Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Jawaban Kuis ke-2 IF2091 Struktur Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematik dan Teori Bilangan
Dosen: Rinaldi Munir & Harlili
Kamis, 6 Oktober 2010
Waktu: 75 menit

---

1. Buktikan bahwa untuk setiap *n* bilangan asli, $n^3 + 11n$ selalu habis dibagi 6.

Jawaban:

akan digunakan Prinsip Induksi Matematika

- untuk n = 1, maka $1^3 + 11.1 = 12$, yang habis dibagi 3. Maka, benar untuk n = 1

- untuk n = k, kita asumsikan benar, sehingga, $k^3 + 11k$ habis dibagi 6.

- untuk n = k+1, maka

$(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = 3(k^2 + k + 4) + k^3 + 11k$

karena $k^3 + 11k$ habis dibagi 3, dan $(k^2 + k + 4)$ selalu genap, maka, untuk n=k+1, juga berlaku bahwa $n^3 + 11n$ selalu habis dibagi 6.

QED.

2. Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai 4 sen dan 5 sen? Buktikan jawabanmu dengan prinsip induksi matematik.

Jawaban: p(n) = Untuk biaya pos sebesar n ≥ 12 dapat menggunakan perangko senilai 4 sen dan 5 sen

(i) Basis induksi: untuk n = 12 pernyataan tersebut benar, sebab biaya pos sebesar 12 sen dapat menggunakan hanya tiga perangko 4 sen saja,

(ii) Langkah induksi: Asumsikan bahwa p(n) benar, akan ditunjukkan bahwa p(n+1) juga benar

Kasus 1: misalkan pada biaya pos sebesar n sen (n ≥ 12) menggunakan sedikitnya 3 buah perangko 4 sen. Dengan mengganti 1 buah perangko 4 sen dengan 1 buah perangko 5 sen, maka kita dapat membayar biaya pos sebear n + 1 sen.

Kasus 2: jika tidak ada perangko 4 sen yang digunakan ketika membayar biaya pos sebesar n sen, maka digunakan perangko 5 sen. Karena n ≥ 12, maka sedikitnya digunakan 3 buah perangko 5 sen. Dengan mengganti 3 buah perangko 5 sen dengan 4 buah perangko 4 sen, maka kita dapat membayar biaya pos sebesar (n + 1) sen

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti biaya pos sebesar n sen (n ≥ 12) dapat menggunakan perangko 4 sen dan 5 sen saja.

3. Misal *x* adalah suatu bilangan ganjil positif yang memenuhi 5*x* ≡ 7 (mod 9). Tentukan nilai dari 2*x* mod 12.

Jawaban:

Ini adalah permasalahan CRT dengan 2 persamaan:

(i) $x \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow x = 2k_1+1$……….. (*)

(ii) $5x \equiv 7 \pmod 9$

⇔ $2.5x \equiv 2.7 \pmod 9$ //kalikan kedua ruas dengan 5^{-1} mod 9, yaitu 2

⇔ $10x \equiv 14 \pmod 9$

⇔ $x \equiv 5 \pmod 9$

⇔ $2k_1+1 \equiv 5 \pmod 9$ //dari (*)

⇔ $2k_1 \equiv 4 \pmod 9$

⇔ $5.2k_1 \equiv 5.4 \pmod 9$ // kedua ruas dengan 2^{-1} mod 9, yaitu 5

⇔ $10k_1 \equiv 20 \pmod 9$

⇔ $k_1 \equiv 2 \pmod 9 \Leftrightarrow k_1 = 9k_2+2$……(**)

Akhirnya dari (*) dan (**), kita dapatkan:

$x = 2k_1+1 = 2(9k_2+2)+1 = 18k_2+4+1 = 18k_2+5$

∴ $2x$ mod 12 = $2(18k_2+5)$ mod 12 = $36k_2+10$ mod 12 = **10**

4. Dengan menggunakan algoritam Euclidean, tentukan PBB(182, 133), lalu tentukan suatu pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi persamaan $182x+133y = 14$.

Jawaban:

Kita tentukan dulu PBB(182,133) dengan algoritma Euclid:

$182 = 1.133 + 49$

$133 = 2.49 + 35$

$49 = 1.35 + 14$

$35 = 2.14 + 7$

$14 = 2.7 + 0$

$\therefore$ **Kita dapatkan PBB(182,133) = 7**

Kita cari suatu solusi kombinasi lanjar 182x+133y = PBB(182, 133) = 7.

Dengan membalik algoritma euclid:

$7 = 35 – 2.14$

$= 35 – 2(49 – 1.35)$

$= -2.49 + 3.35$

$= -2.49 + 3(133 – 2.49)$

$= 3.133 – 8.49$

$= 3.133 – 8(182 – 133)$

$= -8.182 + 11.133$

$7 = -8.182 + 11.133$

Kita dapatkan persamaan 182.(-8) + 133.(11) = 7

Dengan mengalikan kedua ruas dengan 2, kita peroleh **182.(-16) + 133.(22) = 14**

$\therefore$ Kita dapatkan suatu pasangan bilangan bulat (x,y) = **(-16,22)**

5. Tunjukkan bagaimana sekumpulan data dengan kunci-kunci sebagai berikut: 251, 375, 721, 333, 425, 17, 52, 145, 178, 105, 999, 2032, dan 1021 ditempatkan didalam memori dengan menggunakan fungsi Hash dimana jumlah lokasi memori yang tersedia berindeks 0-16.

Jawaban:

m=16-0+1=17

h(251) = 251 mod 17 = 13

h(375) = 375 mod 17 = 1

h(721) = 721 mod 17 = 7

h(333) = 333 mod 17 = 10

h(425) = 425 mod 17 = 0

h(17) = 17 mod 17 = 0

h(52) = 52 mod 17 = 1

h(145) = 145 mod 17 = 9

h(178) = 178 mod 17 = 8

h(105) = 105 mod 17 = 3

h(999) = 999 mod 17 = 13

h(2032) = 2032 mod 17 = 9

h(1021) = 1021 mod 17 = 1

425	**375**	**17**	**105**	**52**	**1021**		**721**	**178**	**145**	**333**	**2032**		**251**	**999**		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

6. Tentukan semua bilangan bulat yang bila dibagi dengan 9 menyisakan 1, bila dibagi 11 menyisakan 3 dan bila dibagi 13 menyisakan 5.
Jawaban:

$x \equiv 1 \pmod 9$
$x \equiv 3 \pmod{11}$
$x \equiv 5 \pmod{13}$
$x = 1 + 9k_1$
$x = 3 + 11k_2$
$1 + 9k_1 = 3 + 11k_2$
$k_1 = 10 \pmod{11}$
$x = 1 + 9(10 + 11k_2)$
$x \equiv 91 \pmod{99}$
$91 + 99k_2 \equiv 5 \pmod{13}$
$k_2 = 12 \pmod{13}$
$x = 91 + 99(12 + 13k_3)$
$x = 1279 + 1287\, k_3$
$x \equiv 1279 \pmod{1287}$
misalkan m adalah bilangan bulat positif, maka semua bilangan bulat yang memenuhi ketiga persamaan adalah sebagai berikut: $x = 1279 + 1287\, m$

Jawablah pada halaman kosong di bawah ini dan halaman dibaliknya. Jiak tidak cukup gunakan kertas tambahan.