

Kuis ke-2 IF2091 Struktur Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika dan Teori Bilangan
Dosen: Rinaldi Munir & Harlili
Rabu, 15 Oktober 2008
Waktu: 55 menit

1. Untuk tiap $n \geq 3$, jumlah sudut dalam sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n - 2)^\circ$. Buktikan pernyataan ini dengan induksi matematik. (25)

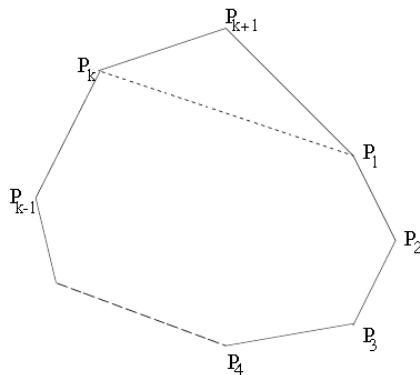
Penyelesaian:

• **Basis**

Untuk nilai $n = 3$, poligon akan berbentuk segitiga dengan jumlah sudut dalamnya 180° jumlah sisi sebanyak 3 maka $180(3 - 2)^\circ$. Terbukti

• **Induksi**

Asumsikan hipotesis jumlah sudut dalam poligon dengan k sisi yaitu $180(k - 2)^\circ$ adalah benar. Kita ingin membuktikan jumlah sudut poligon yang memiliki $k+1$ sisi yaitu $180(k - 1)^\circ$



Pada gambar diatas dapat ditunjukan terdapat dua bagian yaitu segitiga ($P_1 P_k P_{k+1}$) dan poligon dengan k sisi

Jumlah sudut dalam poligon k sisi menurut asumsi yaitu $180(k - 2)^\circ$ dan jumlah sudut dalam untuk segitiga yaitu 180° .

Jadi jumlah sudut dalam dari poligon dengan $k + 1$ sisi yaitu $180(k - 2)^\circ + 180^\circ = 180(k - 1)^\circ$.
Terbukti.

• **Konklusi**

Sesuai dengan induksi matematika, benar bahwa Untuk tiap $n \geq 3$, jumlah sudut dalam dari sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n - 2)^\circ$.

2. Sebuah buku terbitan September 2008 memiliki ISBN 9X7-2309-97. Tentukan nilai X dan karakter uji dari nomor ISBN tersebut jika diketahui $3X \equiv 2 \pmod{5}$. (25)

Penyelesaian:

$$3X \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow X = \frac{2+5k}{3}, \text{ untuk } k \text{ sebarang bilangan bulat}$$

Untuk nilai $k =$

$$1 \rightarrow X = 2/3$$

$$2 \rightarrow X = 4$$

$$3 \rightarrow X = 17/3$$

$$4 \rightarrow X = 22/3$$

$$5 \rightarrow X = 9$$

$$6 \rightarrow X = 32/3$$

$$7 \rightarrow X = 37/3$$

$$8 \rightarrow X = 14$$

...dst

Dapat dilihat di atas, untuk $k = 2, 5, 8, \dots$ nilai X bulat, namun untuk kode ISBN di atas, nilai X haruslah dalam rentang bilangan bulat 0-9, jadi nilai X yang memenuhi adalah **4** dan **9**.

Untuk mencari karakter uji, diketahui

$$\sum_{i=1}^9 ix_i \text{ mod } 11 = \text{karakter uji}$$

Maka nilai karakter uji untuk :

1. kode ISBN **947**-2309-97 dapat dicari sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^9 ix_i = 1(9) + 2(4) + 3(7) + 4(2) + 5(3) + 6(0) + 7(9) + 8(9) + 9(7) = 259$$

Jadi karakter uji untuk ISBN di atas = $259 \text{ mod } 11 = \mathbf{6}$

2. kode ISBN **997**-2309-97 dapat dicari sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^9 ix_i = 1(9) + 2(9) + 3(7) + 4(2) + 5(3) + 6(0) + 7(9) + 8(9) + 9(7) = 269$$

Jadi karakter uji untuk ISBN di atas = $269 \text{ mod } 11 = \mathbf{5}$

3. Tentukan x dan y bilangan bulat yang memenuhi persamaan $312x + 70y = 2$, lalu hitunglah nilai dari : $y \text{ mod } x$. (Petunjuk: gunakan algoritma Euclidean) (25)

Penyelesaian:

Dengan menggunakan algoritma Euclid, ditemukan bahwa :

$$312 = 4.70 + 32 \quad (\text{i})$$

$$70 = 2.32 + 6 \quad (\text{ii})$$

$$32 = 5.6 + 2 \quad (\text{iii})$$

$$6 = 3.2 + 0 \quad (\text{iv})$$

Persamaan (iii) dapat dituliskan menjadi :

$$2 = 32 - 5.6 \quad (\text{v})$$

Persamaan (ii) dapat dituliskan menjadi :

$$6 = 70 - 2.32 \quad (\text{vi})$$

Sulihkan persamaan (vi) ke persamaan (v) :

$$2 = 32 - 5.(70 - 2.32)$$

$$2 = 32 - 5.70 + 10.32$$

$$2 = 11.32 - 5.70 \quad (\text{vii})$$

Persamaan (i) dapat dituliskan menjadi :

$$32 = 312 - 4.70 \quad (\text{viii})$$

Sulihkan persamaan (viii) ke persamaan (vii) :

$$2 = 11.(312 - 4.70) - 5.70$$

$$2 = 11.312 - 44.70 - 5.70$$

$$2 = 11.312 - 49.70 \quad (\text{ix})$$

Dari persamaan (ix) diketahui x dan y yang memenuhi adalah $x = 11$ dan $y = -49$, sehingga :
 $y \bmod x = -49 \bmod 11 = 6$

4. Tentukan bilangan bulat yang jika dibagi 3 menyisakan 2, dibagi 4 menyisakan 3, dan dibagi 5 menyisakan 4. (25)

Penyelesaian:

Misalkan bilangan tersebut adalah x, maka

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

Atau ekuivalen dengan,

$$x = 2 + 3k_1$$

$$x = 3 + 4k_2$$

$$x = 4 + 5k_3$$

$$2 + 3k_1 = 3 + 4k_2$$

$$k_1 = \frac{1 + 4k_2}{3}, \text{ dengan mengisi } k_2 \text{ dengan 2 didapatkan}$$

$$k_1 = 3 + 4k_2$$

$$x = 2 + 3k_1 = 2 + 3(3 + 4k_2) = 2 + 9 + 12k_2 = 11 + 12k_2$$

$$11 + 12k_2 = 4 + 5k_3$$

$$k_3 = \frac{5k_3 - 7}{2}, \text{ dengan mengisi } k_3 \text{ dengan 3 didapatkan}$$

$$k_2 = 5k_3 + 4$$

$$x = 11 + 12k_2 = 11 + 12(5k_3 + 4) = 11 + 60k_3 + 48 = 59 + 60k_3$$

Maka, bilangan tersebut harus memenuhi $x \equiv 59 \pmod{60}$