Penjabaran Rumus de Moivre Menggunakan Koefisien Binomial

Kamal Mahmudi [1)]
1) Jurusan Teknik Informatika ITB, Bandung, NIM : 13507111 email: if17111@students.if..itb.ac.id

Abstrak *– Makalah ini membahas aplikasi koefisien binomial pada penjabaran rumus de Moivre. Rumus de Moivre yang menggunakan sifat-sifat bilangan kompleks serta menggunakan identitas trigonometri secara umum berbentuk bilangan kompleks berpangkat. Rumus de Moivre ini terkadang perlu dijabarkan dalam bentuk yang sederhana, salah satu cara yang dapat digunakan untuk menjabarkannya adalah dengan menggunakan koefisien binomial.*

Kata Kunci*: koefisien binomial, identitas trigonometri, rumus de Moivre, bilangan kompleks.*

1. PENDAHULUAN

Trigonometri pada dasarnya bermula dari fungsi yang menyatakan hubungan/relasi angular pada bidang dan bentuk tiga dimensi. Namun, pada perkembangannya fungsi trigonometri tidak lagi hanya berkutat pada studi geometri bidang dan ruang, tetapi juga mengembangkan studinya pada analisis aljabar. Studi trigonometri pada analisis aljabar sangat diperlukan untuk mempermudah analisis sifat-sifat geometrinya juga.

Abraham de Moivre dikenal dengan salah satu rumusnya yang menghubungkan sifat bilangan kompleks dengan fungsi trigonometri. Persamaan tersebut yang saat ini dikenal sebagai rumus de Moivre secara umum berbentuk

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Bentuk bilangan kompleks berpangkat n akan dapat dengan mudah dijabarkan dengan mengalikan setiap elemen untuk n yang kecil, sementara untuk n yang besar tentu akan menghabiskan banyak waktu.

Namun, apabila bilangan kompleks pada rumus de Moivre tersebut diperhatikan lebih seksama, bentuk tersebut mengingatkan pada bentuk $(a+b)^n$ dengan $a = \cos\varphi$ dan $b = i\sin\varphi$. Bentuk ini dapat dijabarkan dengan mudah dengan memanfaatkan koefisien binomial untuk menentukan koefisien tiap-tiap elemen $a^k b^{n-k}$ dimana $n < k$.

Dengan menggabungkan setiap sifat yang ada, dapat diperoleh bentuk yang lebih umum yang menyatakan $\cos n\varphi$ dan $\sin n\varphi$ secara terpisah dengan menggunakan penjabaran rumus de Moivre yang dipermudah dengan menggunakan sifat koefisien binomial.

2. KOEFISIEN BINOMIAL

2.1. Bilangan kombinatorial

Bilangan C_r^n dapat diartikan sebagai bilangan yang menyatakan banyaknya cara mengambil r unsur dari n unsur. Dengan menggunakan definisinya akan dibentuk persamaan baru.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$
$$= \frac{(n-1)!\,n}{r!\,(n-r)!}$$
$$= \frac{(n-1)!\,(n-r)}{r!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!\,r}{r!\,(n-r)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1)!}$$
$$= C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$$

Dari hasil akhirnya kita peroleh bahwa untuk setiap bilangan asli *n* dan *r* ≤ *n* berlaku

$$C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} \qquad (1)$$

2.2. Koefisien Binomial

Bilangan C_r^n muncul dalam uraian binomial, yaitu untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ berlaku

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 + \cdots + C_{n-1}^n a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(a+b)^n = \textstyle\sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r \qquad (2)$$

Persamaan (2) dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

Untuk $n = 1$

$$(a+b)^0 = C_0^0 a^0 b^0 = 1$$

Asumsikan benar untuk $n = k$, yaitu

$$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r$$

Akan dibuktikan untuk $n = k+1$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$
$$= (a+b)\sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r$$
$$= \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^{r+1}$$
$$= C_0^k a^{k+1} + C_1^k a^k b + \cdots + C_k^k a b^k$$

$$+C_0^k a^k b + C_1^k a^{k-1} b^2 + \cdots + C_k^k b^{k+1}$$

Dengan menjumlahkan suku sejenis diperoleh

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} = C_0^k a^{k+1} &+ (C_1^k + C_0^k) a^k b \\ &+ (C_2^k + C_1^k) a^{k-1} b^2 + \cdots \\ &+ \left(C_k^k + C_{k-1}^k\right) a b^k + C_k^k b^{k+1}\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (1), maka bentuk terakhir dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= C_0^{k+1} a^{k+1} + C_1^{k+1} a^k b + C_2^{k+1} a^k b^2 \\ &\quad + \cdots + C_k^{k+1} a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} C_r^{k+1} a^{k+1-r} b^r\end{aligned}$$

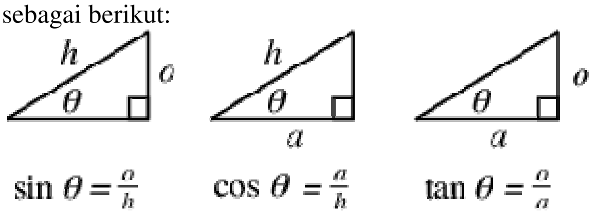
Jadi telah terbukti untuk. Berdasarkan induksi matematika telah dibuktikan persamaan (2) benar.

3. TRIGONOMETRI

2.1. Identitas Trigonometri

Studi yang membahas sudut dan relasi angular pada bidang dan bentuk tiga dimensi dikenal sebagai trigonometri. Fungsi trigonometri (juga dikenal sebagai fungsi sirkular) terdiri dari *cosecan* ($\csc x$), *cosinus* ($\cos x$), *cotangen* ($\cot x$), *secan* ($\sec x$), *sinus* ($\sin x$), dan *tangen* ($\tan x$). Inverse dari fungsi-fungsi tersebut secara berturut-turut dinotasikan $\csc^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ dan $\tan^{-1} x$. Perlu diperhatikan penotasian tersebut bermakna inverse dari fungsi aslinya bukan pangkat -1 dari fungsi aslinya.

Secara umum fungsi trigonometri dari *cosinus* ($\cos x$), *sinus* ($\sin x$), dan *tangen* ($\tan x$) dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Fungsi-fungsi trigonometri memiliki berbagai persamaan atau biasa disebut memiliki berbagai identitas trigonometri. Identitas trigonometri dapat diturunkan dari rumus-rumus dan sifat geometri bidang maupun bentuk tiga dimensi. Selain itu identitas trigonometri dapat diturunkan melalui identitas trigonometri yang lain.

Identitas trigonometri yang diturunkan melalui rumus-rumus dan sifat geometri bidang maupun bentuk tiga dimensi diantaranya:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (5)$$

Sedangkan identitas trigonometri yang diturunkan melalui identitas trigonometri lainnya misalnya:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha\mp\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

3.2 Rumus de Moivre

Rumus de Moivre diambil dari nama **Abraham de Moivre** yang menyatakan untuk setiap bilangan kompleks (lebih khusus untuk setiap bilangan real) *x*, dan setiap bilangan integer *n*, berlaku:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (6)$$

Rumus ini dapat dengan mudah diturunkan dengan menggunakan rumus Euler,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

dan berdasarkan hukum eksponensial, berlaku,

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$$

kemudian dengan menggunakan rumus euler,

$$e^{in\varphi} = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Rumus de Moivre dapat juga dibuktikan dengan induksi matematika.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan mengacu pada metode 3.1 atau 3.2 dapat dibentuk sebuah identitas trigonometri baru. Makalah ini akan menggunakan persamaaan-persamaaan yang digunakan pada metode tersebut untuk menentukan $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$, $\cos 5\varphi$, dan $\sin 5\varphi$ serta membandingkan kedua hasil yang diperoleh dari kedua metode tersebut.

4.1. $\cos 2\varphi$ dan $\sin 2\varphi$

Dengan menggunakan persamaan (4) dan (5) dengan mudah diperoleh,

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi &= \cos\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\varphi \\ &= (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi &= \sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi \\ &= 2\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

Sementara, dengan menggunakan (6) diperoleh,

$$\begin{aligned}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 \\ &= C_0^2(\cos\varphi)^2 + C_1^2(\cos\varphi)(i\sin\varphi) \\ &\quad + C_2^2(i\sin\varphi)^2 \\ &= (\cos\varphi)^2 + 2(\cos\varphi)(i\sin\varphi) + (i\sin\varphi)^2 \\ &= ((\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2) + i(2\cos\varphi\sin\varphi)\end{aligned}$$

Dengan memisahkan komponen imajiner dengan komponen real diperoleh,

$$\cos 2\varphi = (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2$$

$$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$$

Dapat diperlihatkan bahwa kedua metode menghasilkan nilai yang sama yaitu,

$$\cos 2\varphi = (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2 \tag{7}$$

$$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi \tag{8}$$

4.2. $\cos 3\varphi$ dan $\sin 3\varphi$

Dengan menggunakan persamaan (4) dan (5) serta hasil yang diperoleh pada persamaan (7) dan (8) dengan mudah diperoleh,

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi \\ &= ((\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2)\cos\varphi \\ &\qquad - (2\cos\varphi\sin\varphi)\sin\varphi \\ &= (\cos\varphi)^3 - 3(\cos\varphi)(\sin\varphi)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\varphi &= \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi \\ &= (2\cos\varphi\sin\varphi)\cos\varphi \\ &\qquad + ((\cos\varphi)^2 \\ &\qquad - (\sin\varphi)^2)\sin\varphi \\ &= 3(\cos\varphi)^2(\sin\varphi) - (\sin\varphi)^3\end{aligned}$$

Sementara, dengan menggunakan (6) diperoleh,

$$\begin{aligned}(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \\ &= C_0^3(\cos\varphi)^3 + C_1^3(\cos\varphi)^2(i\sin\varphi) \\ &\quad + C_2^3(\cos\varphi)(i\sin\varphi)^2 + C_3^3(i\sin\varphi)^3 \\ &= (\cos\varphi)^3 + 3(\cos\varphi)^2(i\sin\varphi) \\ &\quad + 3(\cos\varphi)(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3 \\ &= ((\cos\varphi)^3 - 3(\cos\varphi)(\sin\varphi)^2) \\ &\quad + i(3(\cos\varphi)^2(\sin\varphi) - (\sin\varphi)^3)\end{aligned}$$

Dengan memisahkan komponen imajiner dengan komponen real diperoleh,

$$\cos 3\varphi = (\cos\varphi)^3 - 3(\cos\varphi)(\sin\varphi)^2$$

$$\sin 3\varphi = 3(\cos\varphi)^2(\sin\varphi) - (\sin\varphi)^3$$

Dapat diperlihatkan bahwa kedua metode menghasilkan nilai yang sama yaitu,

$$\cos 3\varphi = (\cos\varphi)^3 - 3(\cos\varphi)(\sin\varphi)^2 \tag{9}$$

$$\sin 3\varphi = 3(\cos\varphi)^2(\sin\varphi) - (\sin\varphi)^3 \tag{10}$$

4.3. $\cos 5\varphi$ dan $\sin 5\varphi$

Dengan menggunakan persamaan (4) dan (5) serta hasil yang diperoleh pada persamaan (7), (8), (9), dan (10) dengan mudah diperoleh,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos 3\varphi\cos 2\varphi - \sin 3\varphi\sin 2\varphi \\ &= ((\cos\varphi)^3 - 3(\cos\varphi)(\sin\varphi)^2)((\cos\varphi)^2 \\ &\qquad - (\sin\varphi)^2) \\ &\qquad - (3(\cos\varphi)^2(\sin\varphi) \\ &\qquad - (\sin\varphi)^3)(2\cos\varphi\sin\varphi) \\ &= (\cos\varphi)^5 - 10(\cos\varphi)^3(\sin\varphi)^2 \\ &\qquad + 5(\cos\varphi)(\sin\varphi)^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 5\varphi &= \sin 3\varphi\cos 2\varphi + \cos 3\varphi\sin 2\varphi \\ &= (3(\cos\varphi)^2(\sin\varphi) - (\sin\varphi)^3)((\cos\varphi)^2 \\ &\quad - (\sin\varphi)^2) \\ &\quad + ((\cos\varphi)^3 \\ &\quad - 3(\cos\varphi)(\sin\varphi)^2)(2\cos\varphi\sin\varphi) \\ &= 5(\cos\varphi)^4(\sin\varphi) - 10(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^3 \\ &\quad + (\sin\varphi)^5\end{aligned}$$

Sementara, dengan menggunakan (6) diperoleh,

$$\begin{aligned}(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 \\ &= C_0^5(\cos\varphi)^5 + C_1^5(\cos\varphi)^4(i\sin\varphi) + \cdots \\ &\qquad + C_4^5(\cos\varphi)(i\sin\varphi)^4 \\ &\qquad + C_5^5(i\sin\varphi)^5 \\ &= (\cos\varphi)^5 + 5(\cos\varphi)^4(i\sin\varphi) + \cdots \\ &\qquad + 5(\cos\varphi)(i\sin\varphi)^4 \\ &\qquad + (i\sin\varphi)^5 \\ &= ((\cos\varphi)^5 - 10(\cos\varphi)^3(\sin\varphi)^2 \\ &\qquad + 5(\cos\varphi)(\sin\varphi)^4) \\ &\qquad + i(5(\cos\varphi)^4(\sin\varphi) \\ &\qquad - 10(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^3 \\ &\qquad + (\sin\varphi)^5)\end{aligned}$$

Dengan memisahkan komponen imajiner dengan komponen real diperoleh,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= (\cos\varphi)^5 - 10(\cos\varphi)^3(\sin\varphi)^2 \\ &\qquad + 5(\cos\varphi)(\sin\varphi)^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 5\varphi &= 5(\cos\varphi)^4(\sin\varphi) - 10(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^3 \\ &\qquad + (\sin\varphi)^5\end{aligned}$$

Dapat diperlihatkan bahwa kedua metode menghasilkan nilai yang sama yaitu,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= (\cos\varphi)^5 - 10(\cos\varphi)^3(\sin\varphi)^2 \\ &\qquad + 5(\cos\varphi)(\sin\varphi)^4\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\sin 5\varphi &= 5(\cos\varphi)^4(\sin\varphi) - 10(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^3 \\ &\qquad + (\sin\varphi)^5\end{aligned} \tag{12}$$

4.4. Bentuk umum

Dengan memperhatikan hasil yang diperoleh dari persamaan (7), (8), (9), (10), (11), dan (12) serta dengan tidak lupa memperhatikan sifat-sifat koefisien binomial bentuk $\cos n\varphi$ dan $\sin n\varphi$ dapat kita genarilsasikan menjadi:

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{n/2} C_{2k}^n(-1)^k(\cos\varphi)^{n-2k}(\sin\varphi)^{2k}$$

(13)

$$\sin n\varphi = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_{2k+1}^{n}(-1)^k(\cos\varphi)^{n-2k-1}(\sin\varphi)^{2k+1}$$

(14)

5. KESIMPULAN

Rumus de Moivre telah mempermudah analisis sifat-sifat fungsi trigonometri baik secara aljabar maupun geometri. Rumus yang menghubungkan fungsi trigonometri tersebut dengan bilangan kompleks akan lebih mudah dijabarkan dengan menggunakan sifat-sifat koefisien binomial.

DAFTAR REFERENSI

[1] Wono Setia Budhi, "Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika", Ricardo, 2003.

[2] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/de_Moivre

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/De_Moivre's_formula