Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Jawaban Kuis ke-1 IF2091 Struktur Diskrit (3 SKS) - Logika, Himpunan, Relasi dan Fungsi
Dosen: Rinaldi Munir & Harlili
Kamis, 1 September 2010
Waktu: 60 menit

1. Diberikan pernyataan *"Untuk mendapatkan satu kupon undian, Anda cukup membeli dua produk senilai Rp. 50.000,-"*.
   a. Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika *p*, maka *q*".
   b. Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tersebut.

Jawaban:

a. **Jika** Anda membeli dua produk senilai Rp. 50.000,-, **maka** Anda mendapatkan satu kupon undian"

b. Ingkaran:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$$
$$\Leftrightarrow p \wedge \sim q \qquad \text{[Hukum de Morgan]}$$

"Anda membeli dua produk senilai Rp. 50.000,- **dan** Anda **tidak** mendapatkan satu kupon undian"

Konvers:

"**Jika** Anda mendapatkan satu kupon undian, **maka** Anda membeli dua produk Rp. 50.000,-"

Invers:

"**Jika** Anda **tidak** membeli dua produk senilai Rp. 50.000,-, **maka** Anda **tidak** mendapatkan satu kupon undian"

Kontraposisi:

"**Jika** Anda **tidak** mendapatkan satu kupon undian, **maka** Anda **tidak** membeli dua produk senilai Rp. 50.000,-"

2. Periksa apakah proposisi berikut merupakan tautologi:
   "belajar mengakibatkan tidak pintar, adalah syarat cukup untuk tidak belajar, berlaku jika dan hanya jika pintar atau tidak belajar"

Jawaban:
Misal p: pintar dan b: belajar
Proposisi pada soal dapat diubah menjadi $((b \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (p \vee \sim b)$
Selanjutnya, kita uji kebenarannya dengan tabel kebenaran

p	b	~p	b→~p	~b	(b→~p) →~b	p∨~b	**(p∨~b) ⇔ ((b→~p) →~b)**
T	T	F	F	F	T	T	**T**
T	F	F	T	T	T	T	**T**
F	T	T	T	F	F	F	**T**
F	F	T	T	T	T	T	**T**

Terlihat bahwa proposisi $((b \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (p \vee \sim b)$ selalu benar, sehingga **merupakan suatu tautologi**.

3. Diketahui *A*, *B*, dan *C* merupakan suatu himpunan. Jika diketahui $(A \cap B) = (A \cap C)$, jelaskan apakah berarti bahwa selalu $B = C$? Berikan suatu *counter example*.

Jawaban:

Tidak selalu, salah satu counter examplenya yaitu misalkan B merupakan himpunan bagian dari C dan C – B ≠ {}.

4. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Gunakan hukum-hukum aljabar himpunan dan prinsip dualitas untuk menentukan hasil dari operasi himpunan
   a. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
   b. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Jawaban:

a. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

$= ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$ [Hukum Asosiatif]

$= (B \cap (A \cup \overline{A})) \cup (\overline{B} \cap (A \cup \overline{A}))$ [Hukum Distributif]

$= (B \cap U) \cup (\overline{B} \cap U)$ [Hukum Komplemen]

$= U \cap (B \cup \overline{B})$ [Hukum Distributif]

$= U \cap U$ [Hukum Komplemen]

$= U$ [Hukum Idempoten]

b. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

$= \varnothing$ [Hukum Dualitas dari jawaban a]

5. Misalkan *R* menyatakan relasi "2*x*/*y* adalah anggota bilangan bulat" dengan *x* dan *y* anggota bilangan riil selain nol. Tentukan apakah relasi *R*:
   a. Refleksif
   b. Tolak-setangkup
   c. Menghantar

Jawaban:

a. Untuk setiap x=y=a berlaku 2x/y = 2a/a = 2 → bilangan bulat
   ∴ R **refleksif** karena (a,a) ∈ R

b. Ambil x=a dan y=2a, kita dapatkan 2x/y = 2a/2a = 1 → bilangan bulat
   Ambil x=2a dan y=a, kita dapatkan 2x/y = 4a/a = 4 → bilangan bulat

   ∴ R **tidak tolak-setangkup** karena terdapat bilangan x dan y dengan x≠y tetapi (x,y) ∈ R dan (y,x) ∈ R

c. Pilih suatu x, y, z dengan ketentuan, 2x/y dan 2y/z adalah bilangan bulat ganjil. Sehingga kita miliki (x,y) ∈ R dan (y,z) ∈ R
   Selanjutnya kita periksa (x,z):

   2x/z = 2x/y . y/z = ½ (2x/y).(2y/z) = ½ (suatu bil. ganjil).(suatu bil. ganjil) → bukan bilangan bulat

   ∴ R **tidak menghantar** karena terdapat suatu x, y, dan z sehingga (x,y) ∈ R dan (y,z) ∈ R tetapi (x,z) ∉R

6. Didefinisikan relasi *R* pada *N* dengan (*x*, *y*)∈ *R* jika dan hanya jika *x* – *y* adalah kelipatan 5. Jelaskan apakah relasi tersebut merupakan relasi kesetaraan.

Jawaban:

Suatu relasi merupakan relasi kesetaraan jika ia refleksif, setangkup dan menghantar.

- Relasi tersebut jelas merupakan relasi refleksif, karena untuk setiap a pada N maka 5|a-a atau 5|0. Sehingga untuk setiap a berlaku (a,a) ∈ *R*.
- Relasi tersebut merupakan relasi setangkup, karena jika (a,b) ∈ *R* maka (b,a) ∈ *R* juga. Hal ini dapat diketahui dari, misalkan 5|(a-b), maka kita juga dapat menyimpulkan bahwa 5|-(a-b) atau dalam kata lain 5|(b-a).
- Relasi tersebut merupakan relasi menghantar, karena jika (a,b) ∈ *R* dan (b,c) ∈ *R* maka (a,c) ∈ *R*. Hal ini dapat diketahui dari :
  Misalkan a-b=5m, dan b-c = 5n, dengan m,n ∈ N, maka dengan mengurangi kedua persamaan tersebut diperoleh a-c=5m-5n ⇔ a-c = 5(m-n) atau dalam kata lain 5|a-c. Sehingga (a,c) juga terdapat pada relasi *R*

∴ karena relasi tersebut memenuhi ketiga syarat diatas, maka relasi tersebut merupakan relasi kesetaraan.

7. Diketahui sebuah fungsi *f* : *N*→*N* yang memiliki sifat *f*(*a* + *b*) = *bf*(*a*) + *af*(*b*) + *ab*. Jika diketahui bahwa *f*(1) =1, tentukan *f*(11).

Jawaban:

$f(2) = f(1+1) = 1.f(1) + 1.f(1) + 1.1 = 3$

$f(4) = f(2+2) = 2.f(2) + 2.f(2) + 2.2 = 16$

$f(8) = f(4+4) = 4.f(4) + 4.f(4) + 4.4 = 144$

$f(10) = f(8+2) = 8.f(2) + 2.f(8) + 8.2 = 328$

$f(11) = f(10+1) = 10.f(1) + 1.f(10) + 10.1 = 368$

Jadi, $f(11) = 368$

.