BEBERAPA APLIKASI SEGITIGA PASCAL

Yulino Sentosa – NIM : 13507046

Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10, Bandung.

E-mail : if17046@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Dalam makalah ini dibahas beberapa aplikasi (kegunaan) dari segitiga pascal. Aplikasi segitiga pascal yang dibahas dalam makalah ini adalah dalam menentukan lintasan terpendek jika dihadapkan pada suatu percabangan pada suatu titik, menentukan peluang (probabilitas) dalam pelemparan mata uang, dan dalam penentuan anggota himpunan bagian yang memiliki k anggota dari suatu himpunan.

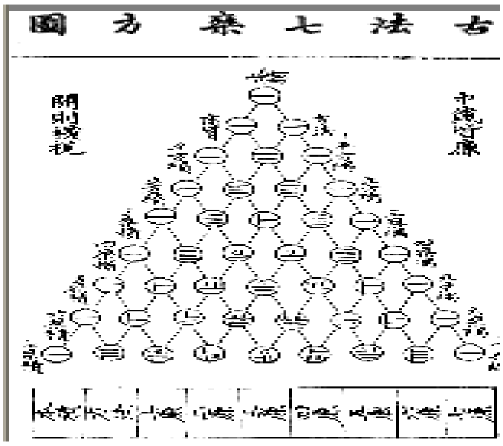
Kata kunci *: segitiga pascal, probabilitas, himpunan bagian*

SEJARAH SEGITIGA PASCAL

Seorang penulis barat menyatakan bahwa pengembangan binomial atau yang biasa kita kenal dengan segitiga pascal dilakukan oleh Umar Khayyam dalam kurun ke 11 bukannya “Blaise Pacal” pada kurun ke 17. Penemuan Umar Khayyam ini kemudian dikembangkan oleh Sama’wal al-Maghribi dalam karyanya al-Bahir fil_Hisab dengan berbagai proses induksi.

Pada abad ke 13, Jordanus de Nemuro penterjemah karya matematika Islam ke Eropa menyebarluaskan hasil karya ini ke Eropa. Dan mulailah Segitiga Pascal dikenal di Eropa.

Dinasti Ming Cina turut mengembangkan teori pengembangan binomial. Dalam buku Yang Hui yang ditulis dalam kurun waktu ke-13 terdapat tulisan mengenai pengembangan binomial. Masyarakat China mengenal segitiga pascal dengan sebutan Segitiga Yang Hui dan digambarkan dengan menggunakan angka Joran (Gambar 1)



Gambar 1. Segitiga Yang Hui (Segitiga pascal)

Bentuk aljabar $(x+y)^2$, $(x+y)^3$, dan $(x+y)^4$ mungkin bias kita selesaikan dalam waktu singkat, akan tetapi jika pangkatnya besar tentunya kita akan menemui kesulitan dan akan memakan waktu yang lama.

Untuk memudahkan penguraian perpangkatan bentuk-bentuk aljabar tersebut, kita bisa menggunakan pola segitiga pascal.

Selain bentuknya yang unik, bilangan-bilangan yang disusun menggunakan pola segitiga pascal memiliki sebuah pola karena selalu diawali dan diakhiri dengan angka 1, di dalam susunannya ada angka yang diulang, dan setiap angka adalah hasil penjumlahan dua bilangan di atasnya.

Perpangkatan bentuk aljabar $(x-y)^n$ dengan n bilangan asli juga mengikuti pola bilangan segitiga pascal. Akan tetapi, tanda setiap koefisiennya selalu berganti dari (+) ke (-), begitu seterusnya.

Karena memiliki bentuk dan pola yang unik, beberapa algoritma dibuat untuk memudahkan dalam membuat pola segitiga pascal. Dengan masukan berupa n bilangan bulat positif, akan muncul bentuk segitiga pascal yang merupakan koefisien hasil penjabaran dari $(x+y)^n$

Bentuk Segitiga Pascal

Bentuk segitiga pascal secara geometrik berasal dari koefisien hasil perpangkatan dari penjumlahan dua buah bilangan. Jika dua buah bilangan dimisalkan dengan x dan y, n menyatakan bilangan pangkat dari penjumlahan bilangan tersebut $\mathbf{(x + y)^{n}}$

$(x + y)^{0} = 1$

$(x + y)^{1} = x + y$

$(x + y)^{2} = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^{3} = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^{4} = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x + y)^{5} = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Aturan untuk menjabarkan bentuk perpangkatan $\mathbf{(x + y)^{n}}$ adalah :

1. Suku pertama adalah x^n , sedangkan suku terakhir adalah y^n.
2. Pada setiap suku berikutnya, pangkat x berkurang satu sedangkan pangkat y bertambah satu. Untuk setiap suku, jumlah pangkat x dan y adalah n.
3. Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ yaitu suku ke – (k+1) adalah C(n,k). Bilangan C(n,k) disebut juga koefisien binomial.

Agar lebih memudahkan dalam perhitungan, koefisien dijadikan prioritas untuk menghindari kesalahan dalam perhitungan. Adapun koefisien dari bilangan pascal dapat digambarkan seperti segitiga berikut :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

I. Segitiga Pascal Untuk Menetukan Shortest Path (lintasan terpendek)

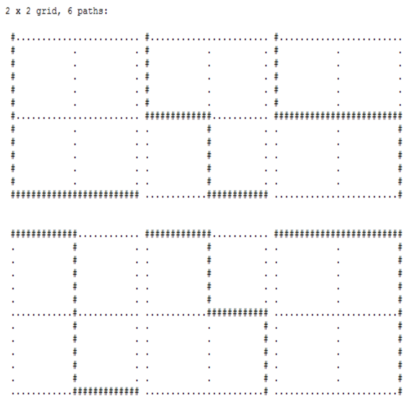
Segitiga pascal dapat digunakan untuk mencari lintasan terpendek dari lokasi yang mempunyai banyak percabangan. Dari suatu titik ke titik lain dapat ditentukan dengan berapa cara agar bisa sampai pada titik tujuan dengan jarak tempuh terpendek.

Dengan diketahui jarak vertikal dan jarak horizontal dari suatu titik ke titik tujuan, dapat diketahui banyak lintasan terpendek yang dapat ditempuh.

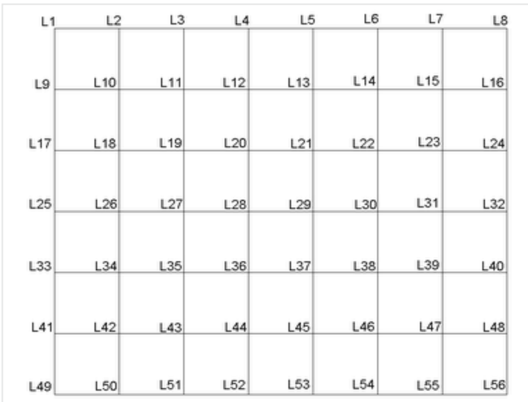
Pada gambar 2di bawah, jarak horizontal = 2, jarak vertikal = 2. Jika x = jarak horizontal, y = jarak vertikal. Banyaknya cara agar lintasan yang ditempuh minimum dengan syarat pergerakan dalam arah horizontal atau vertikal adalah 6, yaitu koefisien suku - x^2y^2 pada penjabaran $(x+y)^{2+2}$.

$(x + y)^{4} = x^4 + 4x^3y + \mathbf{6}x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Pada penjabaran di atas terlihat bahwa 6 adalah koefisien dari suku - x^2y^2. Oleh karena itu jumlah lintasan terpendek yang dapat ditempuh juga sebanyak 6 cara.



Gambar 2. Titik dengan jarak horizontal = 2, jarak vertikal = 2 (2 X 2)



Gambar 3

Pada gambar 3 di atas jarak antara L19 ke L29 adalah 2 garis pada arah horizontal dan 1 garis pada arah vertikal. Karena pada penjabaran $(x+y)^{1+2}$, koefisien pada suku $-x^2y$ adalah 3

$$(x+y)^{2+1} = (x+y)^3 = x^3 + \mathbf{3}x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Maka jarak terpendek antara dua titik tersebut juga dapat ditempuh dalam tiga cara. Lintasan (path) tersebut adalah :

L19-L20-L21-L29

L19-L20-L28-L29

L19-L27-L28-L29

Pada penjabaran di atas juga terlihat bahwa lintasan terpendek untuk jarak vertikal = 2, dan jarak horizontal =1, juga akan menghasilkan angka yang sama. Untuk bilangan dengan jumlah jarak vertikal dan horizontal sama maka jumlah lintasan terpendek yang dapat ditempuh juga sama.

Begitu juga dengan jarak terpendek dari L27 ke L55, jarak horizontal = 4 dan jarak vertikal = 3 garis, maka jalur terpendek dapat ditempuh dengan 35 cara yaitu koefisien suku – x^4y^3 pada penjabaran $(x+y)^7$

Khusus untuk titik dengan jarak horizontal = jarak vertikal akan ditemukan bahwa jumlah lintasan terpendek adalah koefisien maksimum pada penjabaran $(x+y)^{n+n}$.

Cara lain dalam menentukan lintasan terpendek antara dua buah titik adalah dengan menggunakan rumus kombinatorial yaitu :

Banyak lintasan = C(x+y,x) = C(x+y,y)

II. Peluang Suatu Kejadian dari Pelemparan Beberapa Mata Uang

Aplikasi dari segitiga pascal juga berkaitan erat dengan teori probabilitas yaitu dengan permasalahan dalam pelemparan mata uang yang terdiri dari 2 sisi yaitu angka dan gambar.

Dalam menentukan banyaknya peluang dari pelemparan beberapa mata uang, kita harus membuat tabel data beberapa kemungkinan kejadian. Semakin banyak mata uang yang digunakan akan semakin banyak pula datanya seperti yang terlihat pada tabel 1 berikut pada pelemparan 4 mata uang .

Tabel 1 Tabel pelemparan 4 mata uang

Kejadian (A = angka, G = gambar)	
AAAA	4 angka
AAAG	3 angka, 1 gambar
AAGA	3 angka, 1 gambar
AAGG	2 angka, 2 gambar
AGAA	3 angka, 1 gambar
AGAG	2 angka, 2 gambar
AGGA	2 angka, 2 gambar
AGGG	1 angka, 3 gambar
GAAA	3 angka, 1 gambar
GAAG	2 angka, 2 gambar
GAGA	2 angka, 2 gambar

GAGG	1 angka, 3 gambar
GGAA	2 angka, 2 gambar
GGAG	1 angka, 3 gambar
GGGA	1 angka, 3 gambar
GGGG	4 gambar

Tabel 1 di atas menampilkan semua kejadian yang mungkin muncul pada pelemparan 4 mata uang. Jika di torus akan di dapat hasil sebagai berikut :

- Kemungkinan A seluruhnya : 1
- Kemungkinan 3A dan 1G : 4
- Kemungkinan 2A dan 2G : 6
- Kemungkinan 1A dan 3G : 4
- Kemungkinan G seluruhnya : 1

Jadi pada pelemparan 4 mata uang sekaligus kemungkinan gambar seluruhnya adalah 1/16, kemungkinan 3 angka dan 1 gambar = 4/16, dan begitu seterusnya.

Dengan menggunakan Segitiga Pascal dapat mempermudah menjawab persoalan teori kemungkinan . Sebagai contoh : Tentukan banyaknya kemungkinan pelemparan 4 mata uang yang diharapkan terbukanya 3A dan 1G. Penyelesaiannya dapat dilakukan dengan mudah dan cepat yaitu dengan melihat baris ke- 5 pada segitiga pascal. Banyaknya kemungkinan dengan terbukanya 3A dan 1G adalah 4 kemungkinan dari 16 kemungkinan (1/4), karena 4 adalah koefisien pada penjabaran :

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Begitu juga dengan peluang semuanya 2 angka dan 2 gambar, karena koefisiennya adalah 6 maka peluangnya adalah (6/16). Total sampel (kejadian) yang mungkin terjadi adalah 2^n yaitu 2^4 =16, yang merupakan jumlah semua koefisien pada segitiga pascal. Banyaknya suku menggambarkan jumlah kombinasi dari munculnya angka atau gambar tanpa mempedulikan urutan kemunculan.

Contoh lain adalah kemungkinan pelemparan 7 mata uang yang diharapkan terbukanya 5 angka dan 2 gambar. Dengan cepat, tanpa mendaftarkan semua kemungkinan kejadian kita dapat langsung dengan melihat segitiga pascal bahwa kemungkinannya adalah 21/128 karena koefisien dari x^5y^2 adalah 21, sedangkan jumlah semua koefisien pada baris itu adalah = 128.

III. Mengetahui Banyaknya Himpunan Bagian dari Suatu Himpunan

Himpunan bagian dari anggota suatu himpunan dengan n elemen adalah 2^n. Untuk n = 2, yaitu

A = {a,b}, anggota himpunan bagiannya adalah 2^2 = 4, yaitu :

- {} atau Himpunan kosong
- {a}
- {b}
- {a,b}

Dalam hal ini segitiga pascal bermanfaat dalam hal menentukan jumlah anggota himpunan yang tepat memiliki k elemen. Pada contoh di atas jumlah himpunan bagian yang memiliki 2 elemen adalah 1 yaitu {a,b}. Pada segitiga pascal hal ini dapat dilihat pada baris ke (n+1) dengan n = jumlah elemen himpunan, dan pada kolom ke (k + 1), dengan k adalah 2. Pada baris ke 3 dan kolom ke 3 memang bisa dilihat bahwa koefisiennya adalah 1.

Misalkan B = {a,b,c}. Himpunan bagian dari B dengan n = 3 adalah berjumlah 2^3 = 8, yaitu :

- {}
- {a}
- {b}
- {c}
- {a,b}
- {a,c}
- {b,c}
- {a,b,b}

Apabila yang menarik perhatian kita adalah menentukan jumlah anggota himpunan bagian yang memiliki k = 2 anggota, maka Segitiga pascal dalam hal ini dapat bermanfaat. Pada bagan di atas kita lihat bahwa himpunan bagian yang memiliki 2 anggota adalah {a,b},{a,c},dan {b,c}. Hal ini dapat kita lihat pada bagan segitiga pascal pada baris ke (3 + 1) = 4, dan pada kolom ke (2 + 1). Koefisien yang tertera adalah 3, sesuai dengan hasil pencarian secara manual.

Begitu juga untuk n yang besar, segitiga pascal akan sangat bermanfaat dalam menentukan jumlah himpunan bagian yang tepat memiliki k anggota, dimana anggotanya juga merupakan anggota bagian dari himpunan tersebut.

KESIMPULAN

1. Pola bilangan segitiga pascal dapat digunakan untuk menentukan jumlah lintasan terpendek yang dapat ditempuh pada suatu titik percabangan.

2. Pada pelemparan sejumlah mata uang, pola bilangan pascal dapat mewakili kejadian-kejadian yang akan ditemukan beserta probabilitas untuk terjadinya kasus tersebut.

3. Segitiga pascal juga bermanfaat untuk menentukan banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan yang memilik k anggota.

DAFTAR REFERENSI

1. Avianti , Nuniek. *Mudah Belajar Matematika* Hal 7. Pusat Perbukuan Departemen Nasional. 2007

2. http://www.kegunaan-pola-bilangan-segitiga-pascal.html , diakses tanggal 31 Desember pukul 1.00

3. Munir, Rinaldi. *Diktat Kuliah Matematika Diskrit* , Program Studi Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung, 2003

4. Mukrim, Zuhaedi . *Artikel Pemalsuan Tentang Binomial* . Universitas Putra Malaysia.