Aplikasi *4-Colour Theorem* dalam Teorema Pewarnaan Graf untuk Mewarnai Sembarang Peta

Adiputra Sejati
Jurusan Teknik Informatika, ITB, Bandung
email: cin_gendut@hotmail.com

Abstract *– Makalah ini membahas teorema four colour problem yang sangat terkenal dalam teori graf. Pewarnaan peta pada saat ini tidak lagi memberi warna pada setiap negara maupun kota yang ada melainkan menggunakan teori pewarnaan graf. Dalam teori pewarnaan graf terdapat teori 4 warna (four clour theorem) yang ditemukan pada tahun 1852. Bahkan teorema ini dapat membuktikan bahwa pewarnaan pada sembarang graf planar hanya membutuhkan 4 warna saja. Sehingga pada saat itulah teorema pewarnaan graf menyatakan bahawa bilangan kromatik graf planar* ≤ 4.

Kata Kunci*: teori graf, graf planar, pewarnaan pada graf, 4 colour theorem, bilangan kromatik, pewarnaan pada peta.*

1. PENDAHULUAN

Dalam melakukan pewarnaan pada peta kita harus mengerti berapa warna minimum yang dapat digunakan agar efisien dalam pewarnaannya. Untuk mendapatkan banyaknya warna minimum yang digunakan dapat dicari menggunakan teorema pewarnaan graf. Teorema pewarnaan graf hingga saat ini mengalami beberapa perkembangan. Teorema pertama perwarnaan graf menytakan bahwa bilangan kromatik graf planar ≤ 6. Teorema kedua mengatakan bahwa perwarnaan graf menytakan bahwa bilangan kromatik graf planar ≤ 5. Hingga pada akhirnya teorema terakhir yang ditemukan disekitar abad 19 menyatakan bahwa bilangan kromatik graf planar ≤ 4. Teorema yang ditemukan oleh Apple dan Haken ini telah berhasil menganalisis hampir 2000 graf yang melibatkan jutaan kasus.

2. TEORI

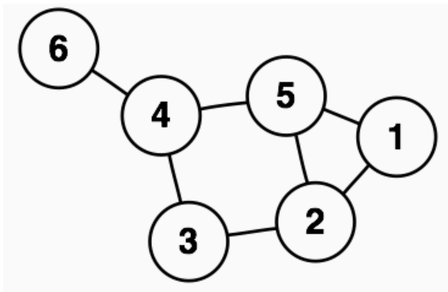
2.1. Definisi Graf & Teori Graf

Teori graf adalah cabang ilmu yang mempelajari sifat-sifat graf. Secara umum graf adalah himpunan benda-benda yang disebut node yang terhubung oleh edge-edge. Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (melambangkan node) yang dihubungkan oleh garis-garis (melambangkan edge).

Suatu graph G dapat dinyatakan sebagai G = $< V,E >$. Graph G terdiri atas himpunan V yang berisikan node pada graph tersebut dan himpunan dari E yang berisi edge pada graph tersebut. Himpunan E dinyatakan sebagai pasangan dari verteks yang ada dalam V.

Sebagai contoh pada definisi graf dimana

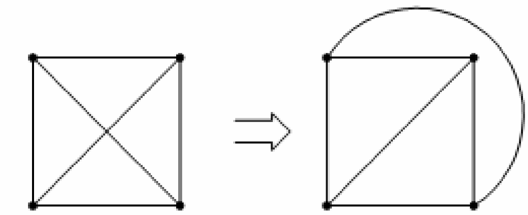
V={1,2,3,4,5,6} dan
E= {(1,2),(1,5),(2,3),(3,4),(4,5),(5,2),(4,6)}
Maka gambarnya graf tersebut



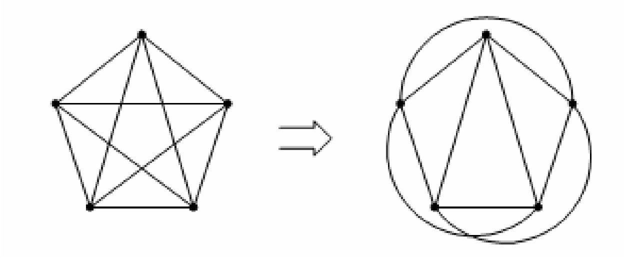
Gambar tersebut menunjukkan suatu graf dengan 6 verteks dan 7 edge.

2.2. Graf Planar

Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang saling tidak memotong. Sedangkan graf yang saling memotong disebut graf non-planar. Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang. Contoh graf planar adalah



Contoh graf non-planar adalah



Dengan menggunakan ketidaksamaan euler kita dapat mengetahui apakah suatu merupaka graf planar atau tidak. Teorema Euler menyatakan jika pada sebuah graf planar dimana mempunyai e jumlah sisi dan n buah simpul maka jumlah f buah wilayahnya adalah

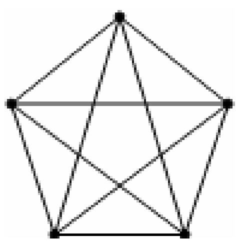
$$f = e - n + 2$$

Rumus ketidaksamaan euler adalah

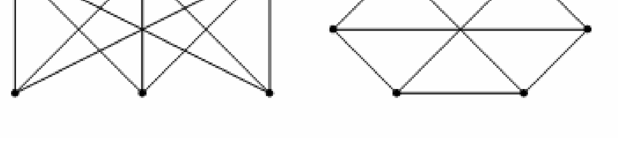
$$e \leq 3n - 6$$

2.2. Teorema Kuratowski

Teorema Kuratowski ditemukan oleh seorang matematikawan dari Polandia yang bernama Kasimir Kuratowski. Ia menemukan suatu sifat unik dari suatu graf non-planar dan membuatnya dalam 2 buah graf.
Graf Kuratowski pertama yaitu graf lengkap yang mempunyai lima buah simpul adalah graf tidak planar.
Gambar graf kuratowski yang pertama adalah



Graf Kuratowski kedua yaitu graf terhubung teratur dengan 6 buah simpul dan 9 buah sisi ($K_{3,3}$) adalah graf non-planar.
Gambar graf kuratowski yang kedua adalah



Sifat graf Kuratowski adalah
1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar.
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

Teorema Kuratowski adalah suatu graf diakatakan tidak planar jika dan hanya jika ia mengandung upagraf yang sama dengan 2 graf tadi atau homeomorfik dengan salah satu dari keduanya.

2.3. Pewarnaan graf

Pewarnaan graf adalah pemberian warna yang biasanya direpresentasikan terurut mulai dari 1, pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dibedakan menjadi 3 yaitu :

1. Pewarnaan simpul
   Pewarnaan simpul merupakan pemberian warna pada setiap simpul/vertex dalam suatu graf sehingga simpul-simpul yang bertetangga tidak mempunyai warna yang sama.

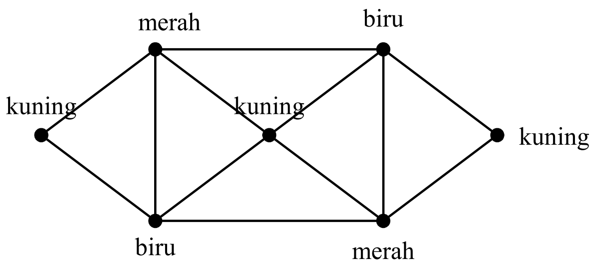
2. Pewarnaan sisi
   Pewarnaan sisi merupakan pemberian warna pada setiap sisi pada suatu graf sehingga sisi yang saling berhubungan tidak memiliki warna yang sama.

3. Pewarnaan wilayah
   Pewarnaah wilayah merupakan pemberian warna pada setiap wilayah pada suatu graf sehingga tidak ada wilayah yang bersebelahan yang memilik warna yang sama.

   Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf disebut bilangan kromatik yang disimbolkan dengan χ(G).

2.4. Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik χ(G) adalah jumlah warna minmum yang dapat digunakan untuk mewarnai suatu graf. Contohnya:



Pada gambar diatas menunjukan bahwa 3 buah warna sudah cukup untuk mewarnai simpul pada graf tersebut.

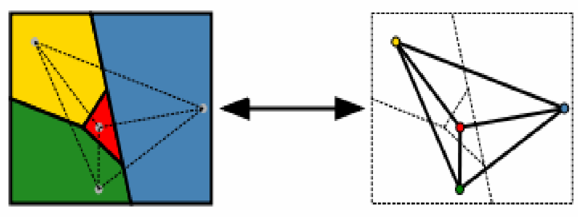
Ada beberapa graf tertentu dapat ditentukan langsung bilangan kromatiknya, yaitu

1. Graf kosong memiliki $\chi(G) = 1$ karena semua simpul tidak terhubung.
2. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$ sebab semua simpul terhubung sehingga diperlukan n buah warna.
3. Graf Bipartit mempunyai $\chi(G) = 2$, satu untuk simpul di himpunan V_1 dan satu untuk himpunan V_2.
4. Graf lingkaran dengan n ganjil memiliki $\chi(G) = 3$.
5. Graf lingkaran dengan n genap memiliki $\chi(G) = 2$.

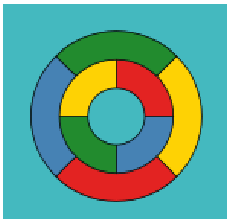
2.5. Four Colour Theorem

Four Colour Theorem merupakan salah satu teorema pewarnaan graf yang menyatakan bahwa pada setiap bidang yang terpisah dalam berbagai wilayah seperti negara-negara dalam peta wilayahnya dapat diwarnai dengan maksimum 4 warna sesuai dengan syarat pewarnaan graf. Jadi tidak ada wilayah atau negara yang bersebelahan yang mempunyai warna yang sama. Pembuktian teorema ini tidak bisa dituliskan menggunakan tangan karena Apple dan Hakken yang menemukan ini menggunakan banyak program dalam computer untuk menemukan teori ini.

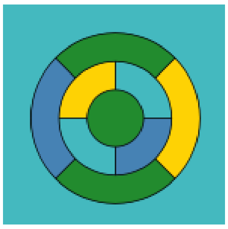
Sebagai contoh 4 wilayah peta diganti dengan puncak dari grafik, dan dua vektor tersebut dihubungkan oleh sebuah tepi jika dan hanya jika dua daerah perbatasan berbagi segmen (tidak hanya sudut). Jadi graf tersebut membutuhkan 4 warna.
Gambar grafik tersebut adalah



Sebelum terbuktinya teorema ini terdapat banyak kesalahan-kesalahan yang terjadi dalam pembuktiannya. Ada beberapa metode yang dipercaya masyarakat selama beberapa waktu sampai akhirnya metode itu terbukti salah. Dan juga banyak pembuktian yang dilakukan para matematikawan yang masih amatir yang tidak dipublikasikan.
Berikut ini adalah salah satu pengaplikasian metode yang salah.



Dari gambar tersebut terlihat bahwa graf tersebut menggunakan 5 warna. Seharusnya dengan mengubah 4 dari 10 wilayah tersebut kita hanya perlu menggunakan 4 warna saja. Gambarnya seperti dibawah ini.



Biasanya contoh-contoh kasus sederhana yang salah terhadap teori ini adalah pada saat menciptakan sebuah wilayah yang menyentuh wilayah yang lainnya. Hal ini menyebabkan tersisa 3 daerah yang diwarnai dengan 3 warna. Karena 4 colour theorem telah dibuktikan kebenarannya maka pewarnaan tadi selalu mungkin. Tetapi biasanya orang menggambar peta yang terfokus pada satu wilayah besar sehingga dia tidak sadar terdapat sisa daerah yang dapat diwarnai dengan 3 warna.

Kesalahan terhadap teori pada jaman dahulu itu dapat diterangkan sebagi berikut: jika ada warna banyak wilayah dalam peta yang telah ditetapkan warnanya maka untuk mewarnai wilayah lainnya mustahil tanpa menggunakan warna lebih dari empat. Dan orang orang yang memeriksa teorema yang salah ini tidak berpikir untuk mengganti warna dari wilayah-wilayah sebelumnyasehingga teorema ini seakan-akan benar.

Mungkin salah satu akibat yang mendasari kesalahpahaman konsep teori ini adalah kenyataan dimana pembatasan warna yang tidak lengkap. Dimana suatu wilayah harus diberi warna yang berbeda dari wilayah lain yang bertetangga dengannya secara langsung, bukan wilayah yang bertetangga dengan wilayah lain yang bertetangga dengannya secara langsung. Batasan ini yang menyebabkan pewarnaan graf planar membutuhkan warna yang banyak.

Pembuktian lain yang salah dalam mengasumsikan teori pewarnaan graf adalah seperti dalam penggunaan wilayah yang terdiri dari beberapa bagian yang terputus atau menolak wilayah yang mempunyai warna yang sama yang saling menyentuh dalam suatu simpul.

Sebelum teori 4 warna ditemukan pada umumnya jaman dahulu menggunakan teori euler. Teori ini juga dapat digunakan selain dalam suatu bidang. Contohnya dalam pewarnaan dalam bola maupun silinder cara pewarnaan wilayahnya sama dengan pewarnaan wilayah dalam suatu bidang. Untuk permukaan yang tertutup dengan genus positif maka jumlah warna tergantung dengan karakteristik euler χ dengan rumus seperti dibawah ini

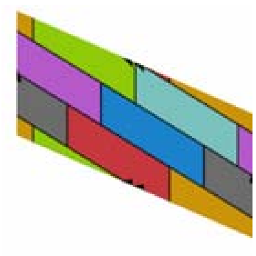
$$p = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor$$

Kurung siku diatas berfungsi sebagai *floor function*. Pengecualian dalam fungsi diatas adalah karateristik euler 0 (karena itu fungsi diatas memberikan p = 7) dan membutuhkan 6 warna.

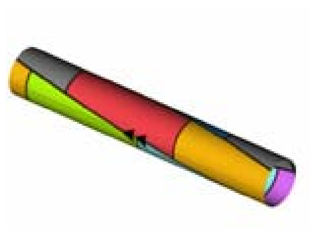
Cara lain untuk rumusan diatas sebagai hubungan dengan genus dari permukaan (g) adalah dengan rumus seperti dibawah ini

$$p = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

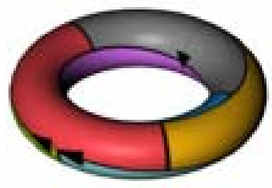
Sebagai contoh sebuah bidang yang memiliki $\chi = 0$, genus $g = 1$ maka p adalah 7. Dalam arti maksimum warna dalam pewarnaan bidang tersebut adalah 7.



Pewarnaan dalam bidang



Pewarnaan dalam silinder



Pewarmaam dalam bola

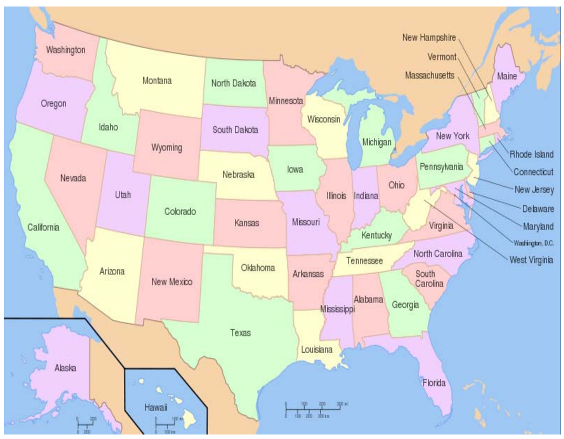
2.6. Pewarnaan pada peta

Pada kenyataannya *four colour theorem* pada ilmu perpetaan (kartografi) ternyata tidak dipakai. Teori empat warna ini hanya berlaku jika bebas memilih warna untuk tiap daerah, tetapi kondisi ini tidak selalu terpenhi karena beberapa peta menggunakan warna yang untuk beberapa hal selain wilayah politik. Bila memaksakan menggunakan teorema empat warna akan memungkinkan warna laut atau danau yang satu dengan laut yang lain akan berbeda. Hal ini akan membingungkan dalam membuat peta.

Didalam ilmu kartografi sebenarnya tidak ada kecenderungan untuk meminimalisasi jumlah warna yang digunakan. Peta yang sebenarnya bila terdapat danau-danau maupun laut-laut yang semuanya harus diberi warna yang sama. Daerah-daerah yang tidak bersinggungan tetapi merupakan satu wilayah politik membutuhkan warna yang sama. Hal ini mengakibatkan warna yang dibutuhkan menjadi lebih banyak sehingga teorema empat warna tidak digunakan dalam pembuatan peta. Teorema empat warna ini dapat digunakan untuk mewarnai peta dataran apabila danau sungai dan hal hal kecil lainnya tidak termasuk dalam wilayah peta tersebut.

Pada umunya kartografer lebih menekankan pada pewarnaan peta politik dengan warna yang seimbang sehingga tidak ada warna yang mendominasi dalam suatu peta. Sehingga meminimalisasi warna tidak lagi digunakan.

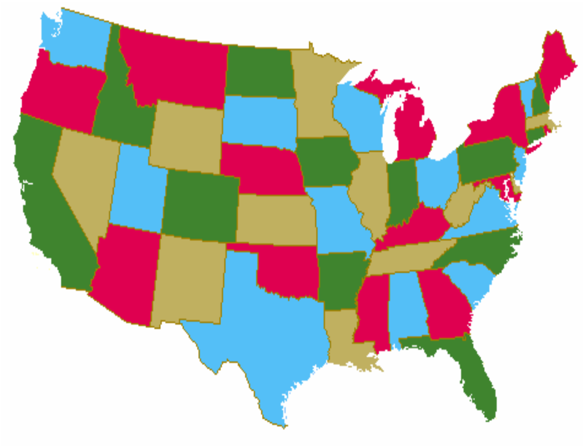
Salah satu contoh peta yang meminimalisasi warna adalah



3. HASIL dan PEMBAHASAN

Berikut ini adalah contoh kasus sederhana dalam pewarnaan peta menggunakan *four colour theorem*.
Kasus:
Membuat pewarnaan peta dataran Australia dengan menggunakan teori 4 warna.
Dalam kasus ini kita harus mengabaikan warna danau maupun sungai dan hal-hal kecil lainnya.
Dengan menggunakan *four colour theorem* kita dapat mewarnai graf tersebut hanya menggunakan 4 warna saja.

Gambar petanya adalah sebagai berikut



Dalam kenyataannya peta dataran Australian tidak demikian. Gambar pada peta sebenarnya adalah

Jadi dalam penggambaran peta yang sebenarnya *four colour theorem* tidak diperhatikan lagi. Kartografer lebih mengutamakan kejelasan peta dan keseimbangan warna dari pada meminimalisasi penggunaan warna.

4. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari makalah ini adalah:

1. *Four Colour Theorem* tidak dapat digunakan dalam membuat peta pada dalam kenyataannya.
2. *Four Colour Theorem* dapat digunakan dalam mewarnai sebarang peta dalam kasus dataran peta sederhana yang tidak memperhatikan hal-hal kecil didalamnya (sungai, danau, dll.)
3. *Four Colour Theorem* dapat digunakan dalam pewarnaan sebarang graf planar. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang saling tidak memotong.

4. DAFTAR PUSTAKA

1. Munir, Rinaldi. (2006). Bahan Kuliah IF2153 Matematika Diskrit. Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.

2. *http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html#References* Tanggal akses: 30 Desember 2008 pukul 19:00

3. *http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem#Summary_of_proof_ideas* Tanggal akses: 30 Desember 2008 pukul 19:00

4. *http://www.sweetmarias.com/map.australia.jpg* Tanggal akses: 31 Desember 2008 pukul 09:00

5. *http://id.wikipedia.org/wiki/Teori_graf* Tanggal akses: 30 Desember pukul 19:00