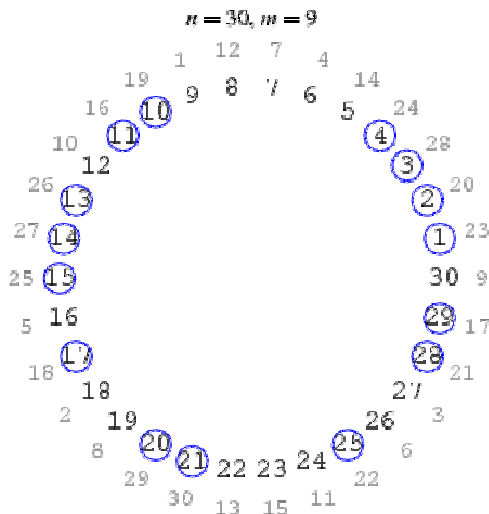
Gambar 1-3 Ilustrasi *Josephus Problem* pada mulanya

Dalam bentuk yang umum, maka jika $n = 1, 2, \dots$, jika setiap orang ke- m yang dibunuh, untuk $m = 1, 2, \dots, n$, maka dapat dilihat dari tabel di bawah letak orang terakhir yang akan dibunuh.

1	
2	1
3	3 2
4	1 1 2
5	3 4 1 2
6	5 1 5 1 4
7	7 4 2 6 3 5
8	1 7 6 3 1 4 4
9	3 1 1 8 7 2 3 8
10	5 4 5 3 3 9 1 7 8

Pada aras 1 dapat dilihat bahwa orang pertama yang akan dibunuh terakhir (karena hanya ada satu orang). Pada aras 2, jika setiap orang ke-1 dibunuh, maka orang nomor 2 akan dibunuh terakhir, dan jika setiap orang ke-2 dibunuh, maka orang nomor 1 yang akan dibunuh terakhir. Demikian halnya pada aras 5, jika tiap orang ke-1 dibunuh, maka orang nomor 5 yang akan dibunuh terakhir, jika tiap orang ke-2 yang dibunuh, maka orang nomor 3 yang akan dibunuh terakhir, jika tiap orang ke-3 dibunuh, maka orang nomor 4 yang akan dibunuh terakhir, demikian seterusnya.

Josephus Problem lainnya contohnya adalah pembagian orang-orang yang duduk dalam lingkaran dengan menyebutkan "A" dan "B" untuk setiap 15 orang, artinya terdapat 15 orang yang menyebutkan "A" dan 15 orang yang menyebutkan "B", sehingga totalnya ada 30 orang. Namun, orang-orang yang menyebutkan "A" adalah setiap orang kesembilan. Dengan demikian, $n = 30, m = 9$ pada kasus ini. Ilustrasi dari kasus ini dapat dilihat pada gambar 1-4. Pada gambar tersebut, orang-orang yang berada dalam lingkaran biru adalah orang-orang yang menyebutkan "B".

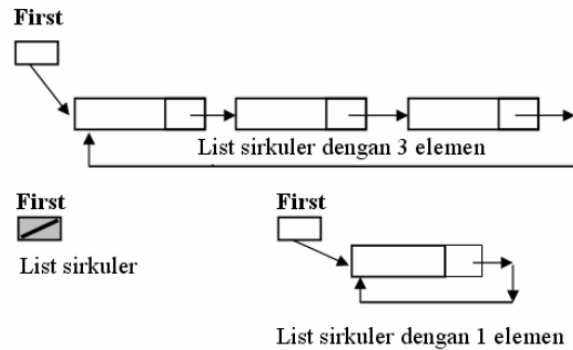


Gambar 1-4 Versi lain dari *Josephus Problem*

Jadi, orang-orang yang akan berada pada kelompok B adalah 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 29.

II. PEMBAHASAN

Dalam pengisian tabel yang membentuk permutasi inversi dari *Josephus Problem*, akan diambil setiap orang ke- m dari n orang untuk dimasukkan ke dalam tabel. Digunakan senarai sirkuler (list sirkuler) untuk membentuk lingkaran seperti pada *Josephus Problem*. Contoh senarai sirkuler dapat dilihat dalam gambar 2-1.



Gambar 2-1 List sirkuler

Awalnya, senarai tersebut akan dialokasi dan diisi oleh angka dari 1 hingga n secara berurutan. Elemen ke- n dari senarai tersebut akan mempunyai penunjuk *Next* ke elemen pertama, sehingga terbentuk sebuah "lingkaran". Setelah pengisian selesai, maka langkah berikutnya adalah membuat larik yang nantinya akan merepresentasikan permutasi inversi dari urutan orang yang dibunuh pada *Josephus Problem*.

Setelah semua pendahuluan tersebut dilakukan, maka langkah berikutnya adalah mulai mengiterasi. Akan ada penghitung yang digunakan untuk mengetahui letak orang ke- m berikutnya. Setelah didapatkan lokasi orang tersebut, maka alamat tersebut akan dihapuskan dari senarai sirkuler dan penunjuk akan bergeser ke elemen berikutnya, info dari elemen tersebut akan diisikan ke dalam larik. Larik yang dihasilkan adalah permutasi inversi dari *Josephus Problem* dengan jumlah langkah yang dilakukan untuk penghapusan dan pengisian larik akan sama dengan jumlah n .

Untuk menentukan orang yang terakhir dibunuh, kita dapat menggunakan fungsi rekursif

$$f(n, k) = (f(n - 1, k) + k) \bmod n, \text{ with } f(1, k) = 0,$$

dengan orang yang terakhir dibunuh adalah hasil dari fungsi ditambah 1. Fungsi rekursif tersebut dalam algoritma akan mempunyai kompleksitas $O(n)$. Pendekatan lainnya yang dapat digunakan adalah dengan membunuh orang ke- m , ke- $2m$, ..., sampai ke- $\text{ceiling}(n/k)$ lalu mengganti angkanya. Kompleksitas untuk algoritma tersebut adalah $O(k \log n)$.

III. SIMPULAN

Kombinatorial adalah salah satu cabang yang paling aplikatif dalam matematika diskrit. Acap kali orang-orang akan bertanya-tanya tentang berbagai kombinasi dalam hidupnya, dan yang dapat menjawab pertanyaan itu tentu adalah kombinatorial.

Permutasi sebagai salah satu bagian dari kombinatorial memegang peran penting dalam menentukan urutan dan jumlah urutan dari suatu pengaturan. Dalam generalisasinya, permutasi akan menyentuh bagian permutasi inversi. Permutasi inversi ini akan dapat menentukan ketidakteraturan dari suatu permutasi.

Josephus Problem sebagai salah satu masalah dalam kombinatorial yang membutuhkan permutasi inversi dalam pengurutan orang-orang yang akan dieksekusi. Dalam hal ini, penggunaan senarai sirkuler mungkin dapat menjadi salah satu solusi yang mangkus dalam pembuatan permutasi inversinya. Untuk mengetahui orang yang akan dieksekusi terakhir sendiri, dapat digunakan fungsi-fungsi rekursif. Fungsi-fungsi tersebut mempunyai kompleksitas yang mencapai $O(n)$ dan $O(k \log n)$, yang berarti bahwa sudah dapat ditemukan algoritma yang cukup mangkus untuk mendapatkan orang yang terakhir dieksekusi dalam *Josephus Problem*.

REFERENCES

- [1] Steven Skiena, "Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica", California: Addison-Wesley Publishing Co., 1990
- [2] Victor Bryant, "Aspects of Combinatorics: A wide-ranging introduction", Cambridge: Cambridge University Press, 1992
- [3] Rinaldi Munir, "Matematika Diskrit", Edisi 3, Bandung: Penerbit Informatika, 2005
- [4] Richard A. Brualdi, "Introductory Combinatorics", 4th Ed., New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2004
- [5] Inggriani Liem, "Diktat Struktur Data", Bandung: Penerbit ITB, 2008
- [6] "Josephus' Problem"
URL: <http://www.auto.tuwien.ac.at/~blieb/woop/josephus.html>, diakses tanggal 15 Desember 2010, pukul 16:44
- [7] "Josephus Problem"
URL: <http://delphiforfun.org/programs/Josephus.htm>, diakses tanggal 15 Desember 2010, pukul 16:21
- [8] "Combinatorics"
URL: <http://mathworld.wolfram.com/Combinatorics.html>, diakses tanggal 15 Desember 2010, pukul 9:03
- [9] "Inverse Permutation"
URL: <http://mathworld.wolfram.com/InversePermutation.html>, diakses tanggal 15 Desember 2010, pukul 9:03
- [10] "Josephus Problem"
URL: <http://mathworld.wolfram.com/JosephusProblem.html>, diakses tanggal 15 Desember 2010, pukul 9:03
- [11] "Permutation Inversion"
URL: <http://mathworld.wolfram.com/PermutationInversion.html>, diakses tanggal 15 Desember 2010, pukul 9:14
- [12] "Josephus Problem"
URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Josephus_problem, diakses tanggal 17 Desember 2010

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2010

ttd

Ali Akbar Septiandri - 13509001