Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Kuis ke-3 IF2091 Struktur Diskrit (3 SKS) : Kombinatorial dan Teori Graf
Dosen: Rinaldi Munir & Harlili
Senin, 8 November 2010
Waktu: 50 menit

---

1. Ada berapa banyak kombinasi bilangan 10-digit yang tidak mengandung angka-angka berulang dengan syarat dimulai dengan digit 987, atau memuat digit 4 5 di posisi kelima dan keenam, atau diakhiri dengan digit 123? **(20)**

Solusi:

Dimulai dengan digit 987 (misalkan A) :
P(1,1).P(1,1). P(1,1). P(7,1). P(6,1). P(5,1).P(4,1). P(3,1). P(2,1). P(1,1)
= 7!
= 5040

Memuat digit 45 di posisi kelima dan keenam (misalkan B):
P(7,1).P(7,1). P(6,1). P(5,1). P(1,1). P(1,1). P(4,1). P(3,1). P(2,1). P(1,1)
= 7! . 7
= 35280

Diakhiri dengan digit 123 (misalkan C):
P(6,1). P(6,1). P(5,1). P(4,1). P(3,1). P(2,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1)
= 6! . 6
= 4320

$A \cap B$ = P(1,1).P(1,1). P(1,1). P(5,1). P(1,1). P(1,1). P(4,1). P(3,1). P(2,1). P(1,1)
= 5!
= 120

$B \cap C$ = P(4,1). P(4,1). P(3,1). P(2,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1)
= 4! . 4
= 96

$A \cap C$ = P(1,1).P(1,1). P(1,1). P(4,1). P(3,1). P(2,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1)
= 4!
= 24

$A \cap B \cap C$ = P(1,1).P(1,1). P(1,1). P(2,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1). P(1,1)
= 2!
= 2

$A + B + C - (A \cap B) - (B \cap C) - (A \cap C) + (A \cap B \cap C)$
= 5040 + 35280 + 4320 – 120 – 96 – 24 + 2
= 44402

Jadi kombinasi 10 digit yang mungkin adalah **44402cara.**

2. Tentukan nilai dari C(20,0) + C(20,1) + C(20,2) + … + C(20,9) + C(20,10) dengan memanfaatkan teorema binomial. **(15)**

Solusi:

Dari teorema binomial, dapat kita turunkan persamaan
2^n = C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + ….. + C(n,n-1) + C(n,n)
Sehingga kita punya persamaan
2^{20} = C(20,0) + C(20,1) + C(20,2) + ….. + C(20,19) + C(20,20)

Padahal kita ketahui bahwa C(n,r) = C(n,n-r)
jadi C(20,0)=C(20,20), C(20,1)=C(20,19), … dst hingga C(20,9)=C(20,11)
dari sini kita dapatkan
2^{20} = 2.C(20,0) + 2.C(20,1) + 2.C(20,2) + ….. +2.C(20,9) + C(20,10)
2^{20} = 2{C(20,0) + C(20,1) + C(20,2) + ….. +C(20,9) + C(20,10)} - C(20,10)

Dari persamaan terakhir di atas dapat kita simpulkan

$\therefore$ C(20,0) + C(20,1) + C(20,2) + ….. +C(20,9) + C(20,10)

$= \frac{2^{20}+C(20,10)}{2} = \frac{1048576+184756}{2}$ = **616666**

3. Berapa banyak solusi bilangan bulat dari $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ dengan syarat $0 \le x_1 \le 6$, $0 \le x_2 \le 7$, $0 \le x_3 \le 8$. **(20)**

Solusi:

Misalkan :

$a_1 = 6 - x_1$. Karena rentang dari x_1 adalah $0 \le x_1 \le 6$, maka rentang dari a_1 yaitu $0 \le a_1 \le 6$.
$a_2 = 7 - x_2$. Karena rentang dari x_2 adalah $0 \le x_1 \le 7$, maka rentang dari a_2 yaitu $0 \le a_2 \le 7$.
$a_3 = 8 - x_3$. Karena rentang dari x_3 adalah $0 \le x_3 \le 8$, maka rentang dari a_3 yaitu $0 \le a_3 \le 8$.

Sehingga persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ dapat diubah menjadi $(6 - a_1) + (7 - a_2) + (8 - a_3) = 18$, atau jika disederhanakan menjadi $a_1 + a_2 + a_3 = 3$. Karena ruas kanan persamaan $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ (yaitu 3) lebih kecil daripada batas atas rentang a_1 , a_2 , a_3 > ruas kanan. Maka sama saja kita disuruh untuk mencari banyak solusi $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ dengan syarat $a_1 \ge 0, a_2 \ge 0\ dan\ a_3 \ge 0$ yang berjumlah $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$.

4. Kamu memiliki 5 permen berwarna merah, 10 permen kuning, dan 15 permen hijau. Karena kamu baik hati, kamu akan memberikan setengahnya kepada adikmu. Ada berapa banyak cara kamu berbagi permen dengan adikmu? **(15)**

Solusi:

Karena banyak permen ada 30, maka adik akan menerima 15 permen. Berhubung banyaknya permen hijau ≥15, maka pasti mencukupi. Sedangkan permen merah hanya 5, dan kuning hanya 10, maka terbatas.
Soal tersebut dapat dijadikan permasalahan kombinasi dengan pengulangan, menjadi:

m + k + h = 15 dengan 5≥m≥0, 10≥k≥0, dan h≥0

Kita ketahui bahwa jika banyak permen tiap warna tidak dibatasi ($\propto$ > m,k,h ≥ 0), banyak cara memilih permen ada C(15+3-1, 15) = C(17,15)

- Selanjutnya kita tentukan banyak cara memilih permen dengan banyak permen merah > 5. Pertama, ambil dulu 6 permen. Sehingga permasalahan menjadi

  m + k + h = 15-6 = 9 dengan m,k,h ≥ 0

  Banyak solusi persamaan di atas yaitu C(9+3-1,9) = C(11,9)
- Dengan cara yang sama, kita cari banyak cara memilih permen dengan permen kuning >10

  m + k + h = 15-11 = 4 dengan m,k,h ≥ 0 memiliki solusi C(4+3-1,4) = C(6,4)
- Dan terakhir, kita cari banyak cara memilih permen dengan permen merah >5 dan kuning >10. Berhubung banyak permen dipilih maksimum 15, maka tidak mungkin bisa dilakukan.

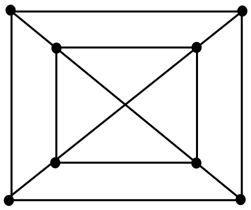
$\therefore$ Banyak cara berbagi permen ada **C(17,15) – C(11,9) - C(6,4)= 136 – 55 – 15 = 66**

Solusi Alternatif:

Akan dipilih 15 permen. Ada 6 cara memilih permen merah (0 hingga 5). Selanjutnya ada 11 cara memilih permen kuning (0 hingga 10). Semua kemungkinan pengambilan tersebut pasti bisa dilakukan karena maksimal terambil 5+10 = 15 permen (tidak melebihi batas). Selanjutnya permen hijau diambil sebanyak 15 dikurangi banyak permen merah dan kuning.

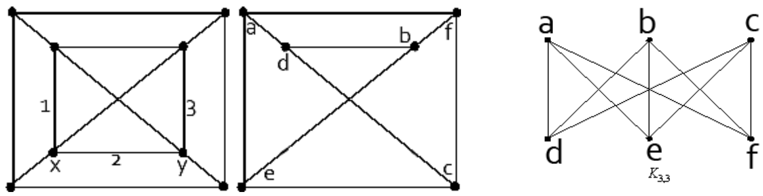
$\therefore$ Banyak cara berbagi permen ada **6×11 = 66**

5. Dengan teorema kuratowski, buktikan bahwa graf di bawah ini bukan merupakan graf planar.



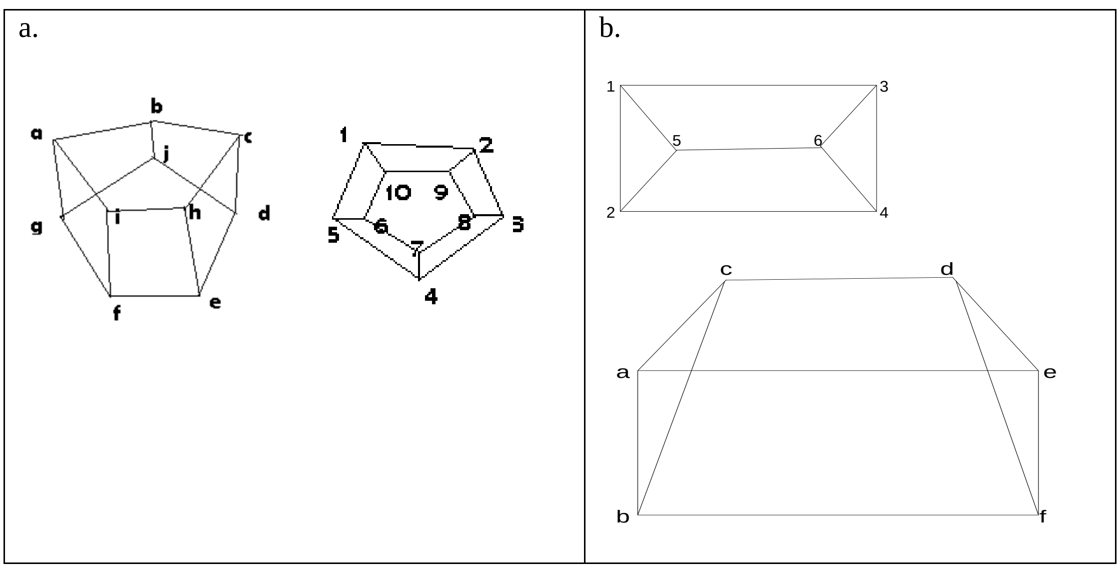
(15)

Solusi:



Perhatikan graf pada soal di gambar paling kiri.
Dengan menghilangkan sisi 1, 2, dan 3. Serta mengeliminasi simpul x dan y. Kita dapatkan graf yang homeomorfik dengan upagraf dari graf pada soal. (gambar tengah)
Dan graf tersebut isomorfik dengan graf $K_{3,3}$
$\therefore$ Berdasarkan teorema kuratowski, karena memiliki homeografik upagraf yang isomorfik dengan $K_{3,3}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa **graf pada soal merupakan graf tidak planar. (QED)**

6. Apakah pasangan graf berikut merupakan isomorfik? Jika iya, tentukan pasangan dari tiap titik yang sesuai.



(15)

Solusi:

a. Ya. Pasangannya salah satunya yaitu :
(g, 6), (f, 7), (e, 8), (d, 9), (j, 10), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (h, 3), (i, 4)
b. Ya. Pasangannya salah satunya yaitu :
(a, 1), (e, 3), (b, 2), (f, 4), (c, 5), (d, 6)