

Hubungan Antara Bilangan Kromatik dengan Nilai Karakteristik Euler pada Proses Pewarnaan Peta

M. Pasca Nugraha – NIM: 13507033

Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB
Jalan Ganeca no. 10 Bandung
email: mpascanug@yahoo.co.id

Abstract –Teori graf dapat diaplikasikan dalam berbagai hal, salah satunya dalam mewarnai suatu peta. Dalam proses pewarnaan peta pada suatu permukaan, nilai karakteristik Euler dari permukaan tersebut sangat diperlukan, yaitu dalam menentukan besarnya bilangan kromatik dan meminimalisasi jumlah warna yang dibutuhkan. Makalah ini membahas tentang karakteristik Euler, bilangan kromatik, serta hubungan antara keduanya dalam pewarnaan peta.

Kata Kunci: graf, nilai karakteristik Euler, bilangan kromatik, warna.

1. PENDAHULUAN

Graf adalah sebuah teori yang digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Objek divisualisasikan sebagai simpul, sedangkan hubungan antara objek-objek tersebut dinyatakan oleh sisi atau busur.

Secara matematis, sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dimana V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul, atau dapat ditulis dengan notasi $G = (V, E)$.

Teori graf merupakan teori yang sudah lama mengemuka di bumi ini. Menurut sejarah, graf pertama kali digunakan pada tahun 1736 ketika masalah jembatan Königsberg mencuat. Jembatan Königsberg adalah tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh pulau. Masalah yang muncul adalah ketidakmampuan membuktikan dengan analisis bahwa ketujuh jembatan tersebut tidak bisa dilewati semua masing-masing hanya satu kali.

Hingga saat ini, teori graf terus berkembang dan banyak digunakan dan diaplikasikan dalam masalah sehari-hari. Salah satu aplikasi dari teori graf tersebut adalah berkaitan dengan pewarnaan peta.

Pada tahun 1852, seorang ilmuwan bernama Francis

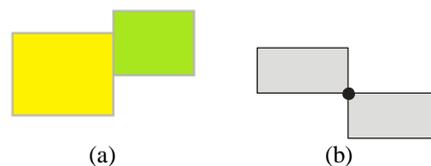
Guthrie mengajukan sebuah masalah yaitu : “Berapa jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewarnai peta sehingga setiap dua daerah yang berbatasan mempunyai warna yang berbeda?”

Pada tahun 1976, hal tersebut baru dapat dibuktikan secara analisis bahwa setiap peta yang digambarkan pada selembar kertas dapat diwarnai hanya dengan empat warna sedemikian sehingga dua daerah yang berbatasan mempunyai warna yang berbeda.

Ada tiga macam pewarnaan menggunakan teori graf, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Pada makalah ini akan banyak dibahas mengenai pewarnaan wilayah, dimana media gambarnya bukan hanya pada kertas datar, melainkan juga pada bangun ruang seperti bola, tabung, dan lain-lain.

2. BILANGAN KROMATIK

Bilangan kromatik dari suatu permukaan didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang dibutuhkan untuk mewarnai peta pada suatu permukaan. Sebagai catatan, dua daerah yang berbatasan *sisi* harus berbeda warnanya, sedangkan dua daerah yang berbatasan pada *simpul* diperbolehkan sewarna.



Gambar - 1

Pada gambar (a), kedua daerah dibatasi oleh sebuah sisi, sehingga warna kedua daerah harus berbeda. Sedangkan pada gambar (b), kedua daerah hanya dipisahkan oleh sebuah simpul, sehingga warna tidak harus berbeda.

Namun, dalam beberapa referensi, ada juga yang menyebutkan bahwa dua daerah yang berbatasan, baik itu berbatasan sisi maupun simpul, harus diberi warna yang berbeda. Dalam makalah ini penulis tidak

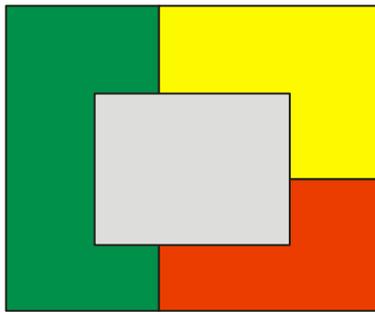
membahas lebih jauh tentang perbedaan ini.

Teorema :

Bilangan kromatik dari permukaan bidang adalah lebih besar daripada 3.

Teorema di atas diberi syarat bahwa dalam bidang tersebut terdapat lebih dari tiga daerah yang berbatasan satu sama lain.

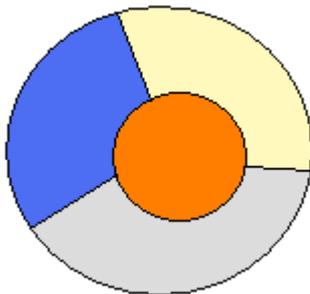
Perhatikan contoh daerah berikut :



Gambar - 2

Gambar di atas merupakan empat daerah yang saling berbatasan. Jelas bahwa daerah-daerah tersebut tidak mungkin diwarnai hanya dengan tiga warna, melainkan harus dengan empat warna.

Contoh lain :



Gambar - 3

Daerah-daerah pada gambar di atas juga tidak mungkin diwarnai hanya dengan 3 warna.

Jadi, bilangan kromatik dari permukaan bidang yang terdiri dari daerah-daerah yang saling berbatasan adalah lebih besar sama dengan empat.

3. NILAI KARAKTERISTIK EULER

Makalah harus mengandung hasil-hasil simulasi atau pengukuran sebagai validasi metode.

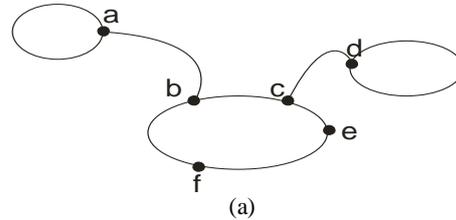
3.1. Graf Regular dan Bukan Regular

Definisi:

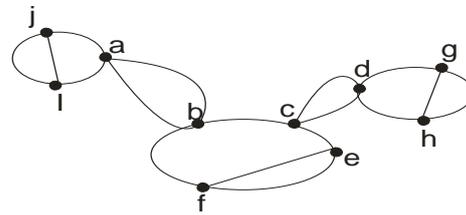
Suatu graf atau peta dikatakan regular apabila:

1. Setiap simpul / vertex memiliki tingkat tiga atau lebih.
2. Setiap busur membatasi suatu daerah,
3. Setiap busur menghubungkan dua simpul yang berbeda (tidak terdapat gelang).

Jika suatu graf tidak memenuhi ketiga syarat di atas, maka graf tersebut bukan regular.



(a)



(b)

Gambar - 4

Gambar 4a merupakan contoh graf bukan regular karena terdapat busur yang tidak membatasi daerah apapun, yaitu busur ab dan cd. Selain itu, pada gambar 4a juga terdapat gelang (simpul a dan d) sehingga tidak memenuhi syarat graf regular. Sedangkan gambar 4b merupakan graf regular karena memenuhi ketiga syarat di atas.

3.2. Nilai Karakteristik Euler

Definisi:

Secara matematis, nilai karakteristik Euler χ adalah

$$\chi = V - E + F$$

dimana V = banyaknya simpul / Vertex

E = banyaknya busur / sisi

F = banyaknya daerah

Perhitungan nilai karakteristik Euler ini banyak digunakan terutama dalam proses pewarnaan peta. Media yang digunakan bukan hanya bidang datar, tetapi juga bangun ruang seperti bola, silinder, dan lain-lain. Adapun yang dimaksud dengan media adalah tempat penggambaran peta.

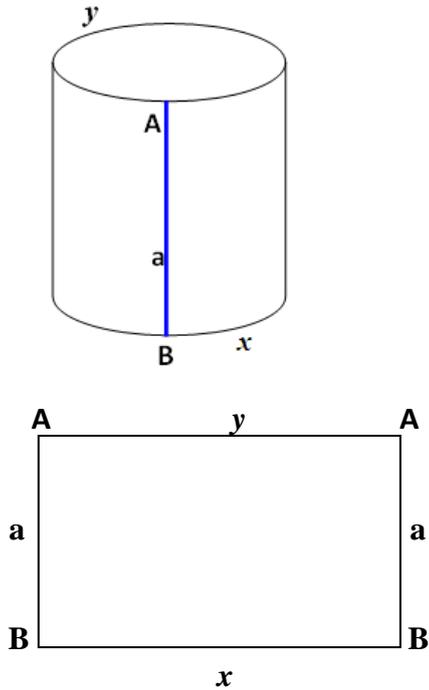
Pada bidang datar, kita ambil contoh dari gambar 4a di atas. Dengan mengetahui bahwa jumlah simpul = 10, jumlah busur = 17, dan banyaknya daerah = 8, maka nilai χ dapat dihitung :

$$\chi = 10 - 17 + 8 = 1$$

Pada bangun ruang, untuk menentukan nilai karakteristik Euler-nya, kitadapat menguraikan bangun ruang tersebut menjadi sebuah permukaan

atau bangun datar. Berikut adalah beberapa contoh cara menentukan nilai karakteristik Euler pada bangun ruang.

1. Silinder

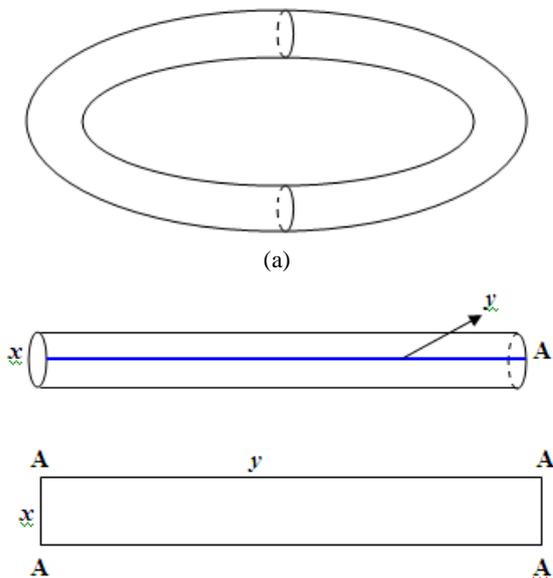


Gambar 5

Silinder tersebut kita potong pada garis biru (gambar 5 atas) sehingga menghasilkan bidang persegi panjang (gambar 5 bawah) dengan 2 buah simpul (A, B) dan 3 busur (a, x, y).

Maka $\chi = V - E + F = 2 - 3 + 1 = 0$

2. Sebuah torus dipotong di satu tempat:



(b)

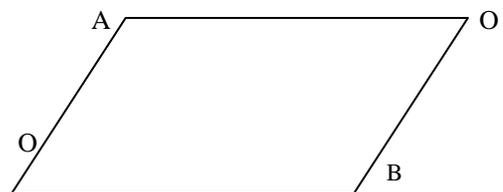
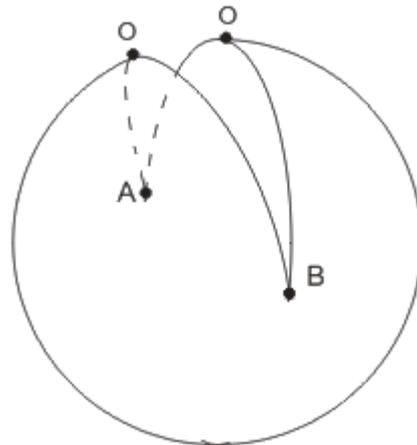
Gambar 6

Setelah torus (gambar 6a) dipotong menjadi sebuah selinder (gambar 6b atas), lalu torus tersebut dibelah / diiris sepanjang garis biru sehingga menjadi sebuah persegi panjang (gambar 6b bawah) yang terdiri atas sebuah simpul dan dua busur.

Maka $\chi = V - E + F = 1 - 2 + 1 = 0$

3. Bola:

Menentukan nilai kromatik dari sebuah bola adalah suatu hal yang sangat penting karena bola merupakan cerminan bola dunia yang di permukaannya dibuat berbagai macam peta.

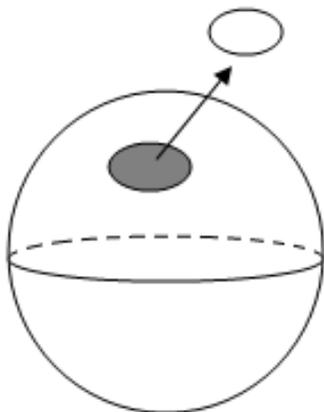


Gambar 7

Untuk menghitung nilai karakteristik dari sebuah bola, bola dibelah kemudian ditarik sehingga membentuk sebuah permukaan dengan tiga buah simpul dan dua busur.

Maka $\chi = V - E + F = 3 - 2 + 1 = 2$

4. Bola dengan satu buah lubang.

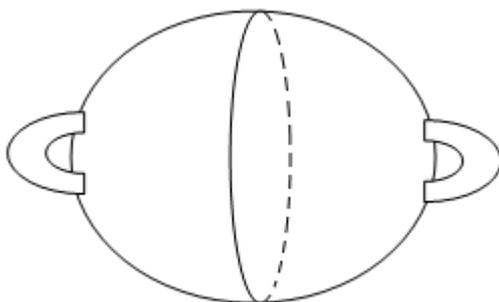


Gambar 8

Pada bangun ini, jumlah busur bertambah satu dari bidang lingkaran karena terdapat busur hasil pemotongan / pelubangan, sehingga :

$$\chi = \chi_{\text{bola}} - E = 2 - 1 = 1$$

5. Bola dengan n = 2 buah handel



Gambar 9

Pada bangun ini, masing-masing handel memuat dua buah busur sehingga untuk n buah handel, nilai karakteristik Euler-nya berkurang sebesar 2n dari bangun bola biasa, sehingga :

$$\chi = \chi_{\text{bola}} - E = 2 - 2n = 2 - 4 = -2$$

4. HUBUNGAN ANTARA BILANGAN KROMATIK DENGAN NILAI KARAKTERISTIK EULER

Dalam proses pewarnaan sebuah peta pada suatu permukaan , ternyata tidak sekedar memberi warna

dengan syarat daerah yang berbatasan sisi berbeda warna, seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Tetapi lebih dari itu, ada teknik sedemikian sehingga pewarnaannya efektif dan jumlah warna yang digunakan seminimal mungkin.

Dalam proses meminimalisasi warna tersebut, nilai karakteristik Euler dari permukaan / media yang digunakan sangat diperlukan. Besarnya nilai karakteristik Euler tersebut menentukan besarnya bilangan kromatik atau banyaknya warna minimal yang diperlukan.

Teorema :

Untuk mewarnai peta regular pada permukaan dengan nilai karakteristik Euler > 0 membutuhkan paling banyak 6 warna.

Dari penurunan teorema tersebut dapat diambil suatu persamaan,

$$\beta F > 6 (F - \chi) \dots\dots\dots (1)$$

dimana

- β = bilangan kromatik
- F = jumlah daerah pada permukaan
- χ = nilai karakteristik Euler

Selanjutnya akan dicari bilangan bulat β_0 yang memenuhi pertidaksamaan (1) untuk $F > \beta$, dengan mengambil nilai karakteristik Euler :

$$\chi = 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots, -10$$

Untuk $\chi = 0$ diperoleh $\beta > 6 \dots\dots\dots (2)$

Bilangan bulat terkecil yang memenuhi (2) adalah $\beta_0 = 7$

Selanjutnya (1) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\beta > 6 \left(1 - \frac{\chi}{F} \right) \dots\dots\dots (3)$$

Sedangkan untuk $\chi = 2$ diperoleh

$$\beta > 6 - \frac{12}{F} \dots\dots\dots (4)$$

Bilangan bulat terkecil yang memenuhi (4) adalah $\beta_0 = 6$

Selanjutnya untuk $\chi < 0$ kita dapat mensubstitusikan $\beta + 1$ ke dalam F, sehingga (3) dapat ditulis sebagai :

$$\beta > 6 \left(1 - \frac{\chi}{\beta + 1} \right) \dots\dots\dots (5)$$

$$(\beta + 1) \beta > 6 \beta + 6 - 6 \chi \dots\dots\dots (6)$$

$$\left(\beta - \frac{5}{2} \right)^2 > \frac{49}{4} - 6 \chi$$

sehingga

$$\beta > \sqrt{\frac{49}{4} - 6 \chi} + \frac{5}{2} \dots\dots\dots (7)$$

Bilangan bulat β_0 yang memenuhi (7) adalah :

$$\beta_0 = \lfloor \sqrt{\frac{49}{4} - 6\chi} + \frac{5}{2} \rfloor + 1 \dots \dots \dots (8)$$

dimana $\lfloor a \rfloor$ berarti bilangan bulat terbesar yang $\leq a$.

Dengan demikian, untuk $x < 0$ diperoleh:

$$\begin{array}{cccccccccc} \chi : & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & \dots \\ \hline \beta : & 7 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 & 10 & 11 & 11 & \dots \end{array}$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai daerah pada suatu permukaan (bilangan kromatis) bergantung kepada besarnya nilai karakteristik Euler. Hubungan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut:

χ	2	1	0	-2	-4	-6	-8	-10
Bil. Kromatik	4	6	7	8	9	10	11	12

DAFTAR REFERENSI

- [1] Fairchild, William, "Topology", W.B Saunders Company, London, 1971
- [2] Milewski, Emil G, "The Topology Problem Solves", Rea's, 1994
- [4] Munir, Rinaldi, "Diktat Kuliah Struktur Diskrit", Bandung, 2003
- [3] Singer & Thorpe, "Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry", Springer Verlag, New York, 1967