APLIKASI GRAF DALAM PERMAINAN *GENERALIZED GEOGRAPHY*

Fransiska Putri Wina – 13508060

Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB
Jln. Ganesha 10 Bandung 40132
If18060@students.if.itb.ac.id

ABSTRAK

Graf merupakan salah satu pokok pembelajaran dalam matematika diskrit. Aplikasi graf sangat beragam. Salah satu alternatifnya adalah pengapikasian graf dalam bentuk suatu permainan anak-anak, yang disebut sebagai *generalized geography*. Permainan ini merupakan pengembangan dari peramainan *geography*. Pada makalah ini akan dibahas dengan detail mengenai permaian *generalized geography* ini, bagaimana cara memainkannya, sampai dengan menentukan pemain mana yang memiliki strategi permainan terbaik. Permasalahan dalam menentukan pemain mana yang memiliki strategi kemenang dalam *generalized geography* merupakan suatu PSPACE-*complete*, yang mana akan diupas pula dalam makalah ini.

Kata kunci: graf, *geography*, *generalized geography*, PSPACE-complete.

1. PENDAHULUAN

Bagi mahasiswa program studi teknik informatika, kata 'graf' tentunya sudah kerap kali mampir di telinga masing-masing. Hal ini lazim saja karena mahasiswa tersebut telah mempelajari mengenai graf. Namun, jika kata graf ini terlewat di telinga anak kecil, kata ini akan tertangkap sebagai kata yang baru dan kurang akrab, karena mungkin jarang terdengar.

Permainan *generalized geography* merupakan salah satu transportasi bagi kata graf sampai di telinga anak-anak. Bersama dengan permainan *geography*, permainan *generalized geography* ini berjasa dalam mengenalkan graf serta beberapa sifat-sifatnya pada anak-anak. Permainan *generalized geography* semakin menguatkan kenyataan bahwa graf memiliki banyak sekali varian aplikasi.

Tujuan dari makalah ini adalah mengenalkan permainan *geographic graph*, sekaligus juga mengulas perangkat-perangkatnya. Berikut dijabarkan megenai sistematika penulisan dalam makalah ini. Bab 2 diisi oleh ulasan singkat mengenai teori graf. Kemudian dilanjutkan dengan bab 3 yang akan memperkenalkan permainan *geography*. Bab 4 akan mengulas mengenai *generalized geography* serta bagaimana cara memainkannya. Pada bab 5 akan dijabarkan mengenai teorema yang berkaitan dengan *generalized geography*, di dalamnya akan pula dibahas mengenai PSPACE, dan PSPACE-*complete*. Bab terakhir, bab 6, akan berisi kesimpulan dari makalah ini.

2. GRAF

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut :

Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*) = $\{ v_1 , v_2 , ... , v_n \}$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1 , e_2 , ... , e_n \}$

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. **Graf sederhana** (*simple graph*)
   Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.
2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*)
   Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis :

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)
   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.
2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Sisi berarah sering disebut busur (*arc*). Pada graf berarah, (v_j,v_k) dan (v_k,v_j) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(v_j,v_k) \neq (v_k,v_j)$. Untuk busur (v_j,v_k) simpul v_j dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan

simpul v_k dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*).

Definisi graf dapat diperluas sehingga mencakup graf-ganda berarah, gelang dan sisi ganda diperbolehkan ada. Pada tabel berikut diiringkas perluasan definisi graf :

Jenis	Sisi	Sisi Ganda Diperbolehkan?	Sisi Gelang diperbolekan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Berarah	Tidak	Ya
Grah-ganda berarah	Berarah	Ya	Ya

Tabel 1. Jenis-jenis graf

Beberapa isitlah yang penting terkait dengan topik pada makalah ini antara lain :

1. **Bertetanggan** (*Adjacent*)
   Dua buah simpul pada graf tak-berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.
2. **Bersisian** (*Incident*)
   Untuk sembarang sisi e = (v_j,v_k), sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_j dan simpul v_k.
3. **Simpul Terpencil** (*Isolated Vertex*)
   Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.
4. **Graf Kosong** (*Null Graph* atau *Empty Graph*)
   Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong.
5. **Derajat** (*Degree*)
   Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
   Pada graf berarah, derajat simpul v dinyatakan dengan $d_{in}(v)$ dan $d_{out}(v)$, yang dalam hal ini $d_{in}(v)$ = drajat-masuk (*in-degree*) = jumlah busur yang masuk ke simpul v dan $d_{out}(v)$ = derajat keluar (*out-degree*) = jumlah busur yang keluar dari simpul v serta d(v) = $d_{in}(v) + d_{out}(v)$.
6. **Lintasan** (*Path*)
   Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan vn dalam graf g adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi berbentuk $v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,e_n,v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0,v_1)$, $e_2 = (v_1,v_2),\ldots,e_n = (v_{n-1},v_n)$ adalah sisi sisi dari graf G.
7. **Terhubung** (*Connected*)
   Graf tak berarah G disebut graf terhubung bila untuk setiap pasang simpul di G terdapat lintasan yang saling menghubungkan.
   Graf berarah G dikatakn terhubung bila graf tak-barahnya terhubung.
   Graf berarah G dikatakan terhubung kuat bila untuk setiap pasang simpul sembarang di G terhubung kuat (bila terdapat lintasan dari kedua arah).

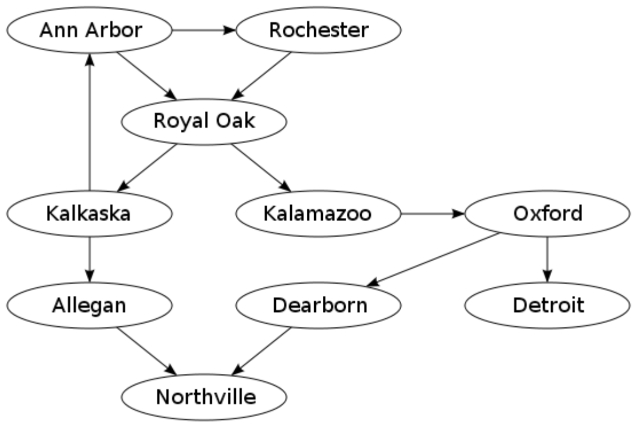
3. PERMAINAN *GEOGRAPHY*

Permainan *geography* merupakan bentuk khusus dari permainan *word chain* (rantai kata). *Word chain*, akrab juga dikenal sebagai *Grab on Behind* (Ditangkap di Belakang)*, Last and First* (Awal dan Akhir)*,* dan *Alpha and Omega* (Alfa dan Omega), merupakan suatu permainan kata di mana pemain mulai dengan suatu kata yang berawalan dengan suatu huruf atau huruf yang mengakhiri kata sebelumnya. Umumnya dipilih suatu kategori kata untuk permainan ini. Terdapat batas waktu dalam menjawab, misalnya lima detik, dan kata tidak boleh diulang dalam permainan yang sama. Sebagai contoh rantai hewan dapat berupa : Ular-Rubah-Hiu-Unta.

Permainan *word chain* ini sering dipakai untuk mengajarkan bahasa Inggris sebagai bahasa sekunder dan juga sering pula dimainkan dalam perjalanan.

Versi dari permainan ini di mana digunakan nama kota, disebut sebagai *geography*. Di Jepang, terdapat pula permainan yang sama, bernama *Shiritori*.

Untuk memvisualisasikan permainan ini, suatu graf berarah dapat dibentuk dengan simpulnya merupakan setiap kota di dunia. Sebuah panah ditempatkan dari simpul N_1 ke N_2 jika dan hanya jika kota berlabel N_2 dimulai dengan huruf yang mengakhiri nama dari kota berlabelkan simpul N_1. Dengan lain, kita menarik anak panah dari satu kota ke kota lain jika kota yang pertama menunjuk pada yang kedua sesuai dengan peraturan permainan. Setiap alternatif arah dari anak panah dalam graf bearaf bergantung pada pilihan masing-masing pemain. Pemain yang pertama kali tidak dapat memperpanjang lintasan kalah. Ilustrasi dari permainan (yang berisi beberapa kota di Michigan, USA) diperlhatkan pada gambar di bawah ini.



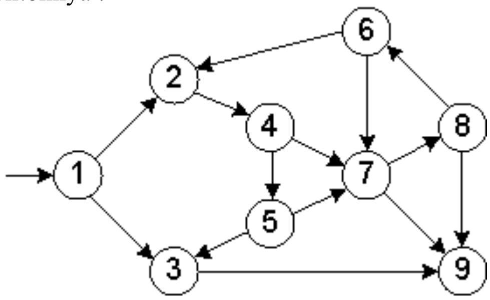
Gambar1. Permainan *Geography* ddalam bentuk graf

Pada graf *geography*, tidak ada simpul terpencil, karena pasti setiap simpul bertetangga dengan suatu simpul lainnya. Graf ini juga tidak mungkin merupakan suatu graf kosong.

Derajat dari simpula-simpul pada graf *geography* minimal dua (satu derajat masuk dan satu derajat keluar). Hal ini menunjukkan bahwa dari kata yang satu terdapat beberapa opsi kata lanjutan, dan satu kata dapat ditunjuk oleh beberapa kata lain. Graf ini merupakan suatu graf terhubung lemah.

4. PERMAINAN *GENERALIZED GEOGRAPHY*

Pada permainan *generalized geography* (GG), simpul dengan nama kota diganti dengan nomor. Berikut contohnya :

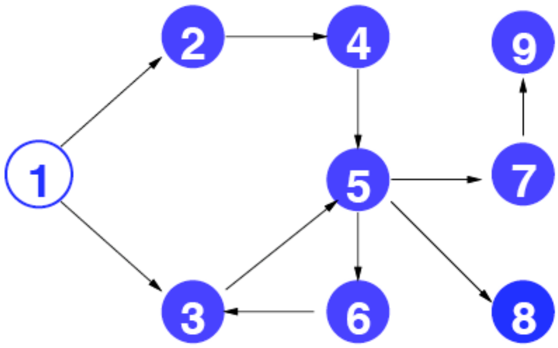


Gambar2. Contoh Bentuk Graph dalam Permainan *Generalized Geography*

Graf dari GG memiliki sifat-sifat graf yang persis sama dengan graf *geography*, sebagaimana telah disebutkan sebelumnya.

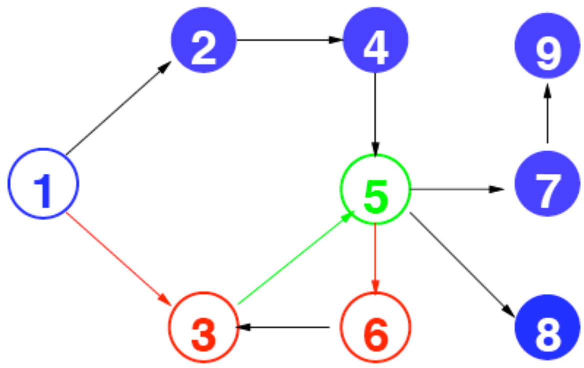
Berkaitan dengan gambar2, P_1 didefinisikan sebagai pemain yang memiliki giliran pertama dan P_2 sebagai pemain yang memiliki giliran selanjutnya. Selanjutnya, kit beri nama simpul N_1 sampai N_n. Pada gambar di atas, P_1 memiliki strategi kemenangan sebagai berikut : N_1 menunjuk hanya pada dua simpul N_2 dan N_3. Sehingga pergerakan P_1 yang pertama harus di antara kedua pilihan tersebut. P_1 memilih N_2 (jika P_1 memilih N_3, maka P_2 akan memilih N_9 sebagai pilihan satu-satunya dan P_1 akan kalah). Selanjutnya P_2 memilih N_4 karena simpul tersebut merupakan pilihan satu-satunya. P_1 sekarang memilih N_5 dan P_2 akan memilih antara N_3 atau N_7. Tanpa mengindahkan pilhan P_2, P_1 memilih N_9 dan P_2 tidak memiliki pilihan yang tersisa. P_1 memenangkan permainan.

Berikut contoh lain dari GG dengan langkah-langkah yang lebih terperinci :



Gambar3. Contoh Lain Bentuk Graph dalam Permainan *Generalized Geography*

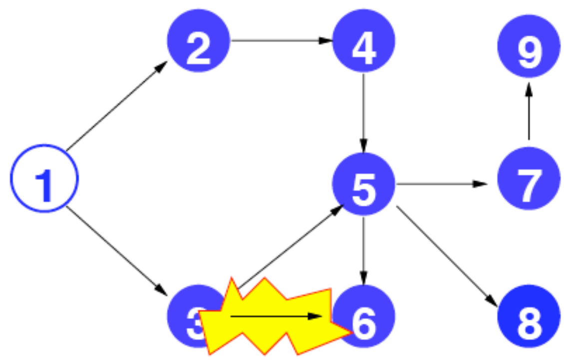
Pertama akan diajukan klaim bahwa P_1 memiliki strategi kemenangan.



Gambar4. Klaim : P_1 *Memiliki Strategi kemenangan*

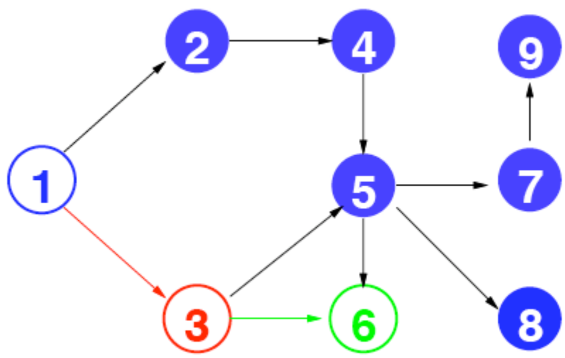
P_1 diklaim memiliki strategi kemenangan. P_1 memilih n1. P_2 harus memilih n5. P_1 memilih n6. P_2 kalah karena tidak memiliki pilhan node lanjutan.

Bila kita membalik satu arah anak panah, maka kedudukan akan terbalik. Klaim : P_2 menang.



Gambar5. Bila ada arah yang diubah, kemenangan berpindah pada P_2

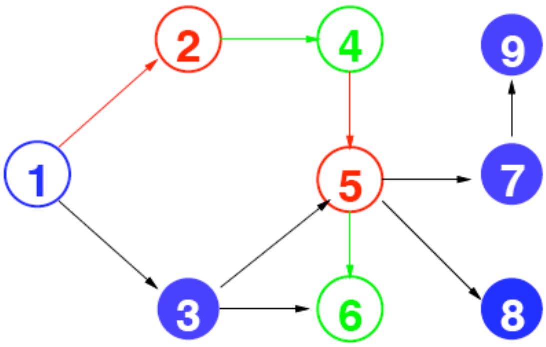
Ingat klaim yang telah disebutkan : P_2 menang. Jika P_1 memilih n3, sebagimana yang dilakukannya sebelumnya. Maka P_2 memilih n6 dan menang. Hal ini diilustrasikan pada gambar6.



Gambar6. Klaim : P_2 menang

P_1 mencoba mengubah langkah awalnya. P_1 mulai dengan memilih n2. P_2 merespon dengan memilih n4.

Tidak ada pilihan lain, P_1 memilih n5. P_2 menang dengan memilih n6. Hal ini diilustrasikan pada gambar7.



Gambar7. Walaupun P_1 mengubah langkah awalnya, P_2 tetap menang

5. TEOREMA MENYANGKUT *GENERALIZED GEOGRAPHY*

Permasalahan dalam menentukan pemain yang mana yang memiliki strategi kemenangan dalam suatu permainan *generalized geography* merupakan *PSPACE-complete.*

GG = { <*G*, *b*> | P_1 memiliki strategi kemenangan (*winning strategy*) untuk permainan *generalized geography* pada graf G dimulai pada simpul b}

Sebelum menjabarkan pembuktian berkaitan dengan hal ini, akan diulas terlebih dahulu mengenai PSPACE,PSPACE-*complete*, dan PSPACE-*hard.*

5.1 PSPACE

Dalam teori penghitungan kekompleksan, PSPACE merupakan himpunan semua *decision problem* (suatu pertanyaan dalam suatu sistem formal dengan suatu jawaban ya-atau-tidak, bergantung pada nilai beberapa parameter input) yang dapat diselesaikan oleh seubah mesin Turing menggunakan suatu ruang dalam ukuran polynomial.

Jika menggunakan notasi SPACE(t(n)), himpunan semua permasalahan yang dapat diselesaikan oleh mesin Turing menggunakan paling banyak t(n) ruang untuk beberapa fungsi t untuk besar ukuran input n, maka PSPACE dapat didefinisikan secara formal dengan

$$\mathrm{PSPACE} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{SPACE}(n^k) \quad (1)$$

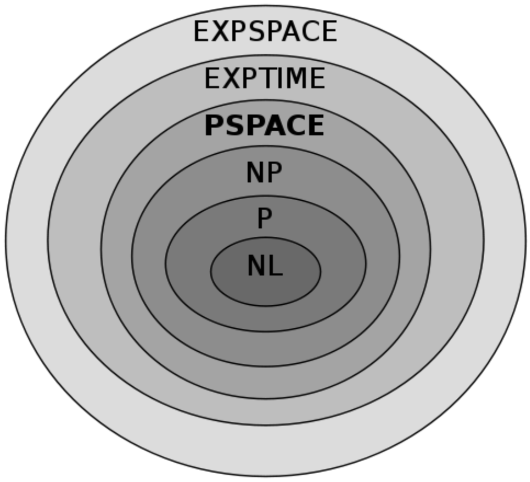
PSPACE merupakan suatu *superset* keteat dari himpunan bahasa dengan konteks yang sensiftif. Ternyata dengan mengijinkan mesin Turing untuk menjadi tidak berfungsi sebagai penentu tidak menambah kekuatan tambahan. Karena dari teori Savitch, NSPACE ekivalen dengan PSPACE, terutama karena mesin Turing yang dapat berfungsi sebagai penentu dapat mensimulasikan mesin Turing yang tidak dapat berfungsi menjadi penentu (walaupun mengkin akan dibutuhkan lebih banyak waktu).

Berikut diketahui relasi antara PSPACE dengan kelas kekompleksan NL, P, NP, PH, EXPTIME, dan EXPSPACE :

$$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PH} \subseteq \mathrm{PSPACE}$$
$$\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$$
$$\mathrm{NL} \subsetneq \mathrm{PSPACE} \subsetneq \mathrm{EXPSPACE} \quad (2)$$

Diketahui bahwa pada baris pertama dan kedua, paling tida satu kandungan himpunan harus ketat, tapi tidak diketuhui yang mana. Biasanya sering diberikan prasangkan bahwa semuanya ketak.

Sebaliknya, kandungan pada baris ketiga semua diketahui ketat. Yang pertama berasal dari pendiagonalan langsung (teori hierarki ruang) dan fakta bahwa PSPACE = NSPACE melalui teori Savitch. Yang kedua mengikuti langsung dari teori hierarki ruang.



Gambar8. Representasi Hubungan antar Kelas Kekompleksan

Permasalahan terberat dalam PSAPCE adalah mengenai permasalahan PSPACE- *complete.*

5.2 PSPACE-*complete*

Suatu bahasa B merupakan suatu PSPACE-*complete* jika :

a. B $\in$ PSPACE

b. Untuk semua A $\in$ PSPACE, A $\leq_P$ B

Di mana A $\leq_P$ B berarti ada polynomial-banyak waktu-satu reduksi dari A ke B. Permasalahan PSPACE-*complete* sangat penting dalam mempelajari permasalahan PSPACE karena permasalahan PSPACE-*complete* merepresentasikan permasalahan paling sulit dalam PSPACE. Menemukan solusi sederhana bagi suatu permasalahan PSPACE-*complete* berarti terdapat solusi sederhana untuk semua permasalahan dalam PSPACE karena semua permasalahan PSPACE dapat direduksi menjadi permasalahan PSPACE-*complete*.

5.3 PSPACE-*hard*

Dalam teori penghitungan kekomplekasin, suatu *decision problem* p dikatakan sebagai PSPACE-*hard* jika diberikan *decision problem* q di PSPACE, q dapat direduksi menjadi p dalam waktu polynomial. PSPACE-*hard* dibedakan dari PSPACE-*complete* dengan fakta bahawa PSPACE-*hard* tidak mengharuskan masalahnya berada dalam PSPACE. Sebagai contoh, *halting problem* merupakan permasalahn PSPACE-*hard*, namun bukan PSPACE-*complete*.

5.4 PEMBUKTIAN GG MERUPAKAN PSPACE-*COMPLETE*

5.4.1 GG TERCAKUP DALAM PSPACE

Untuk membutikan bahwa GG $\in$ PSPACE, diberikan suatu algoritma rekursif dalam ruang polynomial untuk menentukan pemain mana yang mempunyai strategi kemenangan. Diberikan GG $<G, n_{start}>$ di mana G merupakan graf berarah dan n_{start} merupakan suatu simpul awal, algoritma M berlaku :

Pada $M(<G, n_{start}>)$:

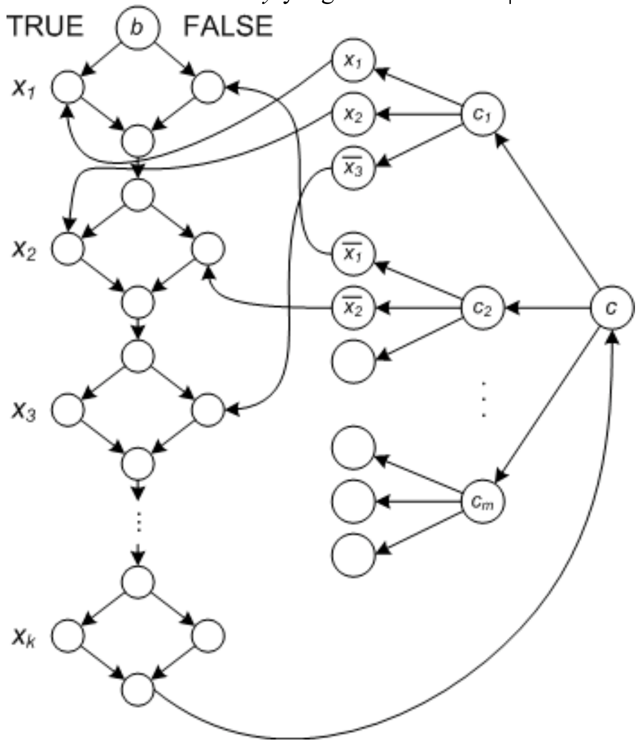
1. Menghitung derajat keluar dari node n_{start}. Jika derajat keluarnya 0, maka ditolak, karena tidak ada pergerakan yang mungkin untuk P_1.
2. Membangun suatu daftar dari semua simpul yang mungkin dicapai dari n_{start} dengan satu sisi, : n_1, n_2, ..., n_i.
3. Menghilangkan n_{start} dan semua sisi yang terhubung dengan dari G untuk membentu G1.
4. Untuk setiap simpul n_j dalam daftar n_1, ..., n_i, panggil $M(<G, n_i>)$.
5. Jika semua pemanggilan diterima, maka tanpa mempedulikan keputusan yang dibuat P_1 , P_2 memiliki strategi kemenangan, maka putuskan tolak. Sebaliknya (jika ada pemanggilan yang ditolak) P_1 memiliki pilihan untuk menggagalkan strategi kemenangan dari P_2, jadi putuskan terima.

Algorimta M jelaslah menentukan GG. GG di PSPACE karena satu-satunya ruang kerja polynomial terkonsumsi yang tidak gamblang adalah *stack* rekursi. Ruang yang terkonsumsi oleh *stack* rekursi merupakan polynomial karena setiap level dari rekursi menambahkan suatu simpul ke *stack*, dan paling banyak terdapat *n* level, dimana *n* merupakan jumlah simpul di G.

5.4.2 GG MERUPAKAN PSPACE-*hard*

Untuk menentukan tingkat kekekarasa PSPACE-*hard* dari GG, kita dapat mereduksi permasalahan *FORMULA-GAME* (yang diketahui sebagai PSPACE-*hard*) menjadi GG di waktu polynomial (P). Secara singkat, suatu permasalahan *FORMULA-GAME* mengandung formula Boolean terkuantisasi $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ...Qx_k(\psi)$ di mana Q merupakan $\exists$ atau $\forall$. Permainan dimainkan oleh dua pemain P_a dan P_e, yang memilih nilai secara alternatif untuk kesuksesan x_i. P_e memenangkan permainan bila forumula ψ berakhir benar, P_a dan menang jika ψ berakhir salah.

Dlam pembuktian ii, kita asumsikan bahwa daftar *quantifier* berawal dan berakhir dengan keberadaan *qualifier*, $\exists$, untuk kesederhanaa. Perlu diingat bahwa ekspresi apa pun dapat dikonversi ke bentuk ini dengan menambah variabel *dummy* yang tidak keluar di ψ.



Gambar9. *FORMULA GAME* pada GG

Dengan membangun graf G seperti pada gambar9, kita akan menunjukkan bahwa bentuk apa pun dari *FORMULA-GAME* dapat direduksi menjadi bentuk dari *Generalized Geography*, di mana strategi optimal untuk P_1 ekivalen dengan strategi optimal untuk P_e, dan P_2 ekivalen dengan P_a.

Rantai vertikal kiri dari simpul didesain untuk meniru prosedur pemilihan nilai untuk variabel pada *FORMULA-GAME*. Setiap struktur wajik berkoresponden dengan suatu nilai yagn *quantified*. Pemain dapat melangkah dengan menentukan lintasan pada setiap simpul bercabang. Karena telah ada asusmsi bahwa *quantifier* pertama pasti ada, P_1 jalan terlebih dahulu, memilih simpul kiri jika x_1 benar dan kanan jika x_1 salah. Setiap pemain kemudian harus mengambil jalan dengan satu pilihan, kemudian P_2 memilih nilai untuk x_2. Proses ini berlanjut menelusuri bagian kiri sampai ke bawah. Setelah semua pemain melewati semua bentuk wajik, kembali menjadi kesempatan P_1 karena kita berasumsi bahwa *quantifier* terakhir ada. P_1 tidak memiliki pilihan kecuali mengikuti lintasan ke sisi kanan graf. Kemudian berganti menjadi kesempatan P_2 untuk bergerak.

Ketika permainan samapi ke sisi kanan dari graf, hal ini menjadi mirip dengan akhir permainan dari *formula game*. Pada *formula game*, P_e menang jika ψ benar, sedangkan P_a menang jika ψ salah. Sisi kanan dari graf menjamin bahwa P_1 menang jika dan hanya jika P_e menang, dan P_2 menang jika dan hanya jika P_a menang.

Pertama kita tunjukkan bahwa P_2 selalu menang ketika P_a menang. Jika P_a menang, ψ salah. Jika ψ salah, terdapat klausa yang tidak memuaskan. P_2 akan memilih suatu klausa yang tidak memuaskan untuk menang. Kemudian ketika berganti menjai giliran P_1 , ia harus memilih suaut *literal* dari klausa yang dipilih oleh P_2. Karena semua *literal* pada klausa salah, mereka tidak terhubung pada simpul sebelumnya yang telah dikunjungi di rantai vertikal kiri. Hal ini menyebabkan P_2 mengikuti hubungan ke simpul yang berkaitan dalam wajik dari simpul kiri dan memilihnya. Hal ini mengakibatkan P_1 tidak dapat memilih simpul dan kalah.

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa P_1 selalu menang jika P_e menang. Jika P_e menang, ψ benar. JIka ψ benar, setiap klausa di sisi kanan dari graf mengandung *literal* yang benar. P_2 dapat memilih sembarang klausa. Kemudian P_1 memilih *literal* yang benar. Dan karena benar, simpul yang bersebelahan di sebelah kiri simpul tersebut sudah dipilih, sehingga P_2 tidak dapat bergerak dan kalah.

5.4.3 KONSEKUENSI

Telah ditunjukkan bahwa GG merupakan PSPACE-*complete*, tidak ada algoritma waktu polinomial yan ada untuk permainan optimal di GG kecuali P=PSPACE.

6. KESIMPULAN

Graf sangat kaya dalam aplikasinya. Salah satunya adalah dalam bentuk permainan anak-anak *Generalized Geography* yang telah dijabarkan sebelumnya. Permainan ini sangat baik diberikan pada anak-anak, untuk melatih logika dan juga untuk memberikan pemahaman yang cukup sebagai pengenalan awal graf. Selain itu telah dijelaskan pula beberapa teorema yang terkait dengan graf dalam lingkup teori penghitungan kekompleksan, antar lain bahwa *Generalized Geography* merupakan suatu PSPACE-*complete.*

REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi, "Diktat Kuliah IF 2091 Struktur Diskrit", Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika, Institut Teknologi Bandung, 2008.

[2] www.cs.brown.edu/courses/cs152/space3.ps

[3] www.cs.toronto.edu/~micah/csc2401/lect14.ps

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Geography_(game)

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_geography#Graph_model

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/PSPACE

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/PSPACE-complete

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/PSPACE-hard