Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-2 IF2091 Struktur Diskrit (3 SKS) – Induksi Matenatika dan Teori Bilangan
Dosen: Rinaldi Munir & Harlili
Rabu, 14 Oktober 2009
Waktu: 55 menit

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk $n \geq 1$, $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ **(15)**

Solusi:

Persamaan di atas dapat dituliskan menjadi
1(2)+ 2(3)+…+n(n+1)= $\frac{1}{3}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)$.

*(i)*Basis induksi. Untuk n=1, 1(2)=2 dan $\frac{1}{3}1(1+1)(1+2)$=2.

Maka 1(2)+ 2(3)+…+n(n+1)= $\frac{1}{3}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)$ terbukti benar untuk n=1.

*(ii)*Langkah induksi. Asumsikan 1(2)+ 2(3)+…+k(k+1)= $\frac{1}{3}k(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2)$. Akan kita buktikan bahwa 1(2)+ 2(3)+…+k(k+1)+(k+1)(k+2)= $\frac{1}{3}(k+1)(\mathrm{k}+2)(\mathrm{k}+3)$.

2. Buktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa untuk setiap *n* bilangan asli berlaku: $21 \mid 2^{6n} - 1$ **(15)**

Solusi:

Basis : Untuk n = 1, $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$. 21 | 63. (benar)
Induksi : Anggap benar untuk n = 1, 2, .., *k*. Akan dibuktikan benar untuk *n* = *k* + 1.
$2^{6(k+1)} - 1 = 2^6.2^{6k} - 1 = 64.2^{6k} - 1 = (1+63)\ 2^{6k} - 1 = 2^{6k} + 63.\ 2^{6k} - 1$.
21 | $2^{6k} - 1$ dan 21 | 63. 2^{6k} yang berarti 21 | $2^{6k} - 1 + 63.\ 2^{4k} = 2^{6(k+1)} - 1$. (terbukti)

3. Tunjukkan bahwa jika *a*, *b*, dan *m* adalah bilangan bulat sedmikian sehingga $m \geq 2$ dan $a \equiv b \pmod m$, maka PBB(*a*, *m*) = PBB(*b*, *m*) **(15)**

Solusi:

4. Sebuah buku teks kuliah memiliki ISBN 135-08-2*XY*8-8. Diketahui $3Y \equiv 5 \pmod 7$. Tentukan nilai *X* dan *Y* ! **(20)**

Solusi:

3Y ≡ 5 (mod 7)
→ *Y* = (5 + 7*k*)/3, untuk *k* sembarang bilangan bulat
Untuk nilai *k* =
- 0 → *Y* = 1,67 (*Y* bukan bilangan bulat)
- 1 → *Y* = 4 (Y bilangan bulat)
- 2 → *Y* = 6,33 (*Y* bukan bilangan bulat)
- 3 → *Y* = 8,67 (*Y* bukan bilangan bulat)
- 4 → Y = 11 (Y > 10)

Dengan demikian, didapatkan nilai *Y* = 4

Kemudian pada kode ISBN berlaku:

$\left(\sum_{i=1}^{9} iXi \right)$ mod 11 = Karakter uji = 8

((1.1) + (2.3) + (3.5) + (4.0) + (5.8) + (6.*2*) + (7.X) + (8.*Y*) + (9.8)) mod 11 = 8

Substitusikan nilai Y dengan 4, diperoleh

(178 + 7*X*) mod 11 = 8

Karena *0 < X < 10*, maka nilai *X* yang memenuhi adalah *X* = 4.

(178 + 7.4) mod 11 = 8

206 mod 11 = 8

Solusinya adalah *X = 4* dan *Y = 4*

5. Tentukan semua solusi *x* bilangan bulat dari sistem kekongruenan: $2x \equiv 1 \pmod 7$ dan $4x \equiv 5 \pmod 9$ **(20)**

Solusi:

$2x \equiv 1 \pmod 7$

Kalikan kedua ruas dengan balikan 2 (mod 7) yaitu 4:

$x \equiv 4 \pmod 7$

Maka misalkan $x = 7k + 4$ untuk *k* bilangan bulat

(2) $4x \equiv 5 \pmod 9$

$4(7k + 4) \equiv 5 \pmod 9$

$28k + 16 \equiv 5 \pmod 9$

$27k + k + 16 \equiv 5 \pmod 9$

$K + 16 \equiv 5 \pmod 9$

$K - 2 + 18 \equiv 5 \pmod 9$

$K - 2 \equiv 5 \pmod 9$

$K \equiv 7 \pmod 9$

Maka misalkan $k = 9m + 7$ untuk *m* bilangan bulat sehingga $x = 7(9m + 7) + 4 = 63m + 53$

6. Tentukan dua bilangan asli terkecil yang jika dibagi dengan 7 bersisa 3, dan jika dibagi dengan 5 bersisa 2. (15)

Solusi: Misalkan *x* adalah bilangan yang dicari. Kita mempunyai bahwa $x \equiv 3 \bmod 7$, atau $x = 7k + 3$, *k* bilangan bulat. Jadi, $7k + 3 \equiv 2 \bmod 5 \Leftrightarrow 7k \equiv -1 \equiv 4 \bmod 5$. Karena 3 adalah balikan (invers) dari 7 modulo 5, maka $k \equiv 3.7k \equiv 3.4 \equiv 12 \equiv 2 \bmod 5$. Dengan demikian, $k = 5m + 2$, *m* suatu bilangan bulat. Substitusikan ke persamaan awal, diperoleh $x = 7(5m + 2) + 3 = 35m + 17$. Jadi, $x \equiv 17 \bmod 35$ adalah solusi persoalan yang diminta. Dengan demikian, dua bilangan asli yang memenuhi persoalan tersebut adalah 17 dan 17+35=52.