

REPRESENTASI BILANGAN FIBONACCI DALAM BENTUK KOMBINATORIAL

Rizky Maulana Nugraha

Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung
Blok Sumurwedi I RT/RW 04/01, Haurgeulis, Indramayu, 45264
e-mail: lana_pcfre@yahoo.com

ABSTRAK

Barisan fibonacci adalah salah satu barisan yang memiliki fungsi rekursif. Sejak pertama kali dikenalkan oleh fibonacci, barisan ini diketahui memiliki banyak keunikan. Misalnya, jumlah banyaknya kelopak bunga termasuk bilangan Fibonacci. Barisan fibonacci juga berkaitan erat dengan nisbah emas (*golden ratio*). Dimana perbandingan dari 2 bilangan fibonacci yang berdekatan akan semakin mendekati nisbah emas, untuk bilangan fibonacci yang besar. Barisan fibonacci dalam bentuk rekursif sudah banyak direpresentasikan dalam bentuk fungsi. Di antaranya dalam bentuk fungsi eksponen. Sejauh yang saya ketahui, saya belum menemukan representasi fibonacci dalam bentuk kombinatorial. Dalam makalah ini, akan dibahas hubungan barisan fibonacci dengan banyaknya kemungkinan penyusunan i buah benda ke dalam kotak sedemikian sehingga tidak ada kotak yang berisi lebih dari r buah benda, dengan aturan urutan penyusunan diperhitungkan. Dalam makalah ini, penulis ingin memperlihatkan hubungan r dengan derajat barisan fibonacci. Derajat barisan fibonacci, didefinisikan penulis sebagai banyak bilangan fibonacci sebelum n yang dijumlahkan untuk mendapatkan bilangan fibonacci ke- i . Misalnya jika derajatnya 2, maka bilangan fibonacci ke- i sama dengan penjumlahan 2 bilangan fibonacci sebelumnya. Jika r sama dengan 4, maka bilangan fibonacci ke- i sama dengan penjumlahan 4 bilangan fibonacci sebelumnya. Barisan fibonacci dengan derajat n , disebut dengan barisan n -nacci. Dalam makalah ini, penulis berhasil membuktikan hubungan tersebut untuk barisan fibonacci berderajat 2, dengan menggunakan Identitas Pascal. Namun karena keterbatasan penulis, penulis belum bisa membuktikan bukti umum untuk derajat lebih dari 2. Namun, penulis berharap pembuktian tersebut bisa dijadikan referensi untuk derajat yang lebih besar dari 2.

Kata kunci: Barisan Fibonacci, Identitas Pascal, segitiga Pascal, Kombinatorika.

1. PENDAHULUAN

Barisan fibonacci diperkenalkan oleh Leonardo da Pisa dari Italia, yang memiliki alias "Fibonacci", kependekan dari "filius Bonacci", yang berarti putra dari Bonacci.

Barisan ini termasuk barisan rekursif. Namun, versi yang bukan rekursifnya sudah ditemukan. Bentuk rekursif dan bukan rekursif akan diberikan di bab selanjutnya. Namun, sejauh ini, penulis belum menemukan representasi bilangan fibonacci dalam bentuk kombinatorial. Andaikata representasi ini memang belum ditemukan, makalah ini bertujuan menawarkan alternatif representasi bilangan fibonacci dalam bentuk kombinatorial tersebut.

Makalah ini bertujuan menemukan hubungan antara banyaknya kemungkinan susunan dari i benda dengan bilangan fibonacci ke- i .

Susunan yang dimaksud adalah susunan dari i buah benda ke dalam kotak-kotak, sedemikian sehingga tidak ada kotak yang menampung lebih dari r buah benda.

Jumlah susunan yang mungkin itu dihipotesiskan sama dengan bilangan fibonacci berderajat r ke- i . Pembuktian dilakukan menggunakan pendekatan induksi matematika.

Pembahasan dalam makalah ini hanya berisi pembuktian permasalahan diatas. Pembuktian untuk teorema dan alat yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan diatas tidak diikutsertakan. Penulis hanya memberikan referensi untuk bacaan lebih lanjut.

2. METODE

Metode yang digunakan untuk mencari solusi permasalahan, adalah dengan cara membuat representasi kombinatorika dari permasalahan, dan merumuskannya. Selanjutnya, rumus tersebut diuji menggunakan induksi matematik. Jika rumus tersebut teruji mengikuti sifat identitas barisan fibonacci, maka rumus tersebut dapat digunakan untuk merepresentasikan bilangan fibonacci. Selanjutnya, permasalahan akan diperluas menjadi barisan fibonacci dengan derajat lebih dari 2. Pendekatan pemecahan masalah menggunakan metode yang mirip

dengan yang digunakan untuk bilangan fibonacci berderajat 2. Namun, penulis belum menemukan solusi umum permasalahan ini. Jadi, permasalahan hanya disediakan sebagai konjektur, untuk dibuktikan lebih lanjut bagi yang berminat.

3. ANALISIS

3.1 Analisis Masalah untuk $r = 2$

3.1.1 Representasi Kombinatorial dari Permasalahan

Representasi kombinatorial yang dimaksud adalah permasalahan jumlah susunan objek dengan aturan yang sudah dijelaskan tadi. Terdapat i buah objek, kemudian kita tetapkan r sama dengan 2. Dengan kata lain, permasalahannya adalah mencari banyak susunan yang mungkin dari peletakkan i buah objek ke dalam kotak-kotak, dengan kendala, 1 kotak hanya mampu memuat maksimal 2 buah objek.

Sebagai contoh, kita tinjau jika $i=0$. Artinya tidak ada benda yang dapat diletakkan ke dalam kotak-kotak tersebut, sehingga banyak susunan yang mungkin adalah 1. Yaitu 1 buah kotak kosong.

Selanjutnya kita tinjau jika $i=1$. Artinya hanya ada 1 benda yang dapat diletakkan ke dalam kotak-kotak tersebut, sehingga banyak susunan yang mungkin adalah 1. Yaitu 1 buah kotak berisi 1 objek.

Kemudian untuk $i=2$. Artinya ada 2 benda yang dapat diletakkan dengan 2 cara, yaitu:

1. Dua buah kotak, dengan masing-masing kotak berisi 1 buah benda
2. Satu buah kotak yang berisi 2 buah benda

Berikutnya untuk $i=3$, ada 3 susunan yang mungkin, yaitu:

1. Satu susunan dari tiga buah kotak, dengan masing-masing kotak berisi 1 buah benda
2. Dua susunan yang mungkin dari 2 kotak, dengan kotak pertama berisi 1 buah benda, dan kotak kedua berisi 2 buah benda

Selanjutnya untuk $i=4$, ada 5 susunan yang mungkin, yaitu:

1. Satu susunan dari empat buah kotak dengan masing-masing kotak berisi 1 buah benda
2. Tiga susunan yang mungkin dari 3 kotak, dengan kotak pertama berisi 1 buah benda, kotak kedua berisi 1 buah benda, dan kotak ketiga berisi 2 buah benda
3. Satu susunan dari 2 buah kotak, dengan masing-masing kotak berisi 2 buah benda

Selanjutnya untuk analisis i yang lebih besar, kita tetapkan bentuk penulisan tertentu agar susunannya dapat lebih mudah dipahami. Kita tetapkan kotak yang berisi k

buah benda, sebagai suatu bilangan yaitu k . Jadi, “2” berarti ada 1 buah kotak yang berisi 2 buah benda. Kemudian, untuk menuliskan kotak-kotak yang ada, nilai k dari masing-masing kotak tersebut ditulis menyambung. Misalnya, “122” berarti ada 3 buah kotak. Kotak pertama berisi 1 benda, kotak kedua dan ketiga berisi 2 benda. Selanjutnya, susunan yang dihitung tersebut adalah banyaknya permutasi kotak-kotak tersebut. Contoh, untuk “112” berarti ada 3 objek dengan objek pertama sebanyak 2 buah dan objek kedua sebanyak 1 buah. Maka, banyak susunan yang mungkin, dapat dituliskan sebagai permutasi dengan adanya objek yang sama, yaitu sebanyak,

$$\frac{3!}{2! 1!} = 3$$

Jadi ada 3 susunan yang mungkin.

Untuk mempermudah penulisan, penulisan “(112)” artinya adalah banyak susunan yang mungkin dari kotak-kotak “112”.

Jika kita tuliskan menggunakan format penulisan tadi, kita dapat menganalisis lebih lanjut pola hubungan antara banyaknya susunan dengan i .

Tabel 1 Banyaknya kemungkinan susunan i buah benda untuk $r=2$

Nilai i	Format penulisan	Banyak susunan yang mungkin
0	()	1
1	(1)	1
2	(11)+(2)	2
3	(111)+(12)	3
4	(1111)+(112)+(22)	5
5	(11111)+(1112)+(122)	8
6	(111111)+(11112)+(1122)+(222)	13

Dari tabel diatas, bisa kita perhatikan bahwa banyak susunan yang mungkin (untuk i sampai sama dengan 6) mengikuti aturan rekursi fibonacci. Sebagai contoh, $13=8+5$, $8=5+3$, $5=3+2$, $3=2+1$, dan $2=1+1$.

Untuk selanjutnya, kita ingin menganalisis, apakah hubungan ini hanya kebetulan untuk i sampai sama dengan 6, ataukah berlaku untuk seluruh $i > 2$? Untuk membuktikannya, kita harus menggunakan prinsip induksi, namun kita juga harus mendefinisikan suatu fungsi yang menyatakan banyaknya susunan dari benda-benda tersebut.

Kita berikan definisi,

$M(i,r)$, adalah suatu fungsi yang menghasilkan banyaknya susunan objek dari i buah benda ke dalam kotak-kotak, dengan jumlah maksimal benda yang ditampung 1 kotak, sebanyak r .

Jika tabel diatas dibentuk ulang,

Tabel 2 Bentuk kombinatorial dari fungsi M(i,2)

Nilai i	Format penulisan	Banyak susunan yang mungkin
0	$\binom{0}{0}$	1
1	$\binom{1}{0}$	1
2	$\binom{2}{0} + \binom{1}{1}$	2
3	$\binom{3}{0} + \binom{2}{1}$	3
4	$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$	5
5	$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$	8
6	$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3}$	13

Dari tabel diatas, bisa kita simpulkan bahwa,

$$M(i, 2) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{(i-1)/2} \binom{i-p}{p}, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \sum_{p=0}^{i/2} \binom{i-p}{p}, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases} \quad (2)$$

3.1.2 Identitas Pascal

Segitiga Pascal memuat koefisien dari penjumlahan dua buah bilangan a dan b yang dipangkatkan n. Namun, seperti yang sudah diketahui, koefisien tersebut juga dapat dicari dari rumus binomial Newton. Sebagai ilustrasi, tinjau segitiga Pascal berikut ini.

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

Gambar 1. Segitiga Pascal

Segitiga Pascal dibangun dengan aturan tertentu. Suatu angka di segitiga Pascal, adalah penjumlahan dari dua angka terdekat yang ada di atasnya, kecuali jika dia tidak memiliki angka terdekat yang bisa dijumlahkan, maka nilainya 1. Sebagai contoh, angka 3 adalah hasil penjumlahan dari angka 2 dan 1. Sedangkan angka 1 hanya memiliki 1 angka terdekat, yaitu 1, sehingga dia bernilai 1.

Sekarang jika kita coba menuliskan segitiga Pascal, dalam bentuk koefisien binomial, maka didapat,

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \dots \\ & & & 1 & \dots & \binom{n}{k} & \binom{n}{k-1} & \binom{n}{k-2} & \dots \\ & & 1 & \dots & \dots & \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k-1} & \dots & \dots \end{array}$$

Gambar 2. Segitiga Pascal dalam bentuk kombinatorial

Dari gambar diatas, secara intuisi dengan cara penjumlahan yang sama dengan segitiga Pascal sebelumnya, kita akan mendapatkan hubungan,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (1)$$

Persamaan (1) diatas, disebut Identitas Pascal.

3.1.3 Identitas Fibonacci

Barisan fibonacci memiliki identitas yang membedakannya dengan barisan lain. Identitas yang paling dikenal adalah definisi rekursifnya. Yaitu,

$$\text{fib}(i + 2) = \text{fib}(i + 1) + \text{fib}(i) \quad (3)$$

Barisan fibonacci juga memiliki definisi yang lain (non-rekursif). Definisi ini didapat dengan memperhatikan bahwa selisih dari 2 barisan fibonacci adalah barisan itu juga, yang berarti barisan fibonacci adalah modifikasi dari barisan eksponen. Definisi ini berupa,

$$\text{fib}(i) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i \right) \quad (4)$$

Dengan definisi ini, didapat fib(1)=1, dan fib(2)=1. Dua angka pertama deret fibonacci ini menjadi basis dari definisi rekursi barisan fibonacci.

Definisi rekursif tadi dapat diperluas, misalnya barisan tri-bonacci, adalah barisan yang memiliki identitas berupa,

$$\text{fib}_3(i + 3) = \text{fib}_3(i + 2) + \text{fib}_3(i + 1) + \text{fib}_3(i)$$

Untuk derajat yang lebih tinggi, misalnya tetra-bonacci, atau seterusnya hingga r-bonacci, kita definisikan identitas barisannya berupa,

$$\text{fib}_r(i + r) = \text{fib}_r(i + r - 1) + \text{fib}_r(i + r - 2) + \dots + \text{fib}_r(i)$$

3.1.4 Pembuktian Menggunakan Induksi

Hal yang ingin dibuktikan adalah persamaan berikut:

$$\text{fib}(i) = M(i - 1, 2) \quad (5)$$

Hipotesis persamaan ini dilihat dari pola yang muncul pada tabel 2. Identitas fibonacci yang akan kita gunakan untuk pembuktian adalah persamaan (3). Karena definisi ini berfungsi untuk i selain basis, maka pembuktian yang akan kita lakukan adalah untuk i lebih dari 2. Pembuktian $i=1$ dan $i=2$ dilakukan untuk membuktikan basis induksi

- Pembuktian basis induksi:

Persamaan (5) harus dibuktikan untuk basis $i=1$ dan $i=2$, karena definisi rekursif persamaan (3) membutuhkan 2 buah basis.

Dari tabel, dapat dilihat bahwa:

$$\text{fib}(1) = M(0,2) = 1$$

dan,

$$\text{fib}(1) = M(1,2) = 1$$

Jadi, basis induksi untuk persamaan (5) terbukti benar.

- Pembuktian bagian induksi:

Persamaan yang digunakan untuk induksi adalah persamaan (3) yang dihubungkan dengan persamaan (2).

$$\text{fib}(i + 2) = \text{fib}(i + 1) + \text{fib}(i)$$

Dengan mengandaikan pernyataan (5) benar, maka persamaan diatas menjadi:

$$M(i + 1,2) = M(i, 2) + M(i - 1,2) \quad (6)$$

Berikutnya, karena pada persamaan (2). Fungsi M didefinisikan berbeda untuk i genap dan i ganjil, maka pembuktian induksi juga dibedakan untuk i genap dan untuk i ganjil.

Untuk i ganjil, persamaan (6) menjadi:

$$\sum_{p=0}^{(i+1)/2} \binom{(i+1)-p}{p} = \sum_{p=0}^{(i-1)/2} \binom{i-p}{p} + \sum_{p=0}^{(i-1)/2} \binom{(i-1)-p}{p}$$

Ruas kanan dapat diubah bentuknya menjadi:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=1}^{(i-1)/2} \binom{i-p}{p} + \sum_{p=0}^{(i-1)/2} \binom{(i-1)-p}{p} \\ &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=0}^{(i-3)/2} \binom{i-p-1}{p+1} + \sum_{p=0}^{(i-3)/2} \binom{i-p-1}{p} + \binom{(i-1)/2}{(i-1)/2} \\ &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=0}^{(i-1)/2} \left[\binom{i-p-1}{p+1} + \binom{i-p-1}{p} \right] + \binom{(i-1)/2}{(i-1)/2} \end{aligned}$$

Kemudian dengan menggunakan identitas Pascal yaitu, persamaan (1). Persamaan diatas dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=0}^{(i-3)/2} \binom{i-p}{p+1} + \binom{(i-1)/2}{(i-1)/2} \\ &\rightarrow \binom{i+1}{0} + \sum_{p=1}^{(i-1)/2} \binom{(i+1)-p}{p} + \binom{(i-1)/2}{(i-1)/2} \\ &\rightarrow \sum_{p=0}^{(i+1)/2} \binom{(i+1)-p}{p} \end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka persamaan ini terbukti.

Untuk i genap, persamaan (6) menjadi:

$$\sum_{p=0}^{i/2} \binom{(i+1)-p}{p} = \sum_{p=0}^{i/2} \binom{i-p}{p} + \sum_{p=0}^{(i-2)/2} \binom{(i-1)-p}{p}$$

Ruas kanan dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \sum_{p=0}^{i/2} \binom{i-p}{p} + \sum_{p=0}^{(i-2)/2} \binom{(i-1)-p}{p} \\ &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=1}^{i/2} \binom{i-p}{p} + \sum_{p=0}^{(i-2)/2} \binom{(i-1)-p}{p} \\ &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=0}^{(i-2)/2} \binom{i-p-1}{p+1} + \sum_{p=0}^{(i-2)/2} \binom{i-p-1}{p} \\ &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=0}^{(i-2)/2} \left[\binom{i-p-1}{p+1} + \binom{i-p-1}{p} \right] \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas Pascal dari persamaan (1), didapat:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \binom{i}{0} + \sum_{p=0}^{(i-2)/2} \binom{i-p}{p+1} \\ &\rightarrow \binom{i+1}{0} + \sum_{p=1}^{i/2} \binom{(i+1)-p}{p} \\ &\rightarrow \sum_{p=0}^{i/2} \binom{(i+1)-p}{p} \end{aligned}$$

Karena ruas kanan sama dengan ruas kiri, maka persamaan ini terbukti. Karena untuk i genap dan untuk i ganjil, maka induksinya terbukti.

- Kesimpulan Induksi

Karena basis induksi benar, dan jika persamaan (5) benar, persamaan (6) juga benar dengan cara membuktikan persamaan (3), untuk $i > 2$, maka kesimpulannya, persamaan (5) benar untuk i bilangan bulat positif lebih dari sama dengan 1.

Jadi, kita telah membuktikan bahwa,

$$\text{fib}(i) = M(i - 1, 2) \tag{7}$$

3.2 Analisis Masalah untuk $r > 2$

3.2.1 Representasi Kombinatorial dari Permasalahan

Untuk $r > 2$, representasi kombinatorialnya lebih sulit dicari. Sebagai ilustrasi, berikut adalah tabel banyak susunan dari i buah benda dari 1 hingga 6, dengan $r = 3$.

Tabel 3 Banyaknya kemungkinan susunan i buah benda untuk $r = 3$

Nilai i	Format penulisan	Banyak susunan yang mungkin
0	()	1
1	(1)	1
2	(11)+(2)	2
3	(111)+(12)+(3)	4
4	(1111)+(112)+(22)+(13)	7
5	(11111)+(1112)+(122)+(113)+(23)	13
6	(111111)+(11112)+(1122)+(222)+(1113)+(123)+(33)	24

Seperti yang dapat dilihat di tabel, banyak susunan yang mungkin, membentuk barisan tri-bonacci. Identitas rekursifnya bisa dilihat dari penjumlahan berikut, $24=13+7+4$, $13=7+4+2$, $7=4+2+1$, $4=2+1+1$.

Untuk selanjutnya, karena $r > 2$, maka kotak tidak bisa direpresentasikan sebagai 2 jenis kotak yang berbeda lagi. Untuk kasus $r = 3$ sekarang, maka akan ada 3 jenis kotak, yaitu kotak yang memuat 1 benda, kotak yang memuat 2 benda, dan kotak yang memuat 3 benda. Jika $r=2$, kita dapat merepresentasikan perhitungannya menggunakan kombinasi, namun karena sekarang $r = 3$, maka kita akan menggunakan permutasi dengan 3 objek (kotak) yang berbeda.

Penulisan yang digunakan adalah:

$$\binom{i}{p, q, r} = \frac{i!}{p! q! r!}$$

Dimana, $p+q+r=i$, dan p menunjukkan banyak kotak yang menampung 3 benda, q adalah banyak kotak yang menampung 2 benda, r adalah banyak kotak yang menampung 1 benda.

Berikut adalah tabel perhitungan hingga $i = 6$.

Tabel 3 Bentuk kombinatorial dari fungsi $M(i, 3)$

Nilai i	Format penulisan	Banyak susunan yang mungkin
0	$\binom{0}{0,0,0}$	1

1	$\binom{1}{0,0,1}$	1
2	$\binom{2}{0,0,2} + \binom{1}{0,1,0}$	2
3	$\binom{3}{0,0,3} + \binom{2}{0,1,1} + \binom{1}{1,0,0}$	4
4	$\binom{4}{0,0,4} + \binom{3}{0,1,2} + \binom{2}{0,2,0} + \binom{2}{1,0,1}$	7
5	$\binom{5}{0,0,5} + \binom{4}{0,1,3} + \binom{3}{0,2,1} + \binom{3}{1,0,2} + \binom{2}{1,1,0}$	13
6	$\binom{6}{0,0,6} + \binom{5}{0,1,4} + \binom{4}{0,2,2} + \binom{3}{0,3,0} + \binom{4}{1,0,3} + \binom{3}{1,1,1} + \binom{2}{2,0,0}$	24

Dari tabel diatas dapat dirumuskan jumlah susunan sebagai berikut,

$$M(i, 3) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i}{3} \rfloor} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{i-3p}{2} \rfloor} \binom{i-2p-q}{p, q, i-3p-2q}$$

Kemudian, dari pola ini, kita dapat membuat rumus umum dari $M(i, r)$.

$$M(i, r) = \sum_{p_1=0}^{\lfloor \frac{i}{r} \rfloor} \dots \sum_{p_{r-2}=0}^{\lfloor \frac{i-4p_{r-3}-\dots-rp_1}{3} \rfloor} \sum_{p_{r-1}=0}^{\lfloor \frac{i-3p_{r-2}-\dots-rp_1}{2} \rfloor} \binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_r}$$

Dengan :

$$n = i - (r - 1)p_1 - \dots - 2p_{r-2} - p_{r-1}$$

$$p_r = i - rp_1 - \dots - 3p_{r-2} - 2p_{r-1}$$

3.2.2 Identitas Pascal

Dengan cara mengacu kepada langkah sebelumnya untuk membuktikan persamaan, $\text{fib}(i)=M(i-1,2)$. Kita dapat menerapkan identitas Pascal, untuk $r > 2$. Secara umum, identitas Pascal berupa (bukti tidak diberikan di makalah ini),

$$\binom{n+1}{p_1, p_2, \dots, p_r} = \binom{n}{p_1-1, p_2, \dots, p_r} + \binom{n}{p_1, p_2-1, \dots, p_r} + \binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_r-1}$$

3.2.3 Identitas Fibonacci

Untuk membuktikan persamaan,

$$fib_r(i) = M(i-1, r) \quad (8)$$

Untuk $r > 2$, pembuktian menggunakan identitas fibonacci dalam persamaan (3) menjadi sangat merepotkan. Karena kita harus membuktikan persamaan tersebut sebanyak r kasus. Yaitu untuk kasus $i \equiv 1 \pmod r$, $i \equiv 2 \pmod r$, ..., $i \equiv r \pmod r$. Cara ini sungguh tidak efektif. Alternatif lainnya adalah menggunakan identitas fibonacci yang lain.

Lima identitas barisan fibonacci untuk $r=2$, dapat dilihat di [2]. Untuk $r > 2$, kita dapat mengembangkannya dari 5 identitas tersebut.

3.2.4 Pembuktian Menggunakan Induksi

Pada makalah ini, pembuktian yang dibahas hanyalah pembuktian untuk $r=2$. Untuk $r > 2$, persamaan (8) tidak bisa saya buktikan. Namun, untuk membuktikan r tertentu, metode ini bisa digunakan walaupun kurang efektif. Misalnya untuk $r=3$, prosedur yang sama dapat digunakan namun pembuktian induksi harus dilakukan sebanyak r kali untuk kasus yang berbeda.

4. KESIMPULAN

Kesimpulan yang didapat adalah, persamaan (7) telah terbukti. Selain itu, terlihat hubungan antara banyaknya susunan i buah benda yang dimasukkan ke dalam kotak-kotak, dengan maksimal satu kotak berisi r buah benda. Barisan dari banyak susunan tersebut dihipotesiskan adalah barisan fibonacci dengan derajat r . Jika dituliskan,

$$fib_r(i) = M(i-1, r)$$

Selain itu, terdapat pula hubungan antara barisan fibonacci dengan segitiga Pascal. Jika segitiga Pascal dituliskan sebagai,



Maka, berturut-turut dari garis panah paling atas, jumlah dari angka yang terlewati oleh garis, adalah bilangan

fibonacci. Dari panah paling atas, $fib(1)=1$, $fib(2)=1$, $fib(3)=2$, $fib(4)=3$, $fib(5)=5$, dan seterusnya.

Hal lain yang menjadi kesimpulan penting dari pembuktian persamaan (7) adalah, persamaan tersebut membuktikan Graf Young-Fibonacci, yaitu graf yang menghubungkan barisan fibonacci dengan kombinatorika.

REFERENSI

- [1] Rosen, Kenneth H., "Discrete Mathematics and Its Application", McGraw-Hill, 2003.
- [2] en.wikipedia.org/fibonacci_number, 23:08, 20 Desember 2009
- [3] Munir, Rinaldi. "Struktur Diskrit", Prodi Teknik Informatika Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung, 2008.