

Pembuktian Teorema Empat Warna dengan Aplikasi Pewarnaan Graf

Diani Pavitri Rahasta, 13509021¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

13509021@std.stei.itb.ac.id; diani_pr@yahoo.com

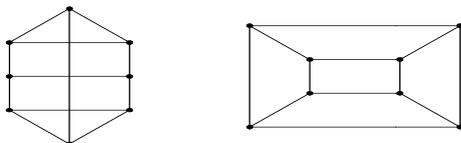
Abstract—Pewarnaan graf merupakan salah satu aplikasi graf yang banyak digunakan. Pewarnaan graf merupakan aplikasi yang banyak dimanfaatkan dalam penyelesaian permasalahan yang melibatkan 2 hal atau lebih yang tidak bisa dilakukan bersama-sama. Namun untuk menyusuri dan memberi warna pada graf yang *massive* seringkali ditemui kesulitan. Saat ini, kesulitan ini semakin dapat diminimisasi setelah ditemukannya teorema empat warna. Dalam perkembangannya, teorema empat warna banyak menimbulkan pertentangan di kalangan ahli. Banyak yang berusaha mematahkan kebenaran teorema empat warna ini, tapi selalu berhasil dibuktikan kesalahannya. Sejauh ini, teorema empat warna dan pewarnaan graf masih merupakan bidang yang sangat terbuka untuk dikembangkan. Dalam makalah kali ini, penulis berusaha membuktikan kebenaran teorema empat warna. Namun berbeda dengan yang sudah pernah dilakukan para ahli sebelumnya, penulis hanya akan melakukan pembuktian dengan menjawab beberapa permasalahan mengenai aplikasi pewarnaan graf dengan hanya menggunakan empat warna.

Index Terms—Pewarnaan Graf, Teorema Empat Warna, Aplikasi pewarnaan graf.

I. PENDAHULUAN

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungannya dengan objek-objek tersebut. Graf terdiri dari simpul-simpul (yang merupakan representasi objek-objek) dan sisi-sisi (yang merupakan representasi hubungan antara objek). [buku pak rin]

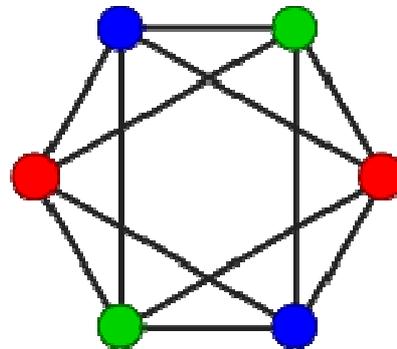
Berdasarkan keplanarannya, graf dibedakan menjadi dua, graf planar dan graf tidak planar. Suatu graf dikatakan planar jika graf tersebut tidak memiliki sisi yang berpotongan. Dalam menguji keplanaran graf saja, ada begitu banyak teori yang bisa dimanfaatkan. Keplanaran graf sedikit banyak akan berpengaruh kepada proses pewarnaan graf dan aplikasi-aplikasi graf.



(b)

Gambar 1(a), graf tidak planar, dan 1(b) graf planar

Pewarnaan graf merupakan salah satu aplikasi graf yang sampai saat ini masih sangat terbuka untuk dilakukan riset. Ada tiga cara untuk mewarnai suatu graf. Pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan permukaan. Syarat pewarnaan graf adalah tidak ada daerah yang berdekatan yang memiliki warna yang sama. Dalam pewarnaan simpul, simpul yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Simpul-simpul disebut bertetangga jika simpul-simpul tersebut dihubungkan oleh satu garis sisi. Dalam pewarnaan sisi, sisi yang bersisian tidak boleh memiliki warna yang sama. Sisi-sisi yang bersisian adalah sisi-sisi yang merupakan sisi yang sama dari satu simpul. Begitu juga untuk pewarnaan permukaan. Permukaan yang langsung bersinggungan tidak boleh memiliki warna yang sama. [6]



Gambar 2: Pewarnaan graf

Sebagai contoh pewarnaan graf, dapat dilihat pada pewarnaan simpul graf. Dalam pewarnaan, dikenal warna kromatik. Warna kromatik adalah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf dengan n simpul. Simbol untuk warna kromatik adalah $\chi(G)$. Untuk suatu graf dengan warna kromatik n , dapat ditulis dengan cara:

Aplikasi pewarnaan graf meliputi banyak permasalahan. Aplikasi yang paling umum dimanfaatkan adalah yang berhubungan dengan objek-objek yang tidak bisa berada dalam situasi yang sama. Contoh aplikasi ini antara lain adalah permasalahan permainan sudoku yang sangat populer. Permainan ini tidak mengizinkan angka yang sama berada dalam satu baris, satu kolom, maupun satu kelompok kotak. Selain aplikasi jenis ini, aplikasi

graf yang lain adalah aplikasi yang melibatkan warna-warna kromatik.

Karena kesulitan yang selalu ditemui dalam melakukan pewarnaan graf, telah ditemukan algoritma-algoritma pewarnaan graf. Selain mempermudah pewarnaan graf, para ahli mulai menyusun algoritma-algoritma yang meminimisasi warna kromatik yang digunakan dalam pewarnaan graf. Algoritma-algoritma ini umumnya memodifikasi urutan pewarnaan suatu graf. Urutan pewarnaan suatu graf, dengan algoritma-algoritma pewarnaan, merupakan elemen penting yang bahkan bisa mempengaruhi banyaknya warna kromatik yang digunakan dalam pewarnaan graf.

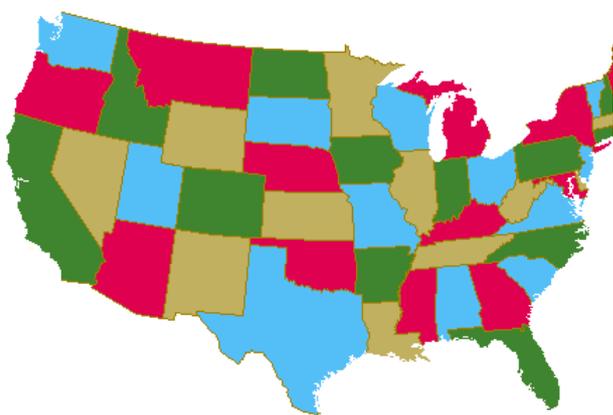
II. TEOREMA EMPAT WARNA

A. Sejarah Teorema Empat Warna

Pewarnaan graf memang menimbulkan banyak permasalahan. Dalam penemuan teorema empat warna ini, sebetulnya yang sedang terjadi adalah pengaplikasian pewarnaan graf. Aplikasi yang digunakan adalah pewarnaan peta. Dalam pembagian jenis pewarnaan graf, pewarnaan ini disebut sebagai pewarnaan muka.

Penggunaan empat warna untuk pewarnaan peta awalnya ditemukan di Inggris oleh Francis Guthrie pada tahun 1852. Dia mewarnai peta Inggris hanya dengan empat warna. Fakta ini kemudian dia ungkapkan kepada kakaknya, Fredrick Guthrie. Fredrick Guthrie adalah mahasiswa University College dan merupakan murid dari Augustus De Morgan. Fredrick mengungkapkan hal ini kepada Augustus De Morgan, yang dikutip oleh referensi [5] bahwa Augustus De Morgan berkata:

“Seorang mahasiswa saya (Guthrie) bertanya kepada saya hari ini untuk memberinya alasan terhadap suatu fakta yang saya tidak tahu bahwa itu adalah fakta—dan masih belum pernah tahu. Dia berkata bahwa jika suatu gambar dibagi sedemikian rupa dan setiap bagiannya diwarnai dengan warna berbeda sehingga setiap wilayah yang berbagi batas berbeda warnanya—empat warna saja cukup untuk digunakan—hal ini merupakan kasusnya di mana empat warna dibutuhkan. Pertanyaannya adalah tidak bisakah kebutuhan untuk lima warna atau lebih diciptakan”



Gambar 3: Peta Inggris yang diwarnai dengan empat

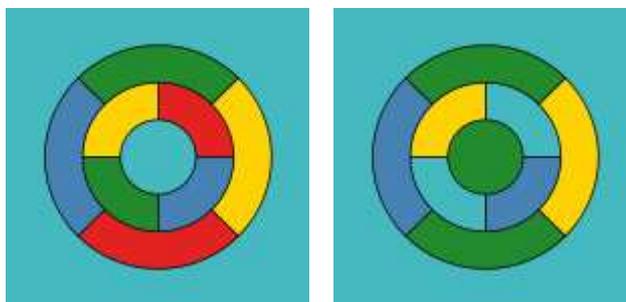
warna saja.

Berdasarkan hal tersebut, pada tahun 1878 Arthur Cayley menerbitkan papernya. Paper tersebut adalah paper pertama yang membahas mengenai pewarnaan graf dengan empat warna ini. Paper itu ditulis dengan De Morgan sebagai referensinya.

Yang banyak terjadi berikutnya adalah usaha pembuktian-pembuktian bahwa teorema tersebut tidak sesuai. Namun akhirnya usaha-usaha tersebut terbukti gagal karena bukti-bukti yang diajukan bisa dipatahkan. Usaha-usaha gagal tersebut justru membuahkan hasil lain pada pengembangan pewarnaan graf.

Pada tahun 1879 Alfred Kempe memberikan bukti yang mematahkan teorema tersebut. Bukti ini bertahan cukup lama. Kurang lebih satu dekade, orang-orang mempercayai yang diungkapkan oleh Kempe. Setahun kemudian, pada tahun 1880, Peter Guthrie Tait juga memberikan bukti yang mematahkan teorema empat warna.

Selabel tahun kemudian, Heawood menunjukkan kesalahan dari bukti yang diberikan oleh Alfred Kempe. Heawood menunjukkan kesalahan Kempe dengan menggunakan peta dengan 18 permukaan. Perkiraan Heawood memberikan pernyataan yang umum dalam pewarnaan peta. Perkiraan itu menunjukkan bahwa dalam pewarnaan dengan 18 permukaan peta, empat warna sudah mencukupi. Selain mematahkan bukti dari Alfred Kempe, Heawood juga memberikan teorema lain yang disebut sebagai teorema lima warna.



Gambar 4: Pewarnaan yang salah yang dijadikan bukti
Gambar 5: Pewarnaan yang mematahkan bukti

Setahun setelah bukti dari Alfred Kempe dipatahkan oleh Heawood, bukti yang ditunjukkan oleh Tait juga dipatahkan oleh Petersen. Namun kedua hal yang ditunjuk salah oleh kedua orang ini pada akhirnya justru memberikan pengembangan pada keilmuan ini. Alfred Kempe menemukan apa yang sekarang disebut sebagai Kempe Chains. Kempe Chains merupakan satu teori yang penting dalam pewarnaan graf saat ini meskipun ditemukan bukan untuk tujuan tersebut. Sedangkan Tait menemukan rumus yang ekuivalen untuk pewarnaan-tiga-sisi dalam teorema empat warna.

Hasil yang signifikan dicatat oleh matematikawan dari Kroasia, Danilo Blanuša yang menemukan dua snaks pada tahun 1940, yang kii dikenal sebagai snark Blanuša. Dinamai demikian karena Blanuša yang menemukan hal

ini dalam penelitiannya. Namun demikian, berdasarkan penelitian Danilo Blanuša, satu-satunya snark yang diketahui pada masa itu adalah graf Petersen.

Pada tahun 1943, Hugo Hadwiger memformulasikan teorema Hadwiger. Teorema ini menerangkan mengenai generalisasi teorema empat warna. Adapun demikian, teorema Hadwiger ini sampai sekarang masih tidak terselesaikan.

Karena banyaknya bukti yang salah dalam usaha mematahkan teorema empat warna, para ahli melakukan penelitian lebih lanjut mengenai teorema empat warna. Selanjutnya, teorema empat warna diterima oleh kalangan ahli. Namun mereka terus mencari bukti untuk menyatakan bahwa teorema ini memang benar dan tidak bisa dipatahkan. Para ahli yang kemudian menemukan bukti-bukti baru yang belum terpatahkan sampai sekarang memanfaatkan hasil penelitian ahli-ahli sebelumnya, baik yang berusaha mematahkan maupun yang mendukung. Dalam perkembangannya, banyak hal baru yang ditemukan yang sebelumnya tidak terungkap dalam teorema empat warna. Sampai sekarang pun, sebenarnya teorema ini belum merupakan teorema yang benar-benar pasti. Masih banyak yang berusaha membuat pembuktian-pembuktian mengenai hal ini.

Dalam perkembangan pembuktian-pembuktian tersebut, muncul teorema-teorema lain seperti warna minimal yang bisa digunakan adalah enam warna. Teorema ini berdasarkan pada teorema Heawood yang sudah dibahas sebelumnya yang memanfaatkan jenis jenis permukaan peta. Kemudian berkembang lagi menjadi teorema lima warna. Teorema ini dikembangkan oleh Ringel dan Youngs pada tahun 1968. Pengembangan ini dilakukan dengan menggunakan cara yang sama seperti yang sudah dilakukan oleh Heawood. Selanjutnya, pembuktian-pembuktian yang ada menunjukkan bahwa yang dibutuhkan memang hanya empat warna dan tidak lebih. Teorema empat warna masih bertahan untuk pewarnaan berbagai macam graf, namun penelitian tentangnya masih belum berakhir.

Teorema empat warna hingga saat ini masih menjadi lahan yang sangat terbuka dalam pewarnaan graf. Hal ini bisa disebabkan oleh kondisi bahwa pewarnaan graf sendiri masih menjadi lahan yang sangat terbuka untuk dieksplorasi. Saat ditemukan hal baru dalam pewarnaan graf, teorema-teorema yang berkembang dari hal itu akan mengalami perkembangan juga. Hal ini menyebabkan perkembangan teorema empat warna masih bisa menjadi sangat tidak terbatas. Meskipun memang warna yang paling sedikit bisa digunakan adalah empat warna dan tidak bisa lebih sedikit lagi.

B. Pembuktian Teorema Empat Warna

Pada bab sebelumnya telah dibahas sejarah terbentuknya teorema empat warna serta usaha-usaha pembuktian bahwa teorema tersebut tidak sesuai. Dalam bab ini, subbab pertama akan membahas hasil penelitian ahli dalam membuktikan keabsahan teorema empat warna. Dalam subbab selanjutnya, penulis akan mencoba

memberikan bukti lain dengan memanfaatkan aplikasi-aplikasi pewarnaan graf. Aplikasi pewarnaan graf pada masalah yang diberikan akan diselesaikan dengan menggunakan empat warna saja.

B.1. Beberapa Pembuktian Baru

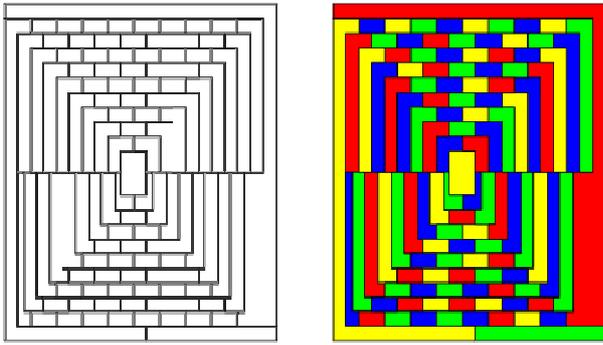
Selama 1960 dan 1970, matematikawan dari Jerman yang bernama Heinrich Heesch mengembangkan metode pembuktian teorema empat warna dengan komputer. Dia juga mengembangkan konsep reduksibilitas dan bersama Ken Durre mengembangkan tes oleh komputer terhadap hal tersebut. Sayangnya, dalam kondisi yang seharusnya sudah bisa maju dengan pesat, dia tidak bisa menemukan (atau mengembangkan) superkomputer yang dibutuhkan untuk melanjutkan pekerjaannya. Proses pembuktian dengan komputer ini memang memerlukan superkomputer yang cukup canggih dan memiliki kecepatan yang sangat tinggi. Mungkin jika Heesch hidup di masa kini dia akan sangat senang karena bisa mengembangkan pembuktian teorema ini, melihat bagaimana komputer-komputer jaman sekarang bekerja.

Setelah penelitian Heesch tidak membuahkan hasil yang diinginkan, banyak ahli matematika yang mengadopsi metode Heesch dan berusaha melakukan pembuktian terhadap teorema empat warna ini. Pada tahun 1976, pada saat orang-orang masih berlomba-lomba menyelesaikan bukti yang utuh dan meyakinkan, Kenneth Appel dan Wolfgang Haken dari University of Illinois, mengumumkan bahwa mereka telah berhasil menemukan bukti untuk teorema empat warna. Mereka dibantu oleh John A Koch dalam menyelesaikan beberapa pekerjaan algoritmik.

Pembuktian yang dilakukan oleh Appel dan Haken menjadi dasar bagi teorema empat warna sampai sekarang. Namun karena pembuktian itu harus menggunakan komputer dan kurang aplikatif, banyak ahli yang masih berusaha memberikan bukti terhadap teorema empat warna ini dengan cara lain yang lebih aplikatif.

Bukti yang lebih pendek dikembangkan oleh Robertson dan beberapa orang rekannya pada tahun 1996.

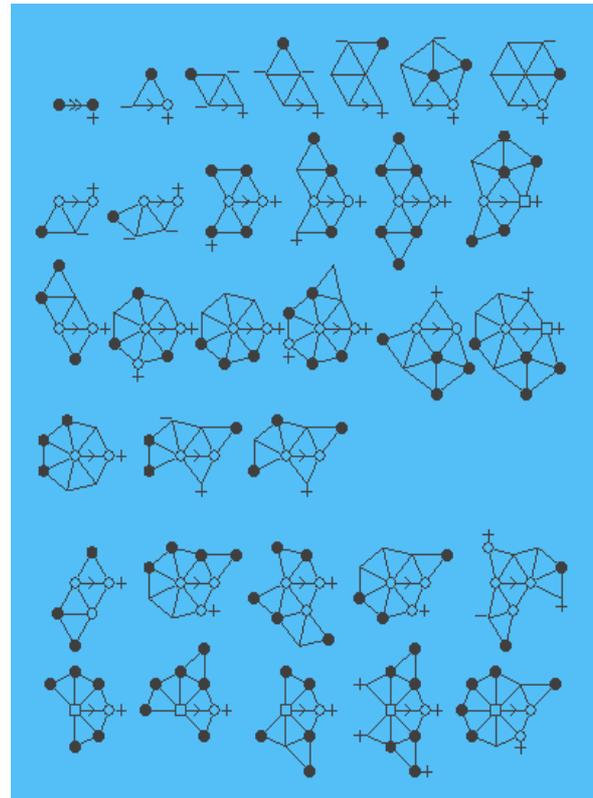
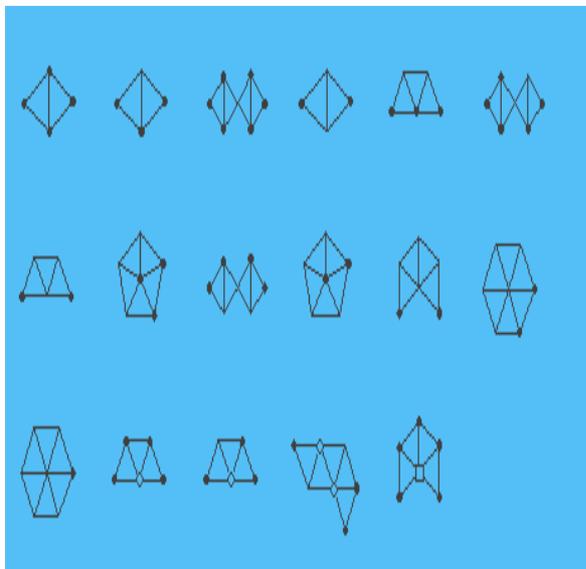
Pada Desember 2004, G Gonthier yang merupakan bagian dari Microsoft Research di Cambridge, Inggris, yang bekerja sama dengan B Werner dari INRIA di Prancis, mengumumkan bahwa mereka telah melakukan verifikasi pada bukti yang diajukan oleh Robertson dan beberapa orang rekannya dengan menggunakan sebuah formula dalam program penghitungan logika Coq dan mengonfirmasi kevalidan dari setiap langkah program tersebut. [1



Gambar 4: Pewarnaan graf dengan hanya menggunakan empat warna.

Bukti berikutnya dikeluarkan oleh Neil Robertson, Daniel P Sanders, Paul Seymour, dan Robin Thomas pada 2007. Mereka melakukan pembuktian dengan metode yang sedikit berbeda dengan yang telah dilakukan oleh Appel dan Haeken. Pembuktian ini tidak berdasarkan penggunaan komputer untuk menyelesaikan suatu pewarnaan graf. Mereka menggunakan bentuk-bentuk segitiga untuk mengembangkannya menjadi graf yang lebih kompleks. Pembuktian ini merupakan pembuktian yang cukup aplikatif dan bisa dilakukan di mana-mana tanpa perlu menenteng-nenteng komputer.

Alasan mereka melakukan pembuktian dengan cara ini memang adalah agar teorema empat warna bisa lebih mudah dibuktikan meski hanya dengan tangan.



Gambar 5 dan 6: Pembuktian ala Neil Robertson, Daniel P Sanders, Paul Seymour, dan Robin Thomas

B.2. Pembuktian dengan Beberapa Aplikasi Pewarnaan Graf

Dalam subbab ini penulis akan memberikan pembuktian dengan memanfaatkan beberapa bentuk permasalahan mengenai pewarnaan graf. Permasalahan yang akan diselesaikan adalah masalah pembagian jadwal ujian. Permasalahan kedua yang akan diselesaikan adalah masalah pembagian channel radio.

1. Masalah Pembagian Jadwal

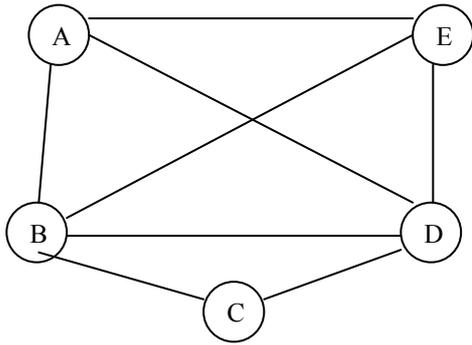
Misalkan terdapat delapan orang mahasiswa (1, 2, ..., 8) dan lima buah mata kuliah yang dapat dipilihnya (A, B, C, D, E). Tabel berikut memperlihatkan matriks lima mata kuliah dan delapan orang mahasiswa. Angka 1 pada elemen (i, j) berarti mahasiswa i memilih mata kuliah j , sedangkan angka 0 menyatakan mahasiswa i tidak memilih mata kuliah j .

	A	B	C	D	E
1	0	1	0	1	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	0	1	1	0	0
8	1	0	0	1	0

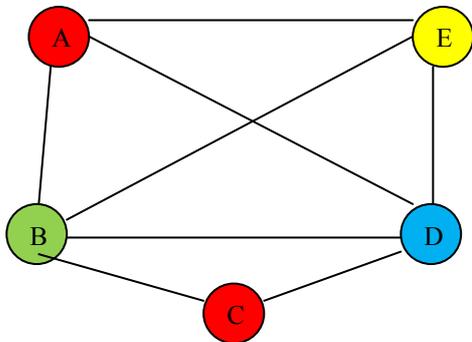
Penyelesaian masalah:

Selanjutnya dibuat graf. Mata kuliah yang berada di baris yang sama dihubungkan dengan satu garis.

F	A, C, H
G	A, C
H	B, F



Setelah susunan graf terbentuk selanjutnya dilakukan pewarnaan untuk graf dengan warna-warna yang sesuai. Warna yang sesuai maksudnya sesuai dengan aturan pewarnaan graf yaitu bahwa simpul simpul yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama.



Setelah dilakukan pewarnaan akan tampak bahwa empat warna bisa digunakan untuk mewarnai graf sesuai dengan kebutuhannya. Dengan ini maka jadwal ujian bisa dibuat untuk 4 hari saja dan tidak perlu dilakukan berhari-hari.

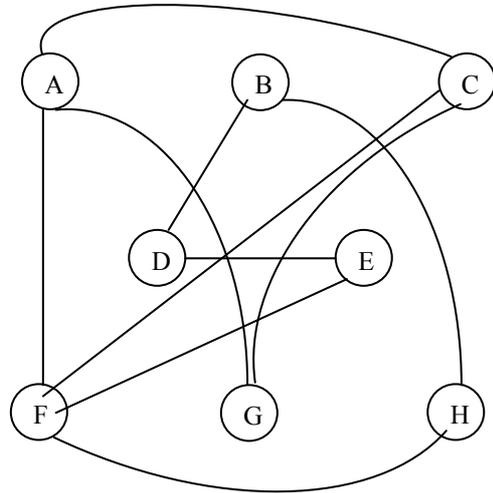
2. Masalah Pembagian Channel Radio.

Misalkan terdapat delapan radio dengan jarak tertentu. Radio yang berada dalam jarak 1500 km tidak bisa berbagi channel yang sama. Namun radio yang berada pada jarak lebih dari itu bisa menggunakan channel yang sama. Dibutuhkan pewarnaan graf sedemikian rupa sehingga hanya dibutuhkan empat channel radio untuk mengoperasikan kedelapan radio tersebut. Berikut tabel kondisi jarak channel-channel radio tersebut.

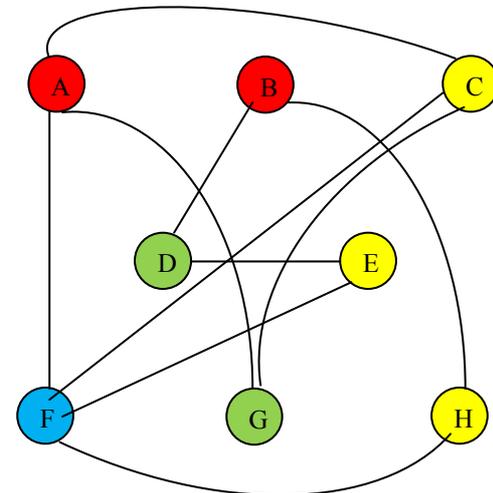
Radio	Dalam 1500 km ada radio
A	C, F, G
B	D, H
C	A, F, G
D	B, E
E	D, F

Penyelesaian masalah:

Dibuat graf yang menggambarkan kondisi radio-radio yang terlibat. Radio yang berada dalam area 1500 km akan dihubungkan dengan garis yang berarti radio-radio tersebut tidak boleh berada dalam channel yang sama.



Langkah berikutnya adalah pewarnaan graf. Pewarnaan dilakukan dengan memperhatikan lagi aturan pewarnaan bahwa simpul-simpul yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Akan dilakukan pewarnaan sehingga tampak hasil graf sebagai berikut.



Dari hasil pewarnaan graf dapat dilihat bahwa hanya dibutuhkan empat warna untuk mewarnai graf Radio. Hal ini menunjukkan bahwa empat channel radio saja cukup untuk membuat radio tersebut beroperasi.

V. KESIMPULAN

1. Teorema Empat warna merupakan teorema yang valid dan bisa digunakan dalam menyelesaikan berbagai macam masalah yang berkaitan dengan pewarnaan graf.

2. Pembuktian teorema empat warna bisa menggunakan cara apapun karena teorema ini tergolong valid dan tidak perlu diragukan lagi kebenarannya.

3. Meskipun teorema ini valid, namun masih banyak orang yang berusaha mencari pembuktian yang paling mudah agar pembuktian teorema ini tidak hanya bisa dilakukan di lab atau ruang penelitian saja tetapi juga bisa dengan mudah diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari.

REFERENCES

- [1] Four Colour Theorem, <http://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html>. Tanggal akses: 13 Desember 2010, pukul 20.47 WIB.
- [2] Munir, Rinaldi, *Matematika Diskrit 3th Ed*. Bandung: Palasari, 2007.
- [3] The Four Color Theorem, <http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>. Tanggal akses: 13 Desember 2010, pukul 16.40 WIB.
- [4] Rosen, Kenneth H., *Discrete Mathematics and Its Applications 5th Ed*. New York: McGraw-Hill, 2003.
- [5] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem. Tanggal akses: 13 Desember 2010, pukul 16.39 WIB.
- [6] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory. Tanggal akses: 13 Desember 2007, pukul 16.39 WIB.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2010



Diani Pavitri Rahasta 13509021