# Metode Analisis Relasi Pemasukan dan Pengeluaran dalam Bisnis dan Ekonomi dengan Matriks Teknologi

**Ginanjar Fahrul Muttaqin**

Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung, Ganeca 10,

Email: gin2_fm@students.itb.ac.id

***Abstract –*** *Makalah ini membahas tentang relasi atau hubungan antara pemasukan dan pengeluaran dalam bentuk diskrit di bidang ekonomi secara makro. Metode analisis dalam makalah ini menggunakan prinsip dasar matriks. Sebuah matriks traksaksi dan matriks teknologi terbentuk dengan adanya relasi antara pemasukan dan pengeluaran dalam masing-masing bagian kegiatan ekonomi. Metode analisis matriks dan relasi ini berdasar pada penerapan ilmu matematika diskrit terapan sehingga didapat suatu rumusan umum yang menginterpretasikan hubungan tersebut.*

***Kata Kunci****: Kaidah matriks (matriks nonsingular, determinan), relasi biner, fungsi bijeksi, relasi masukan-keluaran, matriks transaksi, matriks teknologi, sektor ekonomi/bisnis, dan analisis statis.*

## 1. PENDAHULUAN

Matematika sebagai ilmu sains dapat berbentuk ilmu terapan jika diimplementasikan pada cabang ilmu lain. Relasi dan matriks adalah salah satu bagian dari ilmu matematika diskrit yang menarik untuk dipelajari. Dalam hal ini relasi dan matriks dikembangkan dalam menganalisis masukan dan keluaran dalam bidang ekonomi. **Analisis ini digunakan untuk menentukan fungsi keluaran total terhadap permintaan akhir pada kegiatan ekonomi.**

Analisis masukan-keluaran adalah model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling terkait antarsektor. *Wassily W. Leontief* dari *Harvard University* pertama kali memperkenalkan metode analisis seperti ini secara sederhana pada tahun 1936. Analisis ini cocok digunakan untuk keseluruhan kegiatan perekonomian dalam skala besar (*makroekonomi*). Lebih lanjut analisis ini digunakan untuk menghitung *GNP* (*Gross National Product*) namun tidak dibahas dalam makalah ini.

Masukan dan keluaran yang terbentuk dari sektor-sektor produksi dan konsumen terdistribusi secara acak yang membentuk hubungan/relasi yang bisa dianalisis. Makalah ini menggunakan metode analisis statis yang berarti masukan-keluaran suatu sektor selalu konstan.

Dari relasi masukan-keluaran tersebut dapat dibentuk matriks transaksi yang terdiri dari beberapa komponen. Distribusi konsumsi, distribusi produksi, dan nilai tambah adalah koefisien yang dianggap konstan. Selain itu ada komponen permintaan akhir dan keluaran total yang merupakan peubah yang saling tergantung.

Permintaan akhir ialah nilai yang didistribusi ke konsumen sedangkan keluaran total adalah nilai total yang mengalir dalam sistem tersebut. Komposisi permintaan akhir dan keluaran total haruslah seimbang untuk kinerja sektor yang efisien. Kedua peubah ini menarik untuk dianalisis dari fungsi nilainya. Hal inilah yang menjadi tujuan utama analisis.

Dari sebuah matriks yang terbentuk dari masukan-keluaran antarsektor dalam kegiatan ekonomi terbentuk fungsi permintaan akhir dan keluaran total ataupun sebaliknya.

## 2. PRINSIP DASAR ANALISIS

### 2.1. Matriks

Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen [$a_{ij}$] dalam bentuk baris dan kolom. Matriks $A$ berukuran baris $m$ dan kolom $n$ ditulis:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Matriks identitas $I$ adalah matriks yang memiliki elemen $i_{ii} = 1$, dan elemen sisanya bernilai 0, dengan $I$ matriks persegi $m \times m$ $(m = n)$ dan $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Operasi penjumlahan dan pengurangan matriks menghasilkan matriks yang setiap elemennya adalah hasil penjumlahan atau pengurangan elemen dengan indeks sama. Matriks tersebut harus berukuran sama. Misal matriks $B = I – A$, maka $b_{ij} = i_{ij} – a_{ij}$.

Operasi perkalian matriks dengan skalar menghasilkan matriks yang setiap elemennya adalah hasil kali elemen dengan skalar, $A = kB$ maka $a_{ij} = k \times b_{ij}$

Operasi perkalian matriks $C = AB$ memenuhi syarat ukuran $A$ *(m x p)*, $B$ *(p x n)* dan $C$ *(m x n)*.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \qquad (3)$$

Matriks *transpose* dari $A$ ditulis $A^T$ dibentuk dengan membalik baris dan kolom dari $A$.

Determinan matriks adalah nilai skalar yang dibentuk berdasarkan operasi diagonal elemennya.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

*sehingga*

$$detB = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

*dalam bentuk lanar*

$$detB = (b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32})$$
$$-(b_{13}b_{22}b_{31} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{11}b_{23}b_{32}) \qquad (5)$$

Matriks nonsingular ialah matriks yang mempunyai determinan bukan nol, sehingga memiliki invers matriks.

Invers matriks $B$ didefinisikan sebagai $B^{-1}$ memenuhi $BB^{-1} = I$. Penentuan invers matriks yang dibahas ialah dengan metode kofaktor.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

*terdapat kofaktor matriks B, yaitu*

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

*atau*

$$c_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

*dihitung seterusnya sehingga didapat matriks* $B^{-1}$*:*

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \left[C_{ij}\right]^T \qquad (7)$$

Manipulasi matriks yang dibahas ini merupakan prinsip perhitungan yang akan dibahas terapannya pada makalah ini.

Untuk lebih jelasnya akan dibahas pada bab berikutnya.

### 2.2. Relasi Biner dan Fungsi Bijeksi

Relasi biner $R$ antara $A$ dan $B$ didefinisikan sebagai himpunan bagian terbentuk dari $A$ *x* $B$, $R \subseteq (A \text{ x } B)$.

$$A \text{ x } B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}. \qquad (8)$$

Misalkan $A$ dan $B$ himpunan relasi biner. $A$ ke $B$ merupakan suatu fungsi jika elemen dalam $A$ dihubungkan tepat dengan satu elemen dalam himpunan $B$.

$$f : A \rightarrow B \qquad (9)$$

Sebuah fungsi dikatakan bijeksi jika pada fungsi di atas terdapat $a \neq b$, sehingga $f(a) \neq f(b)$ dan semua elemen B adalah jelajah dari $f$.

$A = \{16, 2, 1989\}$ dan $B = \{-16, -2, -1989\}$ maka terdapat fungsi bijeksi $A$ ke $B$,

$$f_1 : b = -a$$

*dilihat dari sisi lain terdapat:*

$$f_2 : a = -b$$

Kedua fungsi itu merupakan fungsi balikan. Akan lebih mudah jika ditampilkan dalam bentuk perkalian matriks.

$$f_1 : \begin{bmatrix} -16 \\ -2 \\ -1989 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 1989 \end{bmatrix}$$
$$f_1 : B = MA$$

$$f_2 : \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 1989 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 \\ -2 \\ -1989 \end{bmatrix}$$
$$f_1 : A = NB$$

Kita anggap faktor pengali pada masing-masing fungsi adalah matriks $M$ dan $N$. Dengan kaidah matriks dapat dibuktikan bahwa $M$ adalah invers dari $N$.

*pada fungsi pertama ($f_1$):*

$$B = MA$$

*kalikan kedua ruas dengan matriks N,*

$$NB = NMA$$

*hitung bagian ruas kanan,*

$$NM = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$NM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$NB = IA, atau\ A = NB$$

Ternyata terdapat fungsi kedua ($f_2$) yang terbentuk dari perkalian matriks *N* yang merupakan invers dari matriks *M*. Sifat fungsi bijeksi inilah yang akan dimanfaatkan dalam analisis relasi masukan-keluaran yang akan dibahas dalam makalah ini.

## 3. MATRIKS RELASI MASUKAN-KELUARAN

### 3.2. Matriks Transaksi

Sebuah kegiatan ekonomi termasuk bisnis pastinya memiliki beberapa sektor kegiatan. Masing-masing sektor kegiatan ini membentuk sistem ekonomi yang tidak lepas dari masukan dan keluaran baik secara fisik maupun nilai uang. Setiap sektor membutuhkan masukan untuk menjalankan kerjanya, selain itu sektor tersebut memberi keluaran pada sistem atas kinerjanya.

Secara tidak langsung sektor tersebut menggunakan keluaran yang berasal dari sektor lain. Keluaran dari sektor ini juga dapat digunakan oleh sektor lain. Sektor tersebut pula memberi keluaran yang digunakan sebagai masukan sektor itu sendiri ataupun dikonsumsi sebagai *permintaan akhir* yang didistribusikan ke konsumen.

Masukan dan keluaran yang dimaksud ialah pemasukan dan pengeluaran nilai dari/ke masing-masing sektor ekonomi. Pada akhirnya relasi masukan-keluaran tersebut disajikan dalam bentuk tabel yang disebut matriks transaksi.

Tabel 1 Matriks Transaksi

| Keluaran / Masukan | Distribusi Konsumsi | Permintaan Akhir | Keluaran Total |
|---|---|---|---|
| Distribusi Produksi | $X_{11}$ $X_{12}$ ... $X_{1m}$<br>$X_{21}$ $X_{22}$ ... $X_{2m}$<br>: : :<br>: : :<br>$X_{m1}$ $X_{m2}$ ... $X_{mm}$ | $U_1$<br>$U_2$<br>:<br>:<br>$U_m$ | $V_1$<br>$V_2$<br>:<br>:<br>$V_m$ |
| Nilai Tambah | $Y_1$ $Y_2$ ... $Y_m$ | $U_{m+1}$ | $V_{m+1}$ |
| Keluaran Total | $V_1$ $V_2$ ... $V_m$ | $V_{m+1}$ | $V$ |

Elemen $X_{ij}$ menunjukan besarnya nilai keluaran dari sektor *i* dan digunakan sebagai masukan oleh sektor *j*.

*pemakaian total oleh sektor i :*

$$V_i = U_i + \sum_{j=1}^{m} X_{ij} \qquad (10)$$

*keluaran total* dari sektor *j* :

$$V_j = Y_j + \sum_{i=1}^{m} X_{ij} \qquad (11)$$

Dari matriks transaksi dapat dibaca bahwa sektor j untuk memproduksi keluaran sejumlah $V_j$ diperlukan masukan dari sektor 1 hingga sektor *m* dan nilai tambah tertentu.

Hal ini menunjukkan hubungan dan distribusi masukan-keluaran antarsektor.

### 3.3. Matriks Teknologi

Matriks Teknologi terbentuk dari sejumlah koefisien teknologi ($a_{ij}$) yang terbentuk dari elemen matriks transaksi

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{V_j} \qquad (12)$$

Koefisien teknologi adalah suatu rasio yang menjelaskan jumlah nilai keluaran sektor *i* yang diperlukan sebagai masukan unit di sektor *j* terhadap jumlah total masukan pada sektor *j*.

Matriks Teknologi

| *sektor* | 1 | 2 | ... | *m* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1m}$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2m}$ |
| : | : | : | | : |
| *m* | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | .. | $a_{mm}$ |
| *Nilai Tambah* | $(1-\sum a_{i1})$ | $(1-\sum a_{i2})$ | ... | $(1-\sum a_{im})$ |

Sedangkan nilai yang tidak konstan dibentuk dalam matriks kolom, yaitu *permintaan akhir (U)* dan *keluaran total (V).*

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}, \qquad (13) \qquad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Dari persamaan dan matriks di atas dapat dibuktikan persamaan yang menunjukkan hubungan kedua peubah tersebut (*U* dan *V*).

*dari persamaan (10) dan (12)*

$$V_i = U_i + \sum_{j=1}^{m} X_{ij}$$

$$X_{ij} = a_{ij}V_j$$

*maka*

$$V_i = U_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}V_j$$

$$U_i = V_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}V_j$$

*jika diuraikan*

$$\begin{aligned}
U_1 &= V_1 - a_{11}V_1 - a_{12}V_2 - \dots - a_{1m}V_m \\
U_2 &= V_2 - a_{21}V_1 - a_{22}V_2 - \dots - a_{2m}V_m \\
U_3 &= V_3 - a_{31}V_1 - a_{32}V_2 - \dots - a_{3m}V_m \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
U_m &= V_m - a_{m1}V_1 - a_{m2}V_2 - \dots - a_{mm}V_m
\end{aligned}$$

*jika dibentuk perkalian matriks menjadi*

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}$$

*atau*

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \dots & 1 - a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}$$

$$U = (I - A)V$$

*berdasarkan fungsi balikan matriks juga berlaku*

$$V = (I - A)^{-1}U$$

*keterangan:*

*V : Matriks "keluaran total"*

*U: Matriks "permintaan akhir"*

*A: Matriks "koefisien teknologi"*

*I: Matriks Identitas*

Bertolak dari persamaan ini kita dapatkan fungsi keluaran total terhadap permintaan akhir. Hal ini akan memudahkan untuk mengkombinasikan kedua peubah ini sesuai dengan kebutuhan produksi atau permintaan konsumen.

Persamaan di atas digunakan jika suatu saat salah satu dari permintaan akhir atau keluaran total ingin ditentukan nilainya maka dapat diatur dengan mengubah salah satunya. Lebih lanjut dibahas pada analisis kasus di bawah ini.

## 4. ANALISIS RELASI MASUKAN-KELUARAN EKONOMI MAKRO

Perekonomian suatu Negara bergerak atas tiga sektor besar, yaitu pertanian, industri dan jasa. Ketiga sektor ini masing-masing memiliki sistem yang membutuhkan masukan dari sektor lain untuk menghasilkan suatu keluaran.

Pada suatu waktu keadaan sektor-sektor tersebut dirangkum dalam tabel berikut. Tabel ini sudah merepresentasikan matriks transaksi.

Tabel 2 Matriks Transaksi

| Keluaran / Masukan | P | I | J | PA | T |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 25 | 60 | 126 | **39** | **250** |
| I | 50 | 120 | 42 | **88** | **300** |
| J | 150 | 30 | 42 | **198** | **420** |
| NT | *25* | *90* | *210* | 55 | 380 |
| T | *250* | *300* | *420* | 380 | **1350** |

Ketetangan :

| | |
|---|---|
| P : Sektor Pertanian | NT : Nilai Tambah |
| I : Sektor Industri | PA : Permintaan Akhir |
| J : Sektor Jasa | T : Keluaran Total |

Suatu saat sektor pertanian mengalami perkembangan begitu cepat sehingga berpotensi untuk mengembangkan perekonomian sehingga Negara membutuhkan peningkatan permintaan akhir untuk beberapa sektor. Pemerintah menargetkan masing-masing:

1. Pertanian : ditingkatkan dari 39 menjadi 250,
2. Industri : ditingkatkan dari 88 menjadi 125,
3. Jasa : diturunkan dari 198 menjadi 100.

Berdasarkan target dari pemerintah tersebut maka keluaran total yang mengalir pada masing-masing sektor haruslah diubah sesuai kebutuhan dan target sektor tersebut.

Analisis masukan keluaran yang digunakan ialah analisis statis dengan menganggap masukan dan keluaran masing-masing sektor selalu konstan secara lanar.

Dari matriks transaksi di atas dapat dihitung matriks teknologi yang terbentuk berdasarkan komponen tiap elemen dengan jumlah keluaran total tiap sektor.

Matriks A mendefinisikan matriks teknologi dengan elemen pembentuknya adalah koefisien teknologi pada tabel di atas.

$$A = \begin{bmatrix} 25/250 & 60/300 & 126/420 \\ 50/250 & 120/300 & 42/420 \\ 150/250 & 30/300 & 42/420 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

*target permintaan akhir (U)*

$$U = \begin{bmatrix} 250 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix}$$

*berdasarkan persamaan*

$$V = (I - A)^{-1} U$$

*misal B = (I - A)*

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,3 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,6 & -0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

*dengan metode kofaktor*

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(I - A)} \left[C_{ij}\right]^T$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,682 & 0,667 & 0,635 \\ 0,762 & 2,000 & 0,476 \\ 1,206 & 0,667 & 1,587 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1,682 & 0,667 & 0,635 \\ 0,762 & 2,000 & 0,476 \\ 1,206 & 0,667 & 1,587 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 250 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1,682 & 0,667 & 0,635 \\ 0,762 & 2,000 & 0,476 \\ 1,206 & 0,667 & 1,587 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 250 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 567,375 \\ 488,100 \\ 543,575 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 567,375 \\ 488,100 \\ 543,575 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian masing-masing sektor harus memasang keluaran total sebesar:

1. Pertanian : meningkat dari 250 ke 567,375
2. Industri : meningkat dari 300 ke 488,100
3. Jasa : meningkat dari 420 ke 543,575

Apabila diamati dengan target peningkatan permintaan akhir sektor pertanian sekitar enam kali lipat berakibat pada peningkatan keluaran total pada sektor pertanian sebesar dua kali lipat. Apabila dianalisis sektor jasa yang targetnya permintaan turun sekitar setengahnya malah naik sekitar 0,3%.

Komposisi inilah yang membuktikan bahwa masing-masing sektor mempunyai relasi antarsektor, tepatnya pada masukan dan keluaran masing-masing sektor.

## 5. KESIMPULAN

Matematika diskrit memiliki banyak ilmu untuk dipelajari. Relasi dan matriks adalah salah satu dari ilmu diskrit yang menarik untuk dipelajari.

Setiap ilmu dapat dikombinasikan untuk benar-benar bermanfaat dalam kehidupan manusia baik dalam ilmu sains maupun terapan. Analisis masukan keluaran adalah salah satu aplikasi terapan ilmu matematika diskrit yang memanfaatkan teori-teori relasi dan matriks.

Pada analisis masukan keluaran terdapat relasi antarsektor dalam menjalankan perekonomian untuk mendukung sistem yang terkait di dalamnya. Relasi ini dapat disajikan dalam bentuk matriks transaksi dan matriks teknologi.

Pada matriks teknologi terdapat permintaan akhir yang memetakan keluaran total akibat adanya relasi antarsektor. Pemetaan itu, tepatnya fungsi satu ke satu, dapat dibentuk dalam perkalian matriks. Dengan menggunakan dasar matriks fungsi balikannya dapat ditentukan.

## DAFTAR REFERENSI


[1] Rinaldi Munir, "*Diktat Kuliah IF2091 Struktur Diskrit*", *Informatika ITB*, 2008, Bab 3, hal. III-1 – III-7.

[2] Erwin Kreyszig, "*Advanced Engineering Mathematics*", hal. 315 – 320.

[3] Dumairy, "*Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*", *BPFE*, 1999, Yogyakarta, hal. 317 – 320.

[4] Sadono Sukirno, *"Pengantar Teori Mikroekonomi"*, *Karisma Putra Utama,* hal. 23 – 24, 75 – 80.

[5] Sudjana, "*Statistika"*, *Tarsito,* Bandung, hal. 10.