

Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Penyimpanan Senyawa Kimia Berbahaya

Ario Yudo Husodo – 13507017

Jurusan Teknik Informatika STEI-ITB, Bandung, email: if17017@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Teori Graf merupakan suatu pokok bahasan yang sudah tua usianya namun mempunyai banyak terapan bagi seluruh masyarakat sampai saat ini. Salah satu teori graf yang memiliki kontribusi besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan adalah teori pewarnaan graf. Pada masa awal penemuan teori graf, pewarnaan graf telah menjadi masalah yang banyak menarik perhatian matematikawan dunia, pasalnya dalam sejarah perkembangan teori graf, teori mengenai pewarnaan graf selalu berubah sepanjang waktu. Teori pewarnaan graf merupakan suatu cabang teori graf yang mempelajari cara mewarnai suatu graf sedemikian sehingga tidak terdapat dua simpul saling bertetangga pada graf tersebut yang berwarna sama. Salah satu teori pewarnaan graf yang sangat menggemparkan matematikawan dunia adalah Teorema Empat Warna, yaitu teori yang menyatakan bahwa setiap graf planar sembarang selalu dapat diwarnai oleh empat warna berbeda.

Meskipun Teorema Empat Warna pada awal kemunculannya ditujukan khusus untuk membahas mengenai banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai suatu graf planar sembarang, dalam perkembangannya teorema ini sangat membantu dalam pewarnaan suatu graf bukan planar. Hal ini dikarenakan suatu graf bukan planar dapat dibentuk menjadi graf planar dengan menghilangkan beberapa sisi dalam graf tersebut. Selanjutnya dengan memperhatikan sisi – sisi yang dihilangkan tersebut, maka jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai graf bukan planar tersebut dapat diketahui. Di dalam teori pewarnaan graf, jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai suatu graf dinamakan bilangan kromatik graf.

Makalah ini secara garis besar membahas mengenai terapan teori pewarnaan graf di dalam kemajuan ilmu pengetahuan, terutama perihal efektifitas suatu sumber daya, seperti waktu dan ruang, dalam menemukan solusi suatu permasalahan. Secara mendalam, kajian makalah

ini difokuskan pada kebutuhan ruang penyimpanan beberapa senyawa kimia berbahaya yang beberapa di antara senyawa kimia berbahaya tersebut ada yang boleh ditempatkan di dalam suatu ruangan yang sama dan ada pula yang tidak. Makalah ini mengulas metode praktis untuk menentukan jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan beberapa senyawa kimia berbahaya tersebut.

Kata Kunci : Pewarnaan graf, Teorema Empat Warna, bilangan kromatik graf.

1. Pendahuluan

1.1 Definisi Graf

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang [4]. Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V,E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertex* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul pada graf tersebut.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Atau

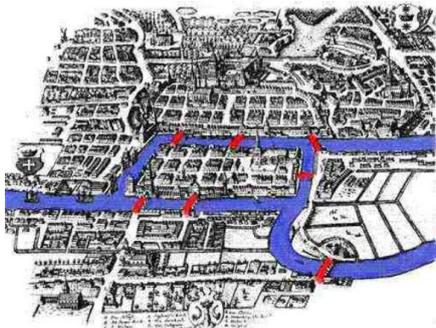
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$$

Dimana $e = (v_i, v_j)$, yang artinya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j . Secara sederhana, suatu graf G didefinisikan sebagai $G = (V,E)$, dengan V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu.

1.2 Sejarah Graf

Teori graf pertama kali berkembang di Jerman ketika masyarakat Jerman mencoba

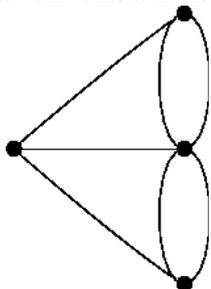
memecahkan teka-teki jembatan Königsberg. Königsberg merupakan masalah yang pertama kali menggunakan graf. Königsberg merupakan sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman sekarang). Di kota tersebut terdapat sebuah sungai bernama Sungai Pregel, yaitu sebuah sungai yang membagi kota tersebut menjadi empat buah daratan. Berikut merupakan gambar yang merepresentasikan keadaan di atas.



Gambar 1 : Jembatan Königsberg [10]

Pada abad kedelapan belas, dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan keempat daratan tersebut. Perhatikan gambar 1, ketujuh jembatan tersebut ditandai dengan warna merah. Teka-teki Jembatan Königsberg adalah apakah mungkin untuk berjalan menyeberangi ketujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Memang jawaban dari permasalahan ini adalah tidak mungkin. Namun tidak ada satu orang pun yang dapat menunjukkan bukti jawaban permasalahan tersebut. Mereka hanya bisa menduga jawaban tersebut dengan metode coba-coba.

Permasalahan Jembatan Königsberg pertama kali dipecahkan oleh Leonhard Euler, seorang ahli matematika dari Swiss yang menemukan Teori Graf. Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam sebuah graf dengan keempat daratan sebagai empat simpul (node) dan ketujuh jembatan sebagai empat sisi (edge). Berikut merupakan gambar yang merepresentasikan graf yang dibuat Euler untuk memecahkan teka-teki Jembatan Königsberg.



Gambar 2 : Sirkuit yang merepresentasikan teka-teki Jembatan Königsberg [4]

Sejak masalah jembatan Königsberg direpresentasikan dengan graf oleh Euler, teori graf berkembang dengan pesat sebagai cabang dari ilmu matematika. Untuk menghormatinya, model graf tersebut diberi nama sirkuit Euler (*Euler cycle*).

2. Teori Dasar Graf

2.1 Terminologi Dasar [4]

Berikut akan diberikan beberapa terminologi dasar penting yang akan banyak digunakan pada makalah ini, yaitu :

A. Bertetangga (Adjacent)

Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.

B. Bersisian (Incident)

Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_i dan v_j jika $e = (v_i, v_j)$ atau e menghubungkan simpul v_i dan v_j .

C. Derajat (Degree)

Suatu simpul pada graf tak – berarah dikatakan berderajat n jika jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut berjumlah n . Hal ini dilambangkan dengan $d(v)$. Derajat maksimum simpul yang terdapat pada suatu graf dilambangkan dengan $B(G)$.

D. Lintasan (Path)

Lintasan adalah barisan berselang – seling simpul–simpul dan sisi–sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ yang menghubungkan simpul awal v_0 dan simpul tujuan v_n . Untuk graf sederhana, biasanya lintasan ditulis sebagai barisan simpul–simpulnya saja, yaitu $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$

E. Upagraf (Subgraph)

Suatu graf $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan upagraf dari graf $G = (V, E)$, bila V_1 merupakan himpunan bagian dari V dan E_1 merupakan himpunan bagian dari E .

F. Planar

Suatu graf G merupakan graf planar bila graf tersebut dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi – sisi yang tidak saling memotong (bersilangan).

G. Upagraf merentang (Spanning Subgraph)

Upagraf $G' = (V', E')$ dari graf $G = (V, E)$ dikatakan upagraf merentang jika $V' = V$ dan G' adalah himpunan bagian dari G

2.2 Jenis Graf [4]

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokkannya. Pengelompokkan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi 2 jenis:

1. Graf sederhana

Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda

2. Graf tak-sederhana

Graf tak-sederhana merupakan graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada 2 macam graf tak-sederhana yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang.

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga

Graf berhingga merupakan graf yang jumlah simpulnya, n , berhingga.

2. Graf tak-berhingga

Graf tak-berhingga merupakan graf yang jumlah simpulnya, n , tidak berhingga banyaknya.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. Graf tak-berarah

Graf tak-berarah merupakan graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi (v_j, v_k) dan (v_k, v_j) adalah sisi yang sama.

2. Graf berarah

Graf berarah merupakan graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Jadi (v_j, v_k) dan (v_k, v_j) merupakan dua sisi yang berbeda.

3. Teori Pewarnaan Graf

Teori pewarnaan graf merupakan suatu cabang teori graf yang mempelajari cara mewarnai suatu graf sedemikian rupa sehingga tidak terdapat dua simpul saling bertetangga pada graf tersebut yang berwarna sama. Terdapat tiga macam metode pewarnaan graf, yaitu metode pewarnaan simpul,

pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Berhubung metode pewarnaan sisi dan wilayah memiliki konsep yang mirip dengan metode pewarnaan simpul, maka dalam makalah ini, penulis hanya mengaji metode pewarnaan simpul beserta aplikasinya di dalam efisiensi penyelesaian suatu permasalahan.

Di dalam teori pewarnaan graf, khususnya untuk metode pewarnaan simpul, jumlah minimum warna yang dibutuhkan sedemikian sehingga dapat melakukan pewarnaan graf, dinamakan bilangan kromatik graf, dilambangkan dengan $\chi(G)$.

Terdapat beberapa sifat mengenai bilangan kromatik ini, antara lain :

1. $\chi(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf kosong.
2. $\chi(G) \geq 3$ jika dan hanya jika G memiliki subgraph yang merupakan K_3 atau C_3
3. $\chi(G) \leq B(G) + 1$.
4. $\chi(G) \leq B(G)$, kecuali jika G adalah graf lengkap atau graf lingkaran dengan jumlah simpul ganjil.
5. Untuk setiap graf planar, berlaku Teorema Empat Warna, yaitu $\chi(G) \leq 4$.
6. Bila G' adalah upagraph dari G , maka $\chi(G') \leq \chi(G)$.
7. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$.
8. Graf Lingkaran C_n memiliki $\chi(G) = 2$ bila n genap dan $\chi(G) = 3$ bila n ganjil.
9. Graf Teratur berderajat n selalu memiliki $\chi(G) \leq n + 1$ sesuai sifat no 3 di atas.
10. Graf Bipartit selalu bisa diwarnai dengan 2 warna.
11. Graf yang berupa pohon selalu dapat diwarnai dengan dua warna.

Untuk melakukan pewarnaan graf, terdapat beberapa metode dasar yang perlu diperhatikan, antara lain :

1. Menggambar simpul – simpul graf

Simpul – simpul graf yang digambarkan haruslah mewakili pekerjaan/senyawa kimia yang akan direpresentasikan.

2. Menggambar sisi – sisi pada graf

Sisi – sisi pada setiap pasang simpul yang menggunakan sumber daya yang sama perlu digambarkan. Sisi – sisi ini mengindikasikan kedua pekerjaan tersebut tidak bisa dilakukan pada waktu yang sama, atau apabila dikaitkan dengan kajian makalah ini, simpul yang dimaksud adalah dua buah senyawa kimia yang tidak boleh ditempatkan dalam ruangan yang sama.

3. Memprediksi bilangan kromatik graf

Langkah ini digunakan untuk memperkirakan bilangan kromatik graf. Langkah ini digunakan agar di dalam proses pewarnaan graf, apabila ditemukan jumlah warna yang berada di atas prediksi metode ini, berarti terindikasi bahwa telah dilakukan suatu kesalahan di dalam proses pewarnaan-graf pada langkah 4.

Apabila graf yang terbentuk merupakan graf planar, dapat diprediksi bahwa graf tersebut dapat diwarnai oleh n buah warna, dimana $n \leq 4$. Apabila graf yang terbentuk bukan merupakan graf planar, prediksi jumlah bilangan kromatik adalah dengan “membuang” beberapa buah sisi graf sehingga terbentuk sebuah graf planar. Graf planar yang terbentuk tentunya memiliki bilangan kromatik $\chi(G) \leq 4$. Selanjutnya, dengan memperhatikan sisi-sisi yang telah “dibuang”, apakah sisi – sisi yang dibuang tersebut ada yang mengarah/berasal dari suatu simpul yang sama, maka prediksi jumlah bilangan kromatik dapat dilakukan dengan tepat.

4. Mewarnai graf

Langkah terakhir yang harus dilakukan adalah mewarnai simpul – simpul pada graf tersebut dengan warna yang minimum sehingga tidak ada simpul – simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama.

Berikut ini diberikan sebuah contoh sederhana penyelesaian kasus mengenai penentuan jumlah ruangan minimum untuk menempatkan beberapa senyawa kimia berbahaya.

Persoalan

- Ada 7 jenis zat kimia yang perlu disimpan di dalam gudang. Beberapa pasang dari zat itu tidak dapat disimpan di dalam ruangan yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksplosif (mudah meledak).

Zat kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
A	B, D
B	A, D, E, F, G
C	E, G
D	A, F, B
E	B, C, G
F	B, D
G	C, E, B

Tabel 1 : Hubungan sifat zat kimia untuk persoalan 1

Untuk zat yang semacam itu perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara keluar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang yang dibutuhkan, berarti lebih banyak ongkos yang harus dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia dengan aman.

Gambarkan graf yang menyatakan persoalan di atas, lalu jelaskan arti simpul dan sisi yang menghubungkan dua buah simpul. Berapa jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyelesaikan permasalahan di atas?

Jawab:

Simpul melambangkan zat kimia, sisi menyatakan bahwa dua zat kimia yang dihubungkannya tidak boleh disimpan bersama-sama.

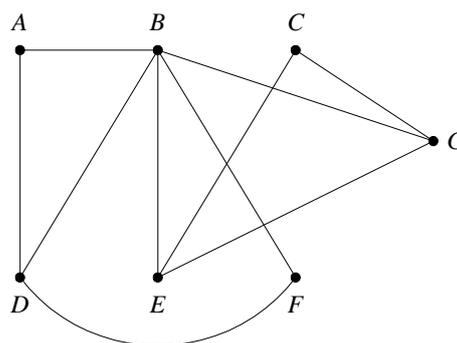
Berdasarkan metode dasar pewarnaan graf yang telah diuraikan di atas, penyelesaian masalah ini dapat diselesaikan sebagai berikut.

Langkah 1. Menggambar simpul-simpul graf.

Pada persoalan ini, terdapat 7 macam senyawa kimia, yaitu A,B,C,D,E,F,G. Ketujuh macam senyawa kimia tersebut diperlakukan sebagai tujuh buah simpul.

Langkah 2. Menggambar sisi-sisi pada graf

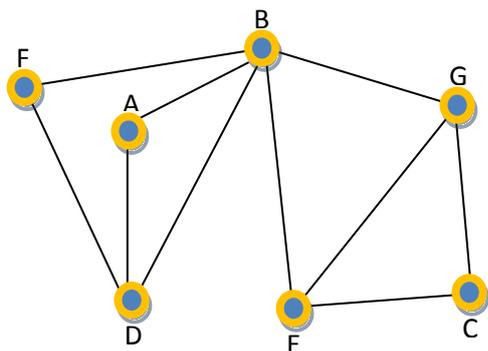
Berdasarkan informasi soal, diperoleh gambar graf sebagai berikut.



Gambar 3 : Graf representasi persoalan 1

Langkah 3. Memprediksi bilangan kromatik graf

Gambar yang diperoleh pada langkah 2 dapat dibuat ulang seperti gambar berikut.



Gambar 4 : Graf representasi persoalan 1 (versi modifikasi)

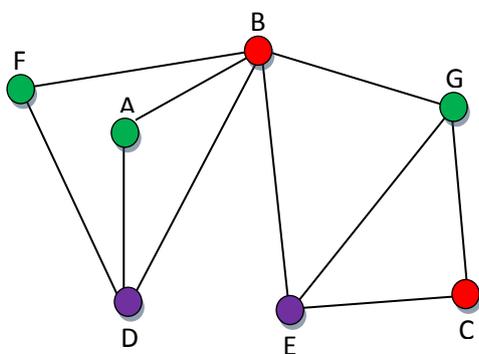
Dari gambar 4, terlihat bahwa untuk persoalan di atas, graf dapat direpresentasikan dalam bentuk sebuah graf planar. Berdasarkan sifat-sifat bilangan kromatik, diperoleh perkiraan maksimum mengenai bilangan kromatik graf pada gambar 4 adalah empat buah warna (Teorema Empat Warna).

Langkah 4. Mewarnai graf

Berdasarkan perkiraan awal yang diperoleh dari langkah 3, dapat diketahui bahwa bilangan kromatik graf untuk persoalan ini haruslah $\chi(G) \leq 4$.

Untuk mewarnai graf, terlebih dahulu idealnya pewarnaan dimulai dari simpul dengan derajat terbanyak kemudian melanjutkannya ke simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah diwarnai tersebut. Langkah ini diulang hingga semua simpul telah diwarnai. Dengan memperhatikan gambar 4, maka metode pewarnaan yang sepatutnya dilakukan adalah berturut-turut mewarnai simpul B, G, E, C, A, D, F (urutan ini tidak tunggal, masih terdapat alternatif lain).

Berikut merupakan salah satu contoh pewarnaan graf untuk persoalan 1.



Gambar 5 : Graf representasi persoalan 1 (setelah dilakukan pewarnaan graf)

Perhatikan gambar 5, terlihat bahwa cukup diperlukan 3 buah warna (merah, hijau, ungu) untuk mewarnai graf di atas. Setelah dibandingkan dengan perkiraan maksimum bilangan kromatik-graf yang diperoleh dari langkah 3, dapat disimpulkan bahwa pewarnaan yang dilakukan pada graf di atas telah tepat.

Dengan demikian, jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan senyawa-senyawa kimia berbahaya di atas adalah 3 buah ruangan.

- Ruangan 1 berisi zat B dan C,
- Ruangan 2 berisi zat A, F, dan G,
- Ruangan 3 berisi zat D dan E.

Perhatikan bahwa dengan menerapkan konsep dasar bilangan kromatik dan metode pewarnaan graf dengan tepat, efisiensi penggunaan ruang untuk menyimpan senyawa kimia berbahaya dapat dioptimalkan.

Berikut akan diberikan contoh lebih kompleks mengenai penerapan metode pewarnaan graf di dalam mengatasi persoalan penempatan senyawa kimia berbahaya.

Persoalan

- Departemen Kimia mempunyai 6 senyawa kimia berbahaya yang dapat menimbulkan ledakan besar apabila tidak diperlakukan dengan benar. Keenam senyawa kimia berbahaya tersebut antara lain : K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 , dan K_6 . Berikut merupakan data pasangan senyawa kimia yang apabila diletakkan dalam satu ruangan yang sama dapat menimbulkan ledakan dahsyat.

Zat kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
K_1	K_2, K_3, K_4, K_5, K_6
K_2	K_1, K_3, K_5
K_3	K_1, K_2, K_4, K_5, K_6
K_4	K_1, K_3, K_6
K_5	K_1, K_2, K_3, K_6
K_6	K_1, K_3, K_4, K_5

Tabel 2 : Hubungan sifat zat kimia untuk persoalan 2

Berapa sedikitnya banyak ruangan berbeda yang harus direncanakan sehingga potensi ledakan berbahaya dapat dihilangkan? Gambarkan graf yang merepresentasikan persoalan ini.

Jawab:

Simpul melambangkan zat kimia, sisi menyatakan bahwa dua zat kimia yang dihubungkannya tidak boleh disimpan bersama-sama.

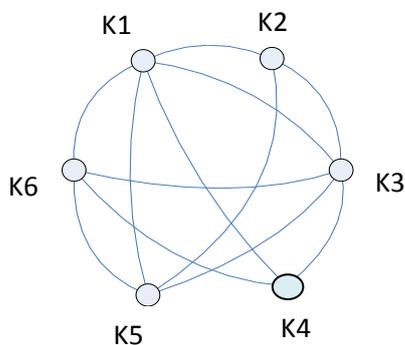
Berdasarkan metode dasar pewarnaan graf yang telah diuraikan di atas, penyelesaian masalah ini dapat diselesaikan sebagai berikut.

Langkah 1. Menggambar simpul-simpul graf.

Pada persoalan ini, terdapat 6 macam senyawa kimia, yaitu K1, K2, K3, K4, K5, K6. Keenam macam senyawa kimia tersebut diperlakukan sebagai enam buah simpul.

Langkah 2. Menggambar sisi-sisi pada graf

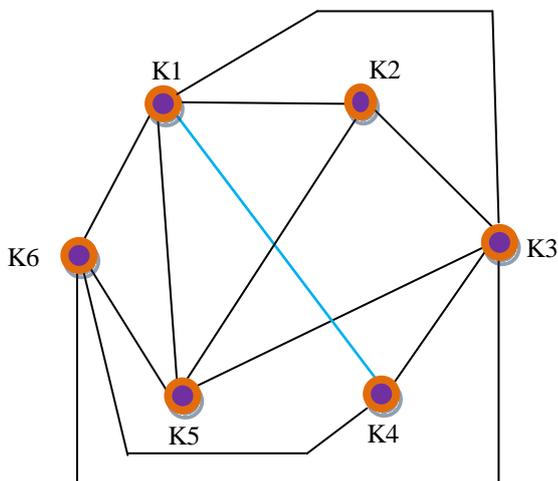
Berdasarkan informasi soal, diperoleh gambar graf sebagai berikut.



Gambar 6 : Graf representasi persoalan 2

Langkah 3. Memprediksi bilangan kromatik graf

Gambar yang diperoleh pada langkah 2 dapat dibuat ulang seperti gambar berikut.



Gambar 7 : Graf representasi persoalan 2 (versi modifikasi)

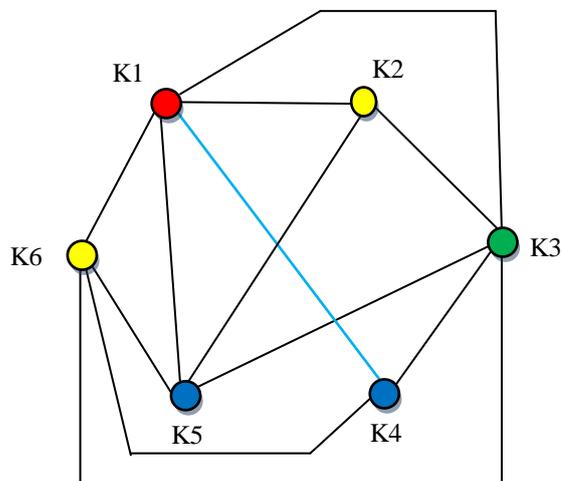
Perhatikan gambar 7 di atas. Apabila sisi yang menghubungkan K1, K4 dihilangkan, maka graf di atas akan menjadi sebuah graf planar. Berdasarkan Teorema Empat Warna, maka graf di atas (tanpa sisi (K1, K4)) memiliki bilangan kromatik $\chi(G) \leq 4$. Berhubung hanya terdapat sebuah sisi (K1, K4) yang menyebabkan graf tersebut menjadi graf bukan planar, maka prediksi jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf di atas adalah $4+1 = 5$ buah warna berbeda.

Langkah 4. Mewarnai graf

Berdasarkan perkiraan awal yang diperoleh dari langkah 3, dapat diketahui bahwa bilangan kromatik graf untuk persoalan ini haruslah $\chi(G) \leq 5$.

Untuk mewarnai graf, terlebih dahulu idealnya pewarnaan dimulai dari simpul dengan derajat terbanyak kemudian melanjutkannya ke simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah diwarnai tersebut. Langkah ini diulang hingga semua simpul telah diwarnai. Dengan memperhatikan gambar 7, maka metode pewarnaan yang sepatutnya dilakukan adalah berturut-turut mewarnai simpul K1, K3, K5, K6, K4, K2 (urutan ini tidak tunggal, masih terdapat alternatif lain).

Berikut merupakan salah satu contoh pewarnaan graf untuk persoalan 2.



Gambar 8 : Graf representasi persoalan 2 (setelah dilakukan pewarnaan graf)

Perhatikan gambar 8, terlihat bahwa cukup diperlukan 4 buah warna (merah, kuning, hijau, biru) untuk mewarnai graf di atas. Setelah dibandingkan dengan perkiraan maksimum bilangan kromatik-graf yang diperoleh dari langkah 3, dapat disimpulkan bahwa pewarnaan yang dilakukan pada graf di atas telah tepat.

Dengan demikian, jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan senyawa-senyawa kimia berbahaya di atas adalah 4 buah ruangan.

- Ruang 1 berisi zat K1,
- Ruang 2 berisi zat K2 dan K6,
- Ruang 3 berisi zat K3
- Ruang 4 berisi zat K4 dan K5.

Perhatikan bahwa perkiraan bilangan kromatik graf di atas, yaitu $\chi(G) \leq 5$ haruslah dilakukan, perkiraan $\chi(G) \leq 4$ bukanlah perkiraan yang tepat. Hal ini dikarenakan kebetulan saja pada kasus di atas $\chi(G) = 4$, namun apabila terdapat sisi (K4, K5), tentu warna yang dibutuhkan adalah 5 buah warna.

Titik tekan yang perlu diperhatikan dalam mewarnai graf adalah bahwa perkiraan yang diperoleh dari langkah 3 adalah perkiraan bilangan kromatik maksimum, artinya bilangan kromatik sesungguhnya berada di bawah atau sama dengan perkiraan bilangan kromatik yang diperoleh dari langkah 3. Perkiraan bilangan kromatik ini sangat diperlukan untuk memverifikasi pewarnaan yang telah dilakukan. Di dalam dunia nyata, perkiraan jumlah warna yang dibutuhkan sangat bermanfaat untuk memperkirakan jumlah sumber daya yang diperlukan, artinya dapat memperkirakan pengeluaran maksimum di dalam mengerjakan suatu proyek, misalkan proyek pembangunan instalasi nuklir yang mensyaratkan terdapat beberapa bahan kimia yang tidak boleh diletakkan pada suatu ruangan yang sama.

Beberapa contoh di atas menunjukkan persoalan - persoalan sederhana yang menggunakan metode pewarnaan graf di dalam mencari solusi terbaik untuk memecahkan suatu permasalahan pembuatan ruangan untuk menempatkan beberapa senyawa kimia berbahaya. Meskipun terlihat sederhana, namun konsep di atas sangat bermanfaat untuk menyelesaikan permasalahan yang lebih rumit.

Misalkan saja terdapat 100 bahan kimia berbahaya yang berfungsi untuk menciptakan suatu sumber energi nuklir. Beberapa di antara senyawa kimia berbahaya ini tidak boleh ditempatkan pada satu ruangan penyimpanan yang sama karena jika tidak, dapat menimbulkan suatu reaksi yang menyebabkan terjadi radiasi tingkat tinggi bagi lingkungan sekitar. Apabila suatu ruangan penyimpanan membutuhkan biaya pembuatan seharga 500 juta rupiah, tentu saja penentuan jumlah ruangan minimum akan menjadi hal yang sangat penting. Perkiraan awal jumlah minimum ruangan

tentu juga diperlukan agar dapat memperkirakan biaya kasar pembangunan instalasi nuklir tersebut.

Untuk menyelesaikan kasus dengan jumlah simpul yang begitu besar, tentu metode pewarnaan secara manual sangatlah sulit untuk dilakukan. Di zaman sekarang ini, telah ditemukan beberapa algoritma yang digunakan untuk mewarnai graf. Semua algoritma ini secara konsep memiliki metode yang sama dengan apa yang telah diulas di atas. Berikut merupakan beberapa algoritma untuk mewarnai graf : [1]

a) First Fit (FF)

Algoritma ini merupakan algoritma yang termudah dan tercepat. Prinsipnya adalah mewarnai setiap simpul graf dengan warna yang tidak akan diubah lagi. Meskipun algoritma ini sangat mudah untuk diimplementasikan dan juga sangat cepat, algoritma ini memiliki probabilitas besar untuk menghasilkan jumlah warna yang melebihi bilangan kromatiknya. Kompleksitas waktu asimtotik algoritma ini adalah $O(n)$.

b) Largest Degree Ordering (LDO)

Algoritma ini merupakan algoritma yang prinsipnya berdasarkan pada nilai derajat dari setiap simpul. Simpul yang memiliki derajat yang lebih tinggi diwarnai lebih dulu. Algoritma ini memberikan hasil yang lebih baik daripada algoritma first fit. Kompleksitas waktu asimtotik algoritma ini adalah $O(n^2)$.

c) Saturated Degree Ordering (SDO)

Algoritma ini berprinsipkan pada jumlah warna berlainan yang ada pada tetangga-tetangga dari sebuah simpul. Simpul yang bertetangga dengan simpul-simpul yang memiliki lebih banyak aneka warna akan diwarnai lebih dulu. Algoritma ini memberikan hasil yang lebih baik daripada algoritma LDO. Kompleksitas waktu asimtotik dari algoritma ini adalah $O(n^3)$.

d) Incident Degree Ordering (IDO)

Algoritma ini berprinsipkan pada jumlah simpul tetangga yang telah diwarnai dari suatu simpul. Simpul yang lebih banyak bertetangga dengan simpul yang telah diwarnai akan diwarnai lebih dulu. Algoritma ini merupakan modifikasi dari algoritma SDO. Algoritma ini dapat dieksekusi dalam waktu yang lebih cepat, tetapi hasilnya tidak sebaik algoritma SDO. Kompleksitas waktu asimtotik algoritma ini adalah $O(n^2)$.

Berikut ini ditunjukkan tabel yang menggambarkan jumlah warna yang dihasilkan oleh setiap algoritma. Pada tabel ini digunakan istilah

“kepadatan”, yaitu perbandingan antara jumlah sisi (vertex) yang ada dan jumlah sisi graf lengkapnya.

Jumlah Simpul	Kepadatan	FF	LDO	IDO	SDO
200	25%	20	18	18	17
200	50%	36	34	34	32
200	75%	58	55	56	53
1000	25%	64	62	63	58
1000	50%	127	123	126	116
1000	75%	217	212	214	204

Tabel 3 : Perbandingan Efektifitas Algoritma

4. Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang dapat ditarik dari uraian di atas antara lain:

- Masalah pewarnaan graf merupakan masalah yang banyak digunakan untuk memodelkan masalah di berbagai bidang, salah satunya adalah penentuan jumlah minimum ruangan untuk menempatkan beberapa senyawa kimia berbahaya yang beberapa di antaranya tidak boleh ditempatkan di dalam ruangan yang sama.
- Beberapa jenis graf yang memiliki keteraturan dapat ditentukan bilangan kromatiknya secara langsung dengan menggunakan sifat – sifatnya.
- Terdapat beberapa algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf. Algoritma yang cepat umumnya memiliki hasil yang kurang efisien (memberikan warna yang lebih banyak), sedangkan algoritma yang efisien umumnya memerlukan waktu eksekusi yang lebih lama.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Al-Omari, Hussein & Khair Eddin Sabri, New Coloring Algorithms, www.scipub.org/fulltext/jms2/jms224739-741.pdf, 2006.
- Tanggal akses : 28 Desember 2008, pukul 09.30 WIB.
- [2] Joan P. Hutchinson, Professor of Mathematics and Computer Science Macalester College Homepage ~ Discrete Mathematics With Algorithms by Albertson and Hutchinson ~ File Nine : More Graph Theory. <http://www.macalester.edu/~hutchinson/book/book.html>.

Tanggal Akses : 28 Desember 2008, pukul 11.00 WIB.

- [3] Leighton, Tom & Ronitt Rubinfeld, Graph Theory, <http://theory.lcs.mit.edu/classes/6.042/fall06/lec6.pdf>, 2006.

Tanggal akses : 28 Desember 2008, pukul 09.15 WIB.

- [4] Munir, Rinaldi, Diktat Kuliah IF 2153, Matematika Diskrit, Edisi Keempat, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2006.

- [5] Rosen, Kenneth H., Discrete Mathematics and Its Applications, 4 th, McGraw-Hill Internasional, 1999.

- [6] Thomas, Robin. (1998). An Update on the Four-Color Theorem. <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>

Tanggal akses: 28 Desember 2008 pukul 10:00 WIB.

- [7] Thomas, Robin, “The Four Color Theorem”, <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>, November 1995.

Tanggal akses: 28 Desember 2008, pukul 10.00 WIB.

- [8] Weisstein, Eric W. "Four-Color Theorem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html> .

Tanggal akses: 28 Desember 2008 pukul 10.30 WIB.

- [9] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

Tanggal akses: 27 Desember 2008, pukul 21.30 WIB.

- [10] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory.

Tanggal akses: 27 Desember 2008, pukul 21.30 WIB.