

FUNGSI PEMBANGKIT

Ismail Sunni
13508064

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung
If18064@students.if.itb.ac.id
ismailsunni@yahoo.co.id

ABSTRAK

Fungsi Pembangkit adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan. Dengan men-*translasi* persoalan ke dalam dunia Fungsi Pembangkit, maka kita dapat menggunakan sifat-sifat khusus dari Fungsi Pembangkit sebagai jalan untuk memecahkan masalah. Fungsi Pembangkit ini bisa kita perlakukan sebagaimana fungsi-fungsi pada umumnya. Misal saja melakukan operasi diferensial. Hal ini membuat ada yang beranggapan bahwa Fungsi Pembangkit merupakan jembatan antara matematika diskrit dan kontinu. Fungsi Pembangkit memiliki banyak penggunaan, misalnya untuk menyelesaikan permasalahan rekurensi, *counting*, membuktikan identitas kombinatorika, maupun aplikasi-aplikasi lain yang beragam. Dalam penerapannya, banyak metode yang menggunakan Fungsi Pembangkit sebagai senjata utama penyelesaian masalah, misal “*The “Snake Oil” Method*”, “*The Sieve Method*”, dan lain-lain.

Kata kunci: Fungsi Pembangkit, Identitas Kombinatorika, Rekurensi, Teorema Binomial Diperluas, Teknik Menghitung.

1. PENDAHULUAN

Dalam menyelesaikan permasalahan, ada banyak sekali pilihan metode atau pendekatan yang dapat dipergunakan. Misal saja, tentang metode pembuktian. Kita bisa menggunakan metode *reductio ad absurdum* yang memanfaatkan fakta bahwa hanya salah satu dari P atau negasi P yang benar. Ada lagi metode kontraposisi. Metode ini memanfaatkan pernyataan yang ekuivalen antara $P \rightarrow Q$ dan $Q' \rightarrow P'$. Bisa juga kita menggunakan Prinsip Induksi Matematika, atau beberapa metode lainnya.

Seperti halnya dalam matematika diskrit. Ada banyak metode yang dapat kita pergunakan dalam menyelesaikan permasalahannya. Dalam makalah ini, akan dibahas tentang salah satu metode atau *tool* yang dapat

dipergunakan untuk memecahkan masalah. Metode ini dikenal dengan nama Fungsi Pembangkit atau *Generating Function*.

Fungsi Pembangkit ini layaknya sebuah jembatan yang menghubungkan Matematika diskrit dan kontinu, khususnya pada bagian teori variabel kompleks.[2]

Namun, pembahasan Fungsi Pembangkit dalam makalah ini hanyalah sekedar memberikan ide utama, karena banyak sekali hal-hal yang dapat dibahas menyangkut Fungsi Pembangkit ini.

2. FUNGSI PEMBANGKIT

Dalam makalah ini, Fungsi Pembangkit akan dijelaskan mulai dari definisi, penggunaan, hingga penerapannya dalam menyelesaikan masalah

2.1 Definisi dan Penggunaan

Fungsi Pembangkit didefinisikan sebagai berikut :

Diberikan barisan bilangan S (terhingga atau tak-hingga) $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \dots$ kita dapat mendefinisikan bentuk

$$G(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Atau

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Sebagai Fungsi Pembangkit dari S.[1]

Misal :

1. Fungsi pembangkit untuk barisan $\{a_n\}$ dengan $a_i = 7$ adalah $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 7x^i$
2. Fungsi pembangkit untuk barisan $\{a_n\}$ dengan $a_i = i + 7$ adalah $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i + 7)x^i$
3. Fungsi pembangkit untuk barisan $\{a_n\}$ dengan $a_i = 7^i$ adalah $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 7^i x^i$

Fungsi pembangkit digunakan untuk merepresentasikan barisan secara efisien dengan mengkodekan unsur barisan sebagai koefisien dalam deret pangkat suatu variabel x.

Fungsi pembangkit dapat digunakan untuk :

1. Memecahkan relasi rekurensi, misal pada barisan bilangan atau fungsi rekursif.

2. memecahkan berbagai masalah perhitungan (*counting*).
3. Membuktikan identitas kombinatorik.
4. Aplikasi pada banyak permasalahan tingkat lanjut lainnya, misalnya *striling number*, *counting polyominoes*, *the money changing problems*, *counting connected graph*, pembuktian konkrkuensi antar bilangan kombinatorial, dan masih banyak lagi.

Walaupun ada banyak penggunaan Fungsi Pembangkit, dalam makalah ini hanya akan dibahas penggunaan nomor 1 sampai 3 saja, hal ini dikarenakan, untuk membahas penggunaan nomor 4, diperlukan pengetahuan yang luas dan analisis yang kuat.

2.2 Teorema yang diperlukan

Sebelum melakukan kajian tentang Fungsi Pembangkit, diperlukan beberapa teorema atau fakta yang akan sangat berguna di dunia Fungsi Pembangkit.

2.2.1 Koefisien Binomial diperluas[4]

Misalkan u adalah bilangan real dan k bilangan bulat tak negative, maka *koefisien binomial diperluas* didefinisikan sebagai :

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1) \dots (u-k+1)}{k!}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Contoh :

1. $\binom{-4}{3} = \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!} = -20$
2. $\binom{1/2}{4} = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})}{4!} = \frac{-15}{2^{4 \cdot 4!}}$

2.2.2 Teorema Binomial Diperluas[4]

Misal x bilangan real dengan $|x| < 1$ dan u bilangan real, maka

$$(1+x)^u = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{u}{i} x^i$$

Jika u bilangan bulat positif, maka Teorema Binomial Diperluas, menjadi Teorema Binomial.

Jika diperhatikan, Teorema Binomial Diperluas ini dapat dipergunakan untuk mengubah suatu bentuk non-Fungsi Pembangkit, menjadi bentuk Fungsi Pembangkit.

Contoh :

1. $(1-x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i$
2. $(1-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1}{i} (-x)^i = 1 + x^1 + x^2 + \dots$

2.2.3 Metode Pecahan Parsial [3]

Menjumlahkan pecahan merupakan latihan aljabar yang sudah biasa dan baku, namun yang menjadi perhatian pada metode ini adalah bagaimana melakukan hal

sebaliknya. Metode secara umum yang digunakan untuk mendekomposisikan fungsi rasional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

menjadi pecahan-pecahan parsial adalah sebagai berikut

1. Jika $f(x)$ tak sejati, yaitu jika derajat $p(x)$ paling sedikit sama dengan derajat $q(x)$, bagilah $p(x)$ dengan $q(x)$, akan diperoleh :

$$f(x) = \text{polynom} + \frac{N(x)}{D(x)}$$

2. Faktorkanlah $D(x)$ atas hasil kali faktor-faktor linear dan kuadrat yang tak teruraikan dengan koefisien riil. Hal ini pasti dapat dilakukan berdasar sebuah teorema dalam aljabar.

3. Untuk setiap faktor yang berbentuk $(ax+b)^k$, harapkanlah dekomposisinya memiliki banyak suku-suku

$$\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{(ax+b)^i}$$

4. Untuk tiap faktor yang berbentuk $(ax^2+bx+c)^m$ harapkanlah dekomposisinya mempunyai suku-suku

$$\sum_{j=1}^m \frac{B_j x + C_j}{(ax^2+bx+c)^j}$$

5. Tetapkanlah $N(x)/D(x)$ sama dengan jumlah semua suku yang diperoleh dalam langkah-langkah 3 dan 4. Banyaknya konstanta yang harus ditentukan harus sama dengan derajat penyebut, yaitu $D(x)$

6. Kalikan kedua ruas persamaan yang diperoleh dalam langkah 5 dengan $D(x)$ dan selesaikan untuk konstanta-konstanta yang tidak diketahui. In dapat diperoleh dengan salah satu dari dua metode, (1). Samakan koefisien dari suku-suku yang derajatnya sama; atau (2) berikan nilai-nilai yang sesuai terhadap peubah x .

Contoh :

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{1}{x+3} + \frac{-x+3}{x^2+2} + \frac{-5x}{(x^2+2)^2}$$

2.3 Fungsi Pembangkit dalam Relasi

Rekurensi[1]

Seperti yang telah didefinisikan di atas, Fungsi Pembangkit dapat dipergunakan untuk mengetahui bentuk umum (*explicit form*) dari suatu barisan bilangan. Berikut diberikan beberapa contoh penggunaan mulai dari yang termudah hingga yang lumayan rumit.

Contoh 2.3.1 Tentukan bentuk umum dari barisan Fibonacci.

Solusi :

Barisan Fibonacci mempunyai dibentuk dari fungsi rekursif berikut :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$$

Konstruksi Fungsi Pembangkit untuk barisan Fibonacci sebagai berikut :

$$G(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad (1.a)$$

Maka,

$$xG(x) = a_0x^1 + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \dots \quad (1.b)$$

dan,

$$x^2G(x) = a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \dots \quad (1.c)$$

Dari persamaan (1.a) dikurangi persamaan (1.b) dan (1.c), diperoleh :

$$\begin{aligned} G(x) - xG(x) - x^2G(x) &= a_0 + (a_1 - a_0)x^1 + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + (a_3 - a_2 - a_1)x^3 + (a_4 - a_3 - a_2)x^4 + \dots \\ \Leftrightarrow (1 - x - x^2)G(x) &= 0 + 1x + 0x^2 + 0x^3 + \dots \\ \Leftrightarrow G(x) &= \frac{x}{(1-x-x^2)} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode pecahan parsial, $G(x)$ dapat dituliskan sebagai :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} - \frac{1}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x} \right]$$

Dengan memisalkan

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ q &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Diperoleh,

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - px} - \frac{1}{1 - qx} \right]$$

Karena

$$\frac{1}{1 - px} = 1 + px + p^2x^2 + p^3x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1 - qx} = 1 + qx + q^2x^2 + q^3x^3 + \dots$$

Diperoleh,

$$\sqrt{5}G(x) = 1 + px + p^2x^2 + p^3x^3 + \dots - (1 + qx + q^2x^2 + q^3x^3 + \dots)$$

\Leftrightarrow

$$\sqrt{5}G(x) = (1 - 1) + (p - q)x + (p^2 - q^2)x^2 + (p^3 - q^3)x^3 + \dots$$

Jelas, $a_n = \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}}$, dengan p, q sesuai pemisalan di atas.

Contoh 2.3.2 Tentukan bentuk umum dari barisan yang didefinisikan sebagai berikut :

$$a_{n+1} = 3a_n + n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 0$$

Solusi :

Konstruksi Fungsi Pembangkit untuk barisan a_n

$$G(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad (2.a)$$

Maka

$$3xG(x) = 3a_0x^1 + 3a_1x^2 + 3a_2x^3 + 3a_3x^4 + \dots \quad (2.b)$$

Persamaan (2.a) dikurangi (2.b), diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - 3x)G(x) &= a_0 + (a_1 - 3a_0)x^1 \\ &\quad + (a_2 - 3a_1)x^2 + (a_3 - 3a_2)x^3 + (a_4 - 3a_3)x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$(1 - 3x)G(x) = a_0 + 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + \dots \quad (2.c)$$

Kita tahu bahwa dan misalkan,

$$h(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{dh(x)}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\Leftrightarrow x \frac{dh(x)}{dx} = \frac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \dots \quad (2.d)$$

Substitusi (2.d) ke (2.c) dan $a_0 = 0$ diperoleh

$$G(x) = \frac{1}{(1-3x)} \left(0 + \frac{x}{(1-x)^2} \right)$$

$$G(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-x)^2}$$

Dengan menggunakan metode pecahan parsial, diperoleh

$$G(x) = \frac{\frac{3}{4}}{1-3x} + \frac{\frac{-1}{4}}{1-x} + \frac{\frac{-1}{2}}{(1-x)^2}$$

Karena

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{i=0}^{\infty} (3x)^i$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i$$

Maka, diperoleh

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \frac{3}{4} \sum_{i=0}^{\infty} (3x)^i + \left(\frac{-1}{4}\right) \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

$$+ \left(\frac{-1}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i$$

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3}{4} 3^i x^i + \left(\frac{-1}{4}\right) x^i + \left(\frac{-1}{2}\right) (i+1)x^i$$

Sehingga,

$$a_n = \frac{3}{4} 3^n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} (n+1) = \frac{1}{4} (3 \cdot 3^n - 3 - 2n)$$

Dari contoh-contoh di atas, kita dapat menentukan metode baku (*standard*) dalam menyelesaikan permasalahan barisan rekursif.

1. Bangun sebuah Fungsi Pembangkit untuk barisan yang akan dicari bentuk umumnya.
2. Sederhanakan Fungsi Pembangkit dengan melakukan operasi dalam Fungsi Pembangkit itu sendiri. Bisa dilakukan dengan substitusi, eliminasi, atau bahkan diferensiasi.
3. Setelah sederhana, bentuk menjadi deret tak hingga yang sudah umum, bisa dengan menggunakan metode pecahan parsial atau metode lainnya.
4. Langkah terakhir, melakukan pengecekan.

2.4 Fungsi Pembangkit dalam Teknik Menghitung

Untuk menjelaskan penggunaan Fungsi Pembangkit dalam melakukan penghitungan (*counting*) akan lebih mudah jika diberikan melalui contoh soal. Perhatikan contoh soal di bawah ini :

Contoh 2.4.1 Tentukan banyak cara membagi 15 kue identik kepada 4 orang anak, dimana tiap anak sedikitnya menerima tidak kurang dari 3 kue tetapi tidak boleh lebih dari 5 kue.

Solusi :

Karena tiap anak hanya diperbolehkan menerima 3 sampai dengan 5, maka Fungsi Pembangkit untuk tiap anak adalah $G(x) = x^3 + x^4 + x^5$. Karena ada 4 orang anak, maka Fungsi Pembangkit menjadi $G^4(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^4$. Karena total ada 15 kue, maka yang perlu kita cari adalah koefisien dari x^{15} dari $G(x)$. Jika kita hitung, kita akan memperoleh 16 sebagai jawaban untuk permasalahan di atas.

Contoh 2.4.2 Berapa banyak cara memilih r obyek dari n jenis benda berbeda jika kita harus memilih sedikitnya 1 obyek dari setiap jenisnya.

Solusi :

Misalkan a_r : banyak cara memilih r objek dari n jenis benda bila setiap jenis terpilih sedikitnya satu objek. Karena tiap jenis minimal 1 buah, maka untuk tiap jenis barang mempunyai faktor $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots)$ pada Fungsi Pembangkit. Oleh karena ada n jenis benda, maka Fungsi Pembangkit dari barisan $\{a_r\}$ adalah

$$G(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^n$$

$$G(x) = x^n(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n = x^n/(1 - x)^n$$

Dengan menggunakan Teroema Binominal Diperluas, diperoleh :

$$G(x) = x^n/(1 - x)^n = x^n(1 - x)^{-n}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r \\ &= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} (-1)^r x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^{r+n} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^{r+n} \\ &= \sum_{p=n}^{\infty} \binom{p-1}{p-n} x^p = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} x^r \end{aligned}$$

Jelas, bahwa banyak cara untuk memilih r benda dari n buah jenis benda dengan tiap jenis minimal 2 buah benda terpilih adalah $\binom{r-1}{r-n}$

2.5 Fungsi Pembangkit Sebagai Bukti Identitas Kombinatorika

Dalam menggunakan Fungsi Pembangkit dalam membuktikan identitas kombinatorika, ada banyak sekali metode yang dapat digunakan. Beberapa metode itu antara lain : [2]

1. *The Sieve Method* (Metode Ayakan/Saringan)
2. *The "Snake Oil" Method* (Metode Minyak Ular)
3. *WZ Method*
4. Dan lain-lain

Dalam makalah ini, akan sedikit dibahas tentang metode ke dua, yaitu *The "Snake Oil" Method*. [2] Metode ini biasa dipergunakan untuk mencari hasil dari sebuah identitas yang mempunyai notasi sigma di dalamnya. Ada beberapa langkah yang biasa digunakan dalam menggunakan metode ini :

1. Cari variabel bebas, katakan saja n , di mana hasil penjumlahan bergantung padanya. Beri nama pada penjumlahan yang kita kerjakan, sebut saja $f(n)$
2. Misalkan $F(n)$ adalah Fungsi Pembangkit di mana koefisien dari $[x^n]$ adalah $f(n)$.
3. Kalikan dengan x^n , dan jumlahkan pada n . sekarang Fungsi Pembangkit kita menggambarkan penjumlahan ganda dari n , dan apapun variabel yang mula-mula digunakan, itu hanyalah sekedar *dummy*.
4. Tukar urutan dari 2 penjumlahan yang sekarang kita amati, dan tunjukan penjumlahan yang bagian dalam dalam bentuk yang sederhana. Ada baiknya, kita memiliki daftar-daftar bentuk-bentuk penjumlahan yang sering digunakan.
5. Coba untuk menentukan koefisien dari Fungsi Pembangkit, karena koefisien ini merepresentasikan apa yang kita cari.

Mungkin langkah-langkah di atas sangat tidak jelas. Namun, jika kita melihat contoh pengerjaan soal, *The "Snake Oil" Method* tidak serumit metode di atas.

Contoh 2.5.1 Carilah bentuk umum dari

$$\sum_{k \geq 0} \binom{k}{n-k}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Solusi :

Variabel bebas dalam kasus ini adalah n . Jadi hasil yang kita cari adalah $f(n)$. Tulis sebagaimana berikut :

$$f(n) = \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n-k}$$

Sekarang kita kalikan dengan x^n pada kedua ruas. Kita sekarang sampai pada langkah ke tiga dari langkah-langkah di atas. Dan sekarang persamaan menjadi :

$$F(n) = \sum_n x^n \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n-k}$$

Pada langkah ke empat, pertukarkan penjumlahan untuk memperoleh :

$$F(n) = \sum_{k \geq 0} \sum_n x^n \binom{k}{n-k}$$

Selanjutnya, kita menyelesaikan penjumlahan yang sebelah dalam. Tak-tik yang dipergunakan adalah, menjadikan pangkat dari x agar sama dengan index yang muncul pada koefisien binomial. Pada kasus ini, pangkat dari x adalah n , dan n muncul di pada bagian bawah koefisien binomial dalam bentuk $n - k$. Untuk membuatnya sama, maka perlu dikalikan dengan x^{-k} dan sebagai kompensasinya, kita harus meletakkan x^k di penjumlahan bagian luar. Sehingga hasilnya adalah :

$$F(n) = \sum_{k \geq 0} x^k \sum_n x^{n-k} \binom{k}{n-k}$$

Sekarang, pangkat dari x sama dengan yang muncul pada bagian bawah koefisien binomial. Oleh karenanya, ambil $r = n - k$ sebagai variabel "palsu" atau *dummy* pada penjumlahan bagian dalam. Kita akan memperoleh

$$F(n) = \sum_{k \geq 0} x^k \sum_r x^r \binom{k}{r}$$

Lihat pada penjumlahan bagian dalam. Itu merupakan bentuk $(1 + x)^k$. Kita peroleh :

$$F(n) = \sum_{k \geq 0} x^k (1 + x)^k = \sum_{k \geq 0} (x + x^2)^k = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Pada hasil terakhir, mengingatkan kita akan barisan Fibonacci. Sehingga, $f(n) = F_{n+1}$, dimana F_n adalah suku ke n dari barisan Fibonacci.

Kesimpulannya adalah

$$\sum_{k \geq 0} \binom{k}{n-k} = F_{n+1}$$

Memang, contoh soal yang diberikan agak terlalu "mudah". Hal ini dikarenakan maksud dari makalah ini adalah untuk memberikan gambaran tentang ide dasar dari Fungsi Pembangkit.

3. KESIMPULAN

Dari semua hal yang telah dijelaskna sebelumnya, dapat kita tarik beberapa kesimpulan tentang Fungsi Pembangkit dan penggunaannya :

1. Fungsi Pembangkit merupakan salah satu metode yang handal dalam matematika karena mampu menjelaskan permasalahan rumit menjadi lebih sederhana terutama dalam hal menyelesaikan permasalahan dalam bidang kombinatorik.
2. Fungsi Pembangkit dapat dianggap sebuah jembatan penghubung antara matematika diskrit dan matematika kontinu. Hal ini terlihat dari penggunaan kalkulus dalam memecahkan beberapa permasalahan.
3. Teorema Binomial Diperluas sangat membantu dalam penggunaan Fungsi Pembangkit ini.
4. Fungsi Pembangkit memiliki banyak aplikasi dan masih bisa ditelaah lebih jauh dan dipergunakan secara lebih kreatif sesuai kebutuhan.

REFERENSI

- [1] Cohen, Daniel I. A. "*Basic Techniques Of Combinatorial Theory*", John Wiley & Sons, 1978
- [2] Wilf, Herbert S., "*Generatingfunctionology*", Department of Mathematics University of Pennsylvania, 1989
- [3] Varberg, Dale, "*Calculus 8th Edition*", Prentice Hall, Inc, 2003
- [4] <http://www.math.itb.ac.id/~diskrit/> 4.17AM 12/11/2009