

Pemanfaatan Teori Graf untuk Menguraikan Permasalahan dalam Pemodelan Persoalan Penjadwalan Kereta Api

Muhammad Dhito Prihardhanto - 13507118

Prodi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika (STEI)
Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganeca 10 Bandung, email: muh_dhito@students.itb.ac.id

Abstract – Teori graf merupakan sebuah ilmu yang terbukti dapat membantu menyelesaikan beberapa permasalahan dalam berbagai disiplin ilmu maupun permasalahan sosial dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu bidang yang banyak memanfaatkan teori graf adalah dunia perkeretaapian. Dalam perkeretaapian graf digunakan dalam merepresentasikan jaringan perkeretaapian yang menghubungkan berbagai kota di suatu negara, merepresentasikan persilangan jalur rel kereta api, dan sebagaimana yang akan diulas pada makalah ini, yaitu dimanfaatkan untuk membantu menyelesaikan permasalahan yang ada dalam penjadwalan kereta api demi mendapatkan sebuah jadwal kereta api yang optimum dan tepat. Namun, dalam makalah ini tidak akan mengulas hingga ke terbentuknya jadwal kereta api yang tepat, tetapi hanya ingin menunjukkan bagaimana graf dapat menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam penyusunan jadwal kereta api saja.

Kata Kunci: teori graf, penyusunan jadwal, kereta api

1. PENDAHULUAN

Dewasa ini aplikasi graf telah banyak digunakan oleh manusia untuk merepresentasikan permasalahan yang ada agar lebih mudah dipecahkan. Ilmuwan kimia menggunakan graf dalam memodelkan molekul senyawa karbon, orang teknik elektro menggunakan graf dalam perancangan *integrated circuit*, serta masalah kemacetan lalu lintas dapat diselesaikan dengan memodelkan jalan raya dalam graf.

Ilmu terapan graf tersebut terus berkembang hingga saat ini. Kini graf juga dapat digunakan untuk optimisasi dalam masalah penjadwalan kereta api. Persoalan itulah yang ingin diulas dalam makalah ini.

Para peneliti di Eropa, khususnya Jerman dan Italia, dan dengan disponsori oleh perusahaan kereta api di sana telah berusaha menemukan metode untuk menentukan jadwal perjalanan kereta api-kereta api dengan menggunakan teori graf dengan tetap menginginkan permasalahan yang ada di lapangan seperti kapasitas jalur rel kereta api dan kendala yang lainnya.

Kereta api tersebut harus memenuhi syarat, yaitu memiliki jadwal perjalanan yang bersifat periodik, sebagai contoh, Kereta Api Turangga yang memiliki jadwal perjalanan Bandung-Surabaya setiap hari pukul 19.00. Selain itu, dalam permasalahan ini, atau yang

biasa disebut dengan *the Train Timetabling Problem (TTP)*, hanya berlaku untuk jaringan kereta api dengan rel tunggal satu arah yang menghubungkan dua stasiun besar, dengan sejumlah stasiun kecil di antara keduanya. Di sinilah peran teori graf dalam menguraikan permasalahan tersebut.

2. PEMODELAN TTP

Dalam pemodelan TTP ini waktu tempuh kereta api, atau yang disebut *waktu* saja, bersifat diskrit dan diekspresikan sebagai bilangan bulat (*integer*) dari 1 sampai q , di mana q merepresentasikan lamanya waktu tempuh tiap periode dalam 1 hari itu. Selanjutnya, didefinisikan pula *waktu sesaat* dan *selang waktu*.

Diberikan $S = \{1, \dots, s\}$ yang merepresentasikan himpunan dari stasiun kereta api, yang memiliki nomor sesuai dengan urutan stasiun tersebut sepanjang jalur rel yang dilalui kereta api. Stasiun awal dilambangkan dengan nomor 1 dan stasiun akhir dilambangkan dengan s . Selanjutnya, diberikan $T = \{1, \dots, t\}$ yang melambangkan himpunan kereta api yang akan melakukan perjalanan pada setiap periode dari horizon waktu yang diberikan. Untuk setiap kereta api $j \in T$, diberikan stasiun awal f_j dan stasiun akhir sebagai l_j ($l_j > f_j$). Diberikan lagi $S^j = \{f_j, \dots, l_j\} \subseteq S$ merupakan himpunan stasiun yang dilalui secara berurutan oleh kereta api j .

Sebuah jadwal kereta api, untuk setiap $j \in T$, terdiri atas waktu keberangkatan dari f_j , waktu kedatangan di l_j , serta waktu keberangkatan dan kedatangan untuk stasiun $f_j + 1, \dots, l_j + 1$. Waktu tempuh dari kereta api j pada jadwal tersebut didefinisikan sebagai lamanya waktu yang dilalui sejak keberangkatan j dari f_j dan kedatangan j di l_j .

Dari pemodelan tadi akan didapatkan jadwal yang ideal untuk setiap kereta api, tetapi masih memungkinkan untuk dimodifikasi karena menyesuaikan permasalahan yang ada di lapangan, seperti terbatasnya kapasitas jalur rel. Dengan demikian, akan dimungkinkan pula, sebuah kereta api diperlambat perjalanannya atau menambah waktu berhenti kereta api di stasiun agar sesuai dengan jadwal ideal yang didapatkan tadi. Selain itu juga, akan dimungkinkan pula sebuah kereta api harus diubah waktu keberangkatannya atau bahkan dibatalkan agar sesuai dengan jadwal ideal tadi. Solusi

akhir dari TTP ini akan dirujuk untuk dijadikan sebagai jadwal perjalanan kereta api yang sebenarnya yang akan diterapkan dalam kehidupan nyata.

Terkait dengan masalah kapasitas jalur rel kereta api yang hanya bisa dilalui satu kereta api saja, maka ada kemungkinan untuk terjadi susul-menyusul kereta api. Tapi tentu saja itu terjadi hanya ketika kereta api pertama sedang berhenti di stasiun saja. Akibatnya, dimungkinkan sebuah kereta api untuk berhenti di stasiun antara (walaupun dalam jadwal ideal kereta api tidak seharusnya berhenti di stasiun tersebut) supaya memberikan kesempatan bagi kereta api lain di belakangnya untuk menyusulnya. Dalam kehidupan nyata itu sangat sering terjadi. Seperti di Indonesia, kereta api kelas ekonomi harus berhenti di stasiun agar kereta api kelas eksekutif di belakangnya bisa menyusul. Lagipula, untuk setiap stasiun $i \in S$, terdapat batas bawah a_i dan d_i pada selang waktu antara dua kedatangan berturut-turut dan dua keberangkatan berturut-turut.

Karena kecepatan kereta api diasumsikan konstan, maka selang waktu antara dua kereta api yang berjalan berturut-turut pada jalur rel yang menghubungkan stasiun i dan $i + 1$ sedikitnya adalah nilai maksimum dari $\{d_i, a_{i+1}\}$. Hanya saja, yang perlu diperhatikan, terkait dengan terbatasnya kapasitas rel kereta api ini, sedangkan jadwal ini akan berulang setiap periode, maka apabila kasus seperti itu selalu terjadi, mungkin saja salah satu kereta api harus dibatalkan penjadwalannya agar mendapatkan solusi yang mungkin.

Persyaratan kondisi lain yang harus dipenuhi dalam pemodelan TTP ini adalah kereta api j harus datang di stasiun tidak lebih lama dari waktu yang diberikan dan berangkat dari stasiun tidak lebih awal dari waktu yang diberikan. Dengan demikian, kondisi ini akan dapat membantu dalam menjamin ketepatan hubungan antar kereta api lain yang juga sedang berjalan.

Dalam formulasi yang disusun, bertujuan untuk mencari keuntungan (*profit*) yang sebesar-besarnya dengan penjadwalan kereta api tersebut, yang akan dijelaskan selanjutnya. Keuntungan yang didapatkan dari tiap kereta api j bergantung kepada keuntungan ideal (*ideal profit*) kereta api π_j , pada *shift* v_j , didefinisikan sebagai nilai mutlak dari selisih waktu antara waktu keberangkatan dari stasiun f_i pada jadwal ideal dengan jadwal sebenarnya, dan *stretch* μ_j , didefinisikan sebagai nilai mutlak dari selisih waktu antara waktu perjalanan pada kenyataan dan jadwal ideal. Secara formal, keuntungan kereta api j dapat dituliskan

$$\pi_j - \phi_j(v_j) - \gamma_j \mu_j, \quad (1)$$

di mana $\phi_j(\cdot)$ adalah fungsi dari *shift* kereta api v_j (dengan $\phi_j(0) = 0$, nilai dari fungsi selalu naik membesar), dan γ_j adalah parameter bukan negatif. Jadi, apabila keuntungan kereta api j yang dihasilkan adalah negatif, maka akan lebih baik kereta api tersebut tidak dijadwalkan.

Dalam jurnal-jurnal yang membahas TTP memang mengangkat permasalahan yang berbeda-beda. Pada makalah ini batasan yang diambil adalah waktu bersifat diskrit dan jalur rel hanya satu arah. Untuk alasan ini, ada sebuah pembuktian eksplisit *NP-hardness* untuk permasalahan yang diulas dalam makalah ini. Pembuktian tersebut akan menunjukkan bahwa bagaimanapun algoritma aproksimasi waktu polinomial dengan kinerja terburuk tidak akan berguna dalam TTP kecuali jika $P=NP$. Itu dapat diturunkan dari *NP-hard Max-Independent Set Problem* (MISP), yaitu diberikan graf tidak berarah $H = (N, E)$, di mana N adalah himpunan simpul, dan E adalah himpunan sisi, sebut himpunan bagian $S \subseteq N$ dengan kardinalitas maksimum sehingga $(i, j) \notin E$ untuk semua $i, j \in S$.

Proposisi 1. Untuk sembarang MISP dapat diubah secara polinomial ke bentuk TTP sehingga ada penyelesaian korespondensi satu-satu antara MISP dan TTP, dan penyelesaian korespondensi memiliki nilai yang sama.

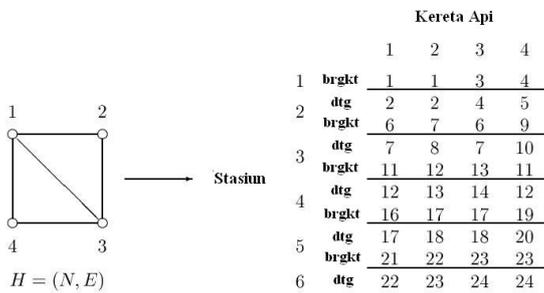
Pembuktian. Diberikan $H = (N, E)$ adalah graf MISP, dengan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, di mana $e_i = (j_i, k_i)$ untuk $i = 1, \dots, m$. Kita definisikan TTP sebagai berikut. Setiap kereta api berkorespondensi dengan sebuah simpul di N . Kita akan menentukan apakah setiap kereta api akan dijadwalkan sesuai dengan jadwal idealnya, atau dibatalkan. Untuk $j \in T$, akan kita berikan $\pi_j = 1$, $\phi_j(0) = 0$, dan $\phi_j(x) = 1$ untuk $x \neq 0$, dan $\gamma_j = 1$. Perlu diperhatikan, karena waktu dinyatakan sebagai bilangan bulat (*integer*), setiap jadwal yang tidak ideal akan mempunyai *shift* atau *stretch* kurang dari 1 menit, dan akibatnya keuntungan akan menjadi negatif. Jumlah stasiun adalah $m + 1$ dan kita berikan $f_j = 1$, $l_j = m+1$ untuk setiap kereta $j \in T$. Selain itu, *selang waktu* minimum a_i dan d_i antara kedatangan dan keberangkatan dari setiap stasiun diubah menjadi 1.

Jadwal ideal akan didefinisikan sehingga jadwal ideal dari dua kereta api j dan k tidak kompatibel (yaitu dua kereta api tidak dapat memiliki jadwal yang sama) jika dan hanya jika $(j, k) \in E$. Untuk setiap sisi $e_i \in E$, dalam jadwal ideal, kereta api j_i dan k_i berangkat pada saat yang sama dari stasiun i dan tiba pada saat bersamaan di stasiun $i+1$. Tentu saja ini tidak mungkin terjadi dalam kehidupan nyata karena hanya terdapat satu jalur rel kereta api.

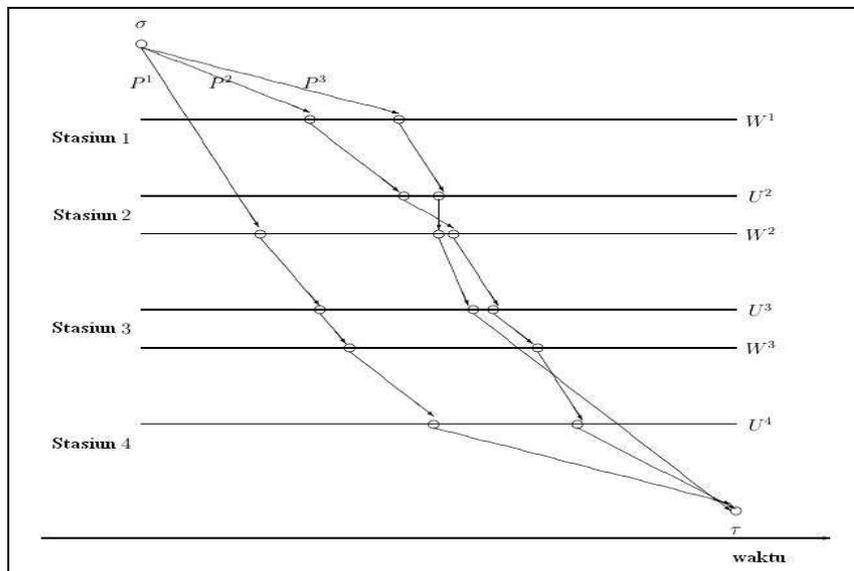
Untuk lebih tepatnya, ambil sisi pertama dari graf H adalah $e_1 = (j_1, k_1)$. Supaya jadwal kereta api j_1 dan k_1 tadi menjadi kompatibel, ubah waktu keberangkatan j_1 dan k_1 menjadi j_1 dari stasiun 1, sedangkan untuk setiap kereta $j \neq j_1$, waktu keberangkatan k_1 dari stasiun diubah menjadi j ; Semua kereta api datang di stasiun 2 setelah keberangkatan mereka dari stasiun 1. Dengan cara yang serupa, dua kereta api yang tidak kompatibel dengan sisi $e_2 = (j_2, k_2)$ dimodelkan dengan mengubah waktu keberangkatan kereta api j_2 dan k_2 dari stasiun 2 menjadi $t+1+j_2$, sedangkan untuk semua kereta api j yang lain waktu keberangkatan dari

stasiun 2 diubah menjadi $t+1+j$; Sebagaimana sebelumnya, semua kereta api tiba di stasiun 3 satu menit setelah keberangkatan mereka dari stasiun 2.

Dengan langkah yang sama seperti di atas, akan diselesaikan permasalahan untuk stasiun 3,4,... m dan untuk pasangan kereta api $(j_3,k_3), (j_4,k_4), \dots, (j_m,k_m)$. Lebih tepat lagi, untuk $i = 1, \dots, m$ diberikan waktu keberangkatan dari stasiun i sama dengan $(i-1)(t+1)+j_i$ untuk kereta api j_i dan k_i dan sama dengan $(i-1)(t+1)+j$ untuk $j \neq j_i, k_i$, dan kedatangan di stasiun $i+1$ selalu satu menit setelah keberangkatan semua kereta dari stasiun i . Langkah-langkah di atas ini akan menghasilkan sebuah TTP sesuai dengan yang diharapkan.



Gambar 1: Transformasi dari MISPP menjadi TTP, $H=(N,E)$ dengan $N = \{1,2,3,4\}$ dan $E = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. Jumlah stasiun adalah 6.



Gambar 2: Contoh lintasan kereta api-kereta api dalam graf G (dengan $s = 4, t = 3, f_1 = 2, l_1 = 4, f_2 = 1, l_2 = 4, f_3 = 1, l_3 = 3$).

Sementara itu, himpunan sisi A dipartisi menjadi himpunan A^1, \dots, A^t , setiap himpunan bagian tersebut adalah untuk setiap kereta api $j \in T$. Untuk setiap kereta api $j \in T, A^j$ memiliki:

- Sebuah himpunan sisi permulaan (*starting arc*) berbentuk (σ, v) , untuk setiap $v \in W^j$

3. PEMODELAN GRAF

Selanjutnya, terdapat sebuah ilustrasi permasalahan matematik yang disebut keuntungan maksimum (*maximum-profit*) dari himpunan lintasan pada sebuah graf ganda (*multigraph*). Diberikan $G = (V,A)$ adalah graf-ganda asiklik berarah yang didefinisikan sebagai berikut (lihat gambar 2 sebagai ilustrasi). Himpunan simpul V memiliki bentuk $\{\sigma, \tau\} \cup (U^2 \cup \dots \cup U^s) \cup (W^1 \cup \dots \cup W^{s-1})$, di mana σ dan τ adalah simpul asal buatan (*artificial source node*) dan simpul terminal buatan (*artificial terminal node*), sedangkan himpunan $U^i, i \in S \setminus \{1\}$, dan $W^i, i \in S \setminus \{s\}$, merepresentasikan himpunan waktu di mana kereta api dapat datang dan berangkat dari stasiun i . Simpul-simpul dalam $U^2 \cup \dots \cup U^s$ dan $W^1 \cup \dots \cup W^{s-1}$ disebut simpul kedatangan (*arrival node*) dan simpul keberangkatan (*departure node*).

Diberikan $\theta(v)$ adalah waktu yang diasosiasikan dengan simpul $v \in V$. Selain itu, juga diberikan $\Delta(u,v) = \theta(v) - \theta(u)$ jika $\theta(v) \geq \theta(u)$, dan $\Delta(u,v) = \theta(v) - \theta(u) + q$ jika $\theta(v) < \theta(u)$. Karena horizon waktu bersifat siklik, kita katakan bahwa simpul u mendahului simpul v jika $\Delta(v,u) \geq \Delta(u,v)$ (yaitu jika selang waktu siklik antara $\theta(v)$ dan $\theta(u)$ lebih kecil dari pada selang waktu siklik antara $\theta(u)$ dan $\theta(v)$).

berkorespondensi ke keberangkatan kereta api j dari stasiun f_j .

- Sebuah himpunan sisi stasiun (*station arc*) berbentuk (u, v) , untuk setiap $u \in U^i$ dan $v \in W^i$ sehingga $i \in S \setminus \{f_j, l_j\}$, dan $\Delta(u,v)$ adalah setara dengan waktu pemberhentian minimum kereta api j di stasiun i (yaitu

waktu pemberhentian di stasiun i dalam jadwal ideal).

- Sebuah himpunan sisi bagian berbentuk (v,u) , untuk setiap $v \in W^i$ dan $u \in U^{i+1}$ sehingga $i \in S^j \setminus \{l_j\}$, dan $\Delta(v,u)$ adalah setara dengan waktu perjalanan minimum kereta api j dari stasiun i ke stasiun $i+1$ (yaitu waktu perjalanan dalam jadwal ideal).
- Sebuah himpunan sisi akhir berbentuk (u,τ) , untuk setiap $u \in U^{l_j}$ berkorespondensi ke kedatangan kereta api j di stasiun l_j .

Dari konstruksi tersebut, graf G adalah asiklik dan setiap lintasan P^j dari σ menuju τ dalam graf G yang hanya menggunakan sisi-sisi dalam A^j berkorespondensi ke jadwal yang mungkin untuk kereta api j (lihat gambar 2). Dengan kata lain semua kemungkinan kendala yang akan dihadapi kereta api secara implicit telah termasuk dalam struktur graf G .

Untuk setiap kereta api j kita asosiasikan dengan *keuntungan (profit)* p_a dengan setiap sisi $a \in A^j$, didefinisikan sebagai berikut. Untuk setiap sisi permulaan (*starting arc*) berbentuk (σ,v) , $v \in W^{f_j}$, diberikan $v(v)$ adalah *shift* yang diasosiasikan dengan simpul v , yaitu,

$$v(v) = |\theta(v) - [\text{waktu keberangkatan ideal kereta api } j \text{ dari stasiun } f_j]|$$

Keuntungan sisi (σ,v) adalah sama dengan $p_{(\sigma,v)} = \pi_j - \phi_j(v(v))$. Sedangkan keuntungan setiap sisi stasiun (u,v) , $u \in U^i$, $v \in W^i$, $i \in S^j \setminus \{f_j, l_j\}$, adalah $p_{(u,v)} = -\gamma_j \mu(u,v)$, di mana $\mu(u,v)$ adalah *stretch* yang diasosiasikan dengan sisi (u,v) , yaitu,

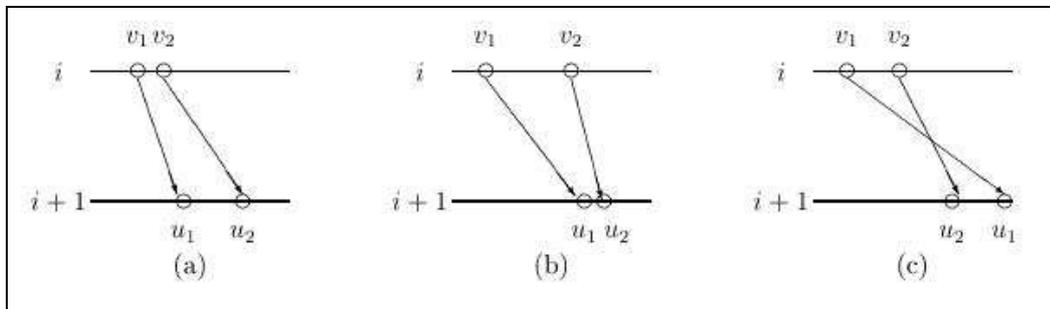
$$\mu(u,v) = \Delta(u,v) - [\text{waktu pemberhentian ideal kereta api } j \text{ di stasiun } i].$$

Dengan analogi yang sama, keuntungan setiap sisi bagian (v,u) , $v \in W^i$, $u \in U^{i+1}$, $i \in S^j \setminus \{l_j\}$, didefinisikan sebagai $p_{(v,u)} = -\gamma_j \mu(v,u)$, di mana $\mu(v,u)$ adalah *stretch* yang diasosiasikan dengan sisi (v,u) , yaitu,

$$\mu(v,u) = \Delta(v,u) - [\text{waktu perjalanan ideal kereta api } j \text{ dari stasiun } i \text{ ke stasiun } i+1].$$

Sedangkan keuntungan sisi akhir (u,τ) , $u \in U^{l_j}$, adalah sama dengan nol.

Keuntungan keseluruhan dalam penjadwalan kereta api didapatkan dari penjumlahan keuntungan sisi-sisi pada lintasan graf G yang berkorespondensi kepada kereta api yang dijadwalkan.



Gambar 3: Pasangan sisi yang tidak kompatibel

Dari, gambar 2 di atas terdapat beberapa pasangan sisi, diasosiasikan dengan dua kereta api yang berbeda, yang tidak memenuhi kendala kapasitas jalur kereta api, sehingga tidak dapat dimasukkan ke dalam solusi keseluruhan. Adalah cukup untuk menyatakan bahwa untuk setiap pasangan sisi kereta api j, k dan untuk setiap stasiun $i \in (S^j \setminus \{l_j\}) \cap (S^k \setminus \{l_k\})$, dua sisi bagian $(v_1, u_1) \in A^j$ dan $(v_2, u_2) \in A^k$, $v_1, v_2 \in W^i$, $u_1, u_2 \in U^{i+1}$, tidak dapat diambil karena sedikitnya memenuhi satu kondisi di bawah ini:

- Selang waktu antara waktu sesaat yang diasosiasikan dengan v_1 dan v_2 adalah lebih kecil daripada d_i (yaitu $\Delta(v_1, v_2) < d_i$), lihat gambar 3(a).
- Selang waktu antara waktu sesaat yang diasosiasikan dengan u_1 dan u_2 adalah lebih

kecil daripada a_{i+1} (yaitu $\Delta(u_1, u_2) < a_{i+1}$), lihat gambar 3(b).

- Dua sisi saling bersilang satu sama lain, lihat gambar 3(c).

Pasangan sisi seperti yang digambarkan pada gambar 3 itu disebut tidak kompatibel, sedangkan pasangan sisi lainnya yang tidak digambarkan dalam gambar 3 itu berarti kompatibel.

Selanjutnya, semua permasalahan di atas yang telah diuraikan, akan diselesaikan dengan berbagai model alternatif. Keterbatasan kapasitas jalur rel kereta api yang menjadi problem di atas dapat dimodelkan dengan menggunakan variabel yang diasosiasikan dengan simpul graf G ataupun sisi-sisi graf G . Pemodelan itu dikenal dengan *Lagrangian relaxation*. Selanjutnya kita akan mengenal apa yang disebut

dengan *Lagrangian profit* yang diasosiasikan dengan simpul graf G . Cara itu lebih baik daripada dengan menggunakan sisi-sisi graf G sebagai asosiasi dengan *Lagrangian profit*. Lalu, di samping dengan metode Lagrangian tadi, juga digunakan metode heuristik untuk menghitung solusi heuristik dengan meranking kereta api berdasarkan nilai *Lagrangian profit*-nya. Kemudian, melakukan penjadwalan kereta api satu persatu. Akhirnya, diperoleh jadwal kereta api yang ideal. Di Eropa sendiri, contoh negara yang telah menerapkan ini adalah Italia.

4. KESIMPULAN

Dari ulasan di atas, telah ditunjukkan bahwasannya teori graf ternyata sangat berguna dalam membantu menguraikan permasalahan yang ada di dunia perkeretaapian, khususnya dalam masalah penjadwalan kereta api untuk mendapatkan penjadwalan yang tepat dan ideal. Permasalahan yang ada di dalam penjadwalan kereta api seperti terjadinya susul-menyusul kereta api, keterbatasan kapasitas rel kereta api, dan banyaknya stasiun yang dilalui dapat

dimodelkan dengan graf, baik dengan cara menentukan stasiun sebagai simpul, kereta api sebagai simpul, lintasan kereta api sebagai sisi, dan sebagainya. sehingga permasalahan dapat lebih mudah diselesaikan, meskipun terdapat berbagai asumsi yang berlaku dalam kasus TTP ini.

DAFTAR REFERENSI

- [1] A. Caprara, M. Fischetti, P. Toth, "Modelling and Solving the train Timetabling Problem", *Operations Research* 50(5), Bologna University, Padova University, Italia, 2002.
- [2] B. Erol, M. Klemenz, T. Schlechte, Soren Schultz, A. Tanner. "TTPLib 2008 – A Library for Train Timetabling Problems", *ZIB-Report 08-19*, Germany, 2008.
- [3] Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*, Penerbit Informatika, 2005.
- [4] Wikipedia, *Graph Theory* <http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory>, diakses tanggal 4 Januari 2008 pukul 10.43