Aplikasi Kombinatorial dan Peluang Diskrit dalam Permainan Dadu Cee-Lo

Hendy - 13507011
Jurusan Teknik Informatika, ITB, Bandung 40116, email: if17011@students.if.itb.ac.id

Abstract – *Makalah ini membahas mengenai peluang-peluang munculnya kombinasi dari tiga buah dadu bersisi enam dalam permainan dadu Cee-Lo. Teori yang akan digunakan untuk membahasnya adalah teori kombinatorial dan peluang diskrit.*

Kombinatorial adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek. Solusi yang ingin kita peroleh dengan kombinatorial ini adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunannya. Bila dikaitkan dengan pembahasan dalam makalah ini, kita dapat memperhitungkan kemungkinan apa saja yang dapat muncul saat melempar tiga buah dadu secara bersamaan dan mengetahui berapa besar peluang munculnya suatu kombinasi dadu tersebut.

Kata Kunci*: Cee-Lo, dadu, peluang, kombinasi, kombinatorial.*

1. PENDAHULUAN [1]

Teori Kombinatorial merupakan bahasan struktur diskrit yang telah dikenal sejak dulu, telah berkembang dan aplikasinya banyak digunakan di hampir segala bidang.

Salah satu contoh permasalahan yang solusinya memerlukan kombinatorial adalah menghitung banyaknya kombinasi kata sandi (*password*) yang terdiri dari 3 karakter angka dan huruf kapital. Cara paling sederhana adalah dengan mencacah / mengenumerasi satu persatu kemungkinan yang ada.

Namun cara ini hanya efektif untuk jumlah objek yang sedikit, untuk permasalahan dengan jumlah objek yang besar, cara ini akan sangat membuang waktu dan energi, oleh karena itu teori kombinatorial sangat bermanfaat untuk memecahkan masalah ini.

Dengan menggunakan metode enumerasi, kita akan mencacah seperti berikut :
000
001
012
...
HL8
HL9
HK0
....
ZZY
ZZZ

Akan sangat banyak jumlah objek yang dicacah satu persatu. Demikian juga dalam permainan Cee-Lo, bila kita mencacah satu persatu kemungkinan mata dadu yang muncul, akan sangat banyak sekali objek yang ada.

2. TEORI KOMBINATORIAL [1]

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

2.1 Kaidah Dasar Menghitung

1. Kaidah Perkalian (*rule of product*)
   Misalkan percobaan 1 mempunyai p hasil percobaan, dan percobaan 2 mempunyai q hasil, maka bila percobaan 1 <u>dan</u> percobaan 2 dilakukan kan terdapat $p \times q$ hasil percobaan.

2. Kaidah Penjumlahan (*rule of sum*)
   Misalkan percobaan 1 mempunyai p hasil percobaan, dan percobaan 2 mempunyai q hasil, maka bila percobaan 1 <u>atau</u> percobaan 2 dilakukan (hanya salah satu percobaan saja yang dilakukan) akan terdapat $p + q$ hasil percobaan.

2.2 Permutasi

Permutasi adalah jumlah urutan yang berbeda dari pengaturan objek-objek. Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.

Misalkan jumlah objek adalah n, maka :
urutan pertama dipilih dari n objek,
urutan kedua dipilih dari $(n – 1)$ objek,
urutan kedua dipilih dari $(n – 2)$ objek,
…
urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ (2)(1) = n!$$

Rumus permutasi-r (jumlah susunan berbeda dari pemilihan r objek yang diambil dari n objek), dilambangkan dengan $P(n,r)$:

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(r-1)\big) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

2.3 Kombinasi

Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan. Rumus kombinasi-*r* (jumlah pemilihan yang tidak terurut *r* elemen yang diambil dari *n* buah elemen), dilambangkan dengan *C*(*n*,*r*) atau $\binom{n}{r}$.

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

<u>Interpretasi Kombinasi</u>

1. *C*(*n*, *r*) = banyaknya himpunan bagian yang terdiri atas *r* elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan *n* elemen
2. *C*(*n*, *r*) = cara memilih *r* buah elemen dari *n* elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

<u>Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum</u>

Misalkan terdapat *n* buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (ada beberapa bola berwarna sama – *indistinguishable*)

*n*1 bola di antaranya berwarna 1,
*n*2 bola di antaranya berwarna 2,
…
nk bola di antaranya berwarna *k*,
dan *n*1 + *n*2 + … + *nk* = *n*.

Berapa jumlah cara pengaturan n *buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maksimal 1 buah bola)?*

Penyelesaian:
Jika *n* buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan *n* buah bola ke dalam *n* buah kotak adalah

P(*n*, *n*) = *n*!

Dari pengaturan *n* buah bola itu,
Terdapat *n*1! cara memasukkan bola berwarna 1,
terdapat *n*2! cara memasukkan bola berwarna 2,
…
terdapat *nk*! cara memasukkan bola berwarna *k*.

Permutasi *n* buah bola yang mana *n*1 di antaranya berwarna 1, *n*2 bola berwarna 2, …, *nk* bola berwarna *k* adalah

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Cara penyelesaian lain:
Terdapat *C*(*n*, *n*1) cara untuk menempatkan *n*1 buah bola yang berwarna 1,
terdapat *C*(*n* – *n*1, *n*2) cara untuk menempatkan *n*1 buah bola yang berwarna 2,
terdapat *C*(*n* – *n*1 – *n*2, *n*3) cara untuk menempatkan *n*1 buah bola yang berwarna 3,
…
terdapat $C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1} - n_k)$ cara untuk menempatkan n_k buah bola yang berwarna *k*.
Jumlah cara pengaturan seluruh bola ke dalam kotak adalah

$$\begin{aligned} C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) &= C(n, n_1)C(n-n_1, n_2) \\ &\quad C(n - n_1 - n_2, n_3) \dots \\ &\quad C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1} - n_{k}) \\ &= \frac{n!}{n!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\dots \\ &\quad \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}-n_{k})!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} \end{aligned}$$

Kesimpulan:

$$\begin{aligned} P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) &= C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} \end{aligned}$$

<u>Kombinasi dengan Pengulangan</u>

Misalkan terdapat *r* buah bola yang semua warnanya sama dan terdapat *n* buah kotak, serta ketentuan sebagai berikut:

1. Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.
   Jumlah cara memasukkan bola adalah *C*(*n*, *r*).
2. Masing-masing kotak boleh diisi lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola).
   Jumlah cara memasukkan bola adalah

$$C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$$

3. TEORI PELUANG [1]

Kombinatorial dan teori peluang (*probability*) berkaitan sangat erat. Teori peluang banyak menggunakan konsep-konsep dalam kombinatorial. Sebenarnya kedua bidang ini lahir dari arena judi (*gambling games*) – salah satu kasusnya adalah menghitung peluang munculnya nomor lotre. Meskipun begitu, aplikasi kombinatorial dan teori peluang saat ini telah meluas ke berbagai bidang ilmu lain maupun dalam kehidupan nyata seperti ilmu lain dan dalam kehidupan sehari-hari.

<u>Terminologi Dasar</u>

Berikut akan diberikan beberapa terminologi dasar penting mengenai teori peluang yang akan banyak digunakan dalam makalah ini.

A. Ruang Contoh (*sample space*)
   Ruang Contoh dari suatu percobaan adalah himpunan semua kemungkinan hasil percobaan yang bersangkutan.

B. Titik Contoh (*sample point*)
   Titik Contoh adalah setiap hasil percobaan di dalam ruang contoh.

   Hasil-hasil percobaan tersebut bersifat saling terpisah (*mutually exclusive*) karena dari seluruh ruang contoh, hanya satu titik contoh yang muncul.

Misalnya pada percobaan melempar dadu, hasil percobaan yang muncul hanya salah satu dari 6 muka dadu, tidak mungkin muncul dua muka atau lebih, atau tidak mungkin salah satu dari enam muka dadu tidak ada yang muncul.

C. Ruang Contoh Diskrit (*discrete sample space*)
Ruang Contoh Diskrit adalah ruang contoh yang jumlah anggotanya terbatas.

Misalkan ruang contoh dilambangkan dengan S dan titik-titik contohnya dilambangkan dengan $x1$, $x2$, …, maka

$$S = \{ x1, x2, \ldots, xi, \ldots \}$$

Menyatakan ruang contoh S yang terdiri atas titik-titik contoh $x1$, $x2$, …, xi, dan seterusnya.

D. Peluang Diskrit
Peluang Diskrit adalah peluang terjadinya sebuah titik contoh, dan disimbolkan dengan $p(xi)$.

Sifat-sifat peluang diskrit adalah sebagai berikut:
1. $0 \leq p(xi) \leq 1$, yaitu nilai peluang tidak negatif dan selalu lebih kecil atau sama dengan 1.
2. $\Sigma_{i=1}^{|s|} p(x_i) = 1$, yaitu jumlah peluang semua titik contoh di dalam ruang contoh S adalah 1.

E. Kejadian (*event*)
Kejadian –disimbolkan dengan E– adalah himpunan bagian dari ruang contoh.

Misalnya pada percobaan melempar dadu kejadian munculnya angka ganjil adalah $E = \{1,3,5\}$ kejadian munculnya angka 1 adalah $E = \{1\}$.

Kejadian yang hanya mengandung satu titik contoh disebut kejadian sederhana (*simple event*), sedangkan kejadian yang mengandung lebih dari satu titik contoh disebut kejadian majemuk (*compound event*).

F. Peluang Kejadian
Peluang Kejadian E di dalam ruang contoh S dapat diartikan sebagai jumlah peluang semua titik contoh di dalam E. Jadi, kita dapat menuliskan bahwa

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \Sigma x_i \epsilon E \; p(x_i) \qquad (1)$$

Contoh:
Dua buah dadu dilemparkan. Berapa peluang munculnya angka-angka dadu yang jumlahnya sama dengan 8?

Penyelesaian:
Jumlah hasil percobaan yang muncul adalah (dengan menggunakan kaidah perkalian)
$6 \times 6 = 36$
Ruang contohnya adalah
$S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (2,6), \ldots, (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}$, semuanya ada 36 elemen.

Kejadian munculnya jumlah angka dadu sama dengan 8 adalah $E = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$, ada 5 elemen.

Peluang munculnya jumlah angka sama dengan 8 adalah 5/36.

4. CEE-LO [2]

4.1 Cee-Lo dan Kombinatorial

Teori kombinatorial dan peluang yang berkembang sampai sekarang ini, asal mulanya digunakan dalam permainan judi sejak dahulu kala. Para pemain judi dapat memperhitungkan berapa peluang dia mendapatkan poin yang bagus sehingga dapat memenangkan permainan judi tersebut. Salah satu permainan judi tersebut adalah permainan dadu Cee-Lo, permainan Cee-Lo adalah permainan dadu yang sangat tepat untuk dijadikan contoh aplikasi teori kombinatorial dan peluang.

4.2 Penjelasan Singkat mengenai permainan Cee-Lo

Ada referensi yang mengatakan bahwa permainan Cee-Lo ini berasal dari Cina, namun ada pula yang mengatakan permainan ini merupakan permainan tradisional dari Jepang.

Cee-Lo adalah permainan yang menggunakan tiga buah dadu bersisi enam. Cee-Lo dimainkan oleh 2 orang atau lebih dan biasanya menggunakan taruhan.

4.3 Cara Bermain Cee-Lo

Pertama-tama, setiap pemain memasang taruhan yang besarnya ditentukan secara bersama, kemudian pemain melempar tiga buah dadu bersamaan, hasil kombinasi ketiga dadu dicatat dan dibandingkan dengan lemparan pemain lain.

4.4 Kombinasi Kemunculan Dadu

Daftar kombinasi kemunculan dadu, mulai dari skor paling tinggi sampai skor yang paling rendah.

a. 4-5-6
Memiliki skor yang paling tinggi.

b. "*Trips*"
Bila ketiga dadu bernilai sama. *Trips* yang lebih tinggi mengalahkan *trips* yang lebih rendah. Jadi 5-5-5 mengalahkan 4-4-4.

c. "*Point*"
Bila dua buah dadu bernilai sama, dan yang satunya lagi berbeda, maka dadu yang beda sendiri itu adalah besar "poin" nya. Poin yang lebih tinggi mengalahkan poin yang lebih kecil,

contohnya 1-1-5 lebih tinggi dari 6-6-3.

d. 1-2-3
   Memiliki skor yang paling rendah.

e. Lain-lain
   Bila kombinasi ketiga dadu tidak merupakan salah satu kombinasi di atas, maka pemain harus melempar ulang ketiga dadu sampai muncul salah satu kombinasi di atas.

4.5 Peraturan Permainan Cee-Lo

a. Pemain yang mendapatkan skor yang paling tinggi memenangkan taruhan.

b. Bila ada dua pemain atau lebih yang mendapatkan skor yang sama dan tertinggi, maka akan dilakukan lemparan ulang hanya oleh pemain yang mendapatkan skor yang sama tadi dengan menambahkan jumlah taruhan.

c. Bila ada pemain yang lima kali berturut-turut tidak memperoleh salah satu kombinasi dadu, maka dia langsung dianggap kalah.

4.6 Peluang Setiap Kombinasi dalam Cee-Lo

Pertama-tama kita akan menghitung ada berapa kemungkinan yang muncul bila kita melempar tiga buah dadu secara bersamaan. Karena urutan tidak diperhatikan dan diperbolehkan adanya pengulangan, kita akan menggunakan kombinasi berulang.

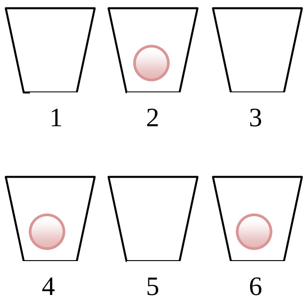
r = 6 (dari jumlah sisi dadu)
n = 3 (dari jumlah dadu)

Jumlah cara yang mungkin terbentuk dari lemparan tiga buah dadu tanpa memperhatikan urutan yakni :

$$C(n+r-1, r) = C(6+3-1, 3) = C(8,3) = 56$$

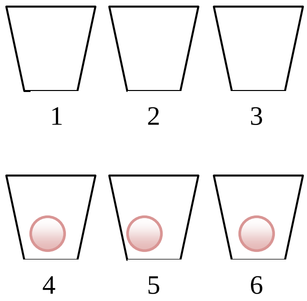
Untuk mempermudah, kita bisa analogikan dengan bola dan keranjang. Bola merepresentasikan jumlah dadu (n) dan keranjang merepresentasikan jumlah sisi dadu (r)

Contoh : 2-4-6



Setelah itu, kita akan menghitung besar peluang dari masing-masing kombinasi yang ada :

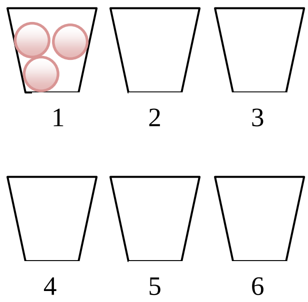
a. 4-5-6



Hanya ada 1 cara untuk memenuhi kombinasi ini. Jadi peluang mendapatkan kombinasi 4-5-6 adalah :

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{1}{56} = 1{,}78\ \%$$

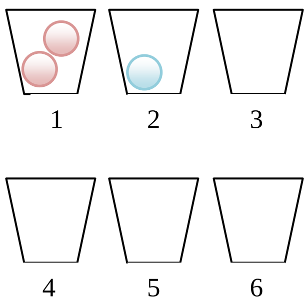
b. "*Trips*"



Ada 6 buah cara (di masing-masing keranjang) untuk memenuhi kombinasi *trips*. Jadi peluang mendapatkan kombinasi *trips* adalah :

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{6}{56} = 10{,}71\ \%$$

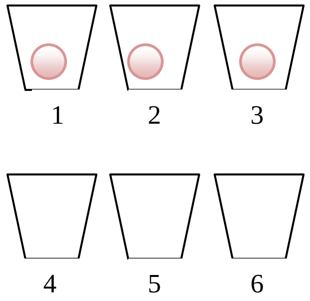
c. "*Point*"



Untuk setiap sepasang bola (merah) dalam satu keranjang, ada 5 cara bola biru menempati keranjang lainnya. Jumlah cara sepasang bola merah menempati keranjang adalah 6 cara (6 buah keranjang). Jadi total cara memenuhi kombinasi *Point* ada 6x5 = 30 cara dan peluang untuk mendapatkannya adalah :

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{30}{56} = 53{,}57\ \%$$

d. 1-2-3



Sama seperti kombinasi 4-5-6, hanya ada 1 cara untuk memperoleh kombinasi 1-2-3. Jadi peluangnya juga sama, yaitu :

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{1}{56} = 1{,}78\ \%$$

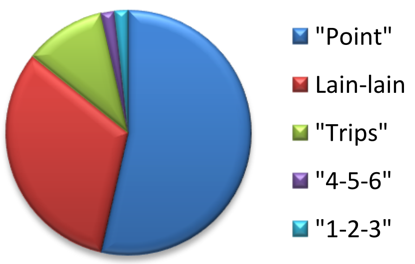
e. Lain-lain

Peluang untuk mendapatkan kombinasi lain-lain selain kombinasi di atas adalah :

$$1 - \frac{1}{56} - \frac{6}{56} - \frac{30}{56} - \frac{1}{56} = \frac{18}{56} = 32{,}14\ \%$$

Tabel 1 : Kombinasi dan Peluangnya

Kombinasi	**Peluang**
4-5-6	1,78 %
Trips	10,71 %
Point	53,57 %
1-2-3	1,78 %
Lain-lain	32,14 %



Gambar 1. Grafik kombinasi dan peluangnya

5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini adalah data dari percobaan yang telah dilakukan sebanyak 100 kali.

Tabel 2 : Data percobaan

Kombinasi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
4-5-6	-	-	-	-	-	-	6
Trips	1	1	0	0	1	1	4
Point	9	4	4	3	5	13	38
1-2-3	-	-	-	-	-	-	3
Lain-lain	-	-	-	-	-	-	49
Jumlah							100

Dapat dilihat dari data di atas hasil percobaan yang diperoleh hanya sedikit menyimpang dari perhitungan sebelumnya. Hal ini dikarenakan pengambilan sampel yang terlalu sedikit. Dengan penambahan jumlah pengambilan sampel, maka data yang diperoleh akan semakin mendekati hasil perhitungan sebelumnya.

5. KESIMPULAN

Beberapa kesimpulan yang dapat ditarik :

a. Dengan teori kombinatorial dan peluang diskrit, kita dapat mengetahui secara matematis besar peluang masing-masing kombinasi dari permainan dadu Cee-Lo. Tidak hanya itu, hampir setiap permainan dadu dan kartu lainnya juga menggunakan teori kombinatorial dan peluang diskrit.
b. Tidak seperti permainan lain, dalam Cee-Lo yang menjadi pemenang bukanlah yang mendapatkan kombinasi yang memiliki peluang terkecil. Peluang memperoleh 1-2-3 (kombinasi terburuk) dan peluang untuk memperoleh 4-5-6 (kombinasi terbaik) sama besar.

DAFTAR REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi, Diktat Kuliah IF2153, Matematika Diskrit, Edisi Ketiga, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2005.

[2] Wikipedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Cee-lo_(dice_game)
Tanggal akses : 1 Januari 2009, pukul 1.50 WIB

[3] http://academic.evergreen.edu/curricular/doingscience/flash/dice.html
Tanggal akses : 3 Januari 2009, pukul 17.30 WIB