FENOMENA KONJEKTUR GOLDBACH DALAM DUNIA MATEMATIKA DISKRIT DAN PERKEMBANGANNYA

Alvin Susanto
Jurusan Teknik Informatika ITB, Bandung, email: alvin_punya@hotmail.co.id

Abstract – *Makalah ini membahas mengenai salah satu persoalan yang terkenal dalam dunia matematika diskrit, yaitu konjektur dari Christian Goldbach. Konjektur ini terkaji dalam salah satu bagian penting dari matematika diskrit, yaitu mengenai teori bilangan. Konjektur Goldbach terbagi atas dua bagian, yaitu konjektur lemah Goldbach dan konjektur kuat Goldbach. Konjektur kuat Goldbach menyatakan bahwa setiap bilangan genap > 2, selalu merupakan hasil penjumlahan dari 2 buah bilangan prima. Sedangkan konjektur lemah Goldbach berbunyi setiap bilangan ganjil > 6 merupakan hasil penjumlahan dari 3 buah bilangan prima. Hingga sekarang belum ada orang yang dapat memastikan kebenaran atupun kesalahan dari konjektur ini. Dalam makalah ini, segala aspek mulai dari biografi Christian Goldbach, sejarah bagaimana lahirnya konjektur ini, perkembangan, hingga beberapa solusi pembuktian yang pernah diajukan beberapa orang terhadap konjektur ini, akan dibahas secara mendalam.*

Kata kunci : *konjektur Goldbach, Euler, konjektur kuat Goldbach, konjektur lemah Goldbach*

1. PENDAHULUAN

Konjektur Goldbach adalah salah satu persoalan terbesar yang terdapat di dalam dunia matematika, terutama matematika diskrit yang membahas mengenai teori bilangan bulat. Walaupun konjektur ini sangat sederhana, akan tetapi untuk membuktikan kebenarannya sangatlah sulit. Bahkan, ada yang menyatakan bahwa konjektur ini merupakan teka-teki terbesar dalam dunia matematika. Saking sulitnya konjektur ini dibuktikan, sebuah perusahaan Faber & Faber membuat pembuktian konjektur ini menjadi sebuah sayembara dengan nilai hadiah satu juta dolar Amerika, yang hingga saat ini belum ada yang memenangkannya. Walaupun di dalam kehidupan sehari-hari tidak ada pengaplikasian konjektur ini secara nyata, tetap saja masalah ini merupakan masalah yang menarik untuk dipecahkan, terutama oleh para matematikawan. Dari tahun ke tahun, semakin banyak para ahli matematika dunia yang berupaya untuk membuktikan kebenaran ataupun kesalahan daripada konjektur ini. Sekarang ini sudah ada puluhan, bahkan ratusan solusi berbeda yang ditawarkan oleh para matematikawan tersebut. Meskipun demikian, tetap saja, konjektur ini masih belum bisa dibuktikan kebenarannya. Hal itulah yang menarik hati penulis untuk menyusun makalah ini. Semoga saja melalui makalah ini pembaca dapat menambah wawasan di dunia matematika sekaligus mengenal sosok di balik misteri matematika tidak terpecahkan ini.

2. SEJARAH

Bab ini akan secara khusus membahas mengenai kehidupan Christian Goldbach secara lengkap dan bagaimana lahirnya konjektur Goldbach.

2.1. Biografi Christian Goldbach

Christian Goldbach adalah salah seorang dari matematikawan yang terkenal pada akhir abad 17. Goldbach lahir pada 18 Maret 1690 di Konigsberg, Prussia. Tempat ini terkenal akan masalah jembatannya yang berhasil dipecahkan oleh matematikawan asal Swiss, yaitu Leonhard Euler. Tempat ini sekarang dikenal dengan nama Kaliningrad dan terletak di wilayah negara Rusia. Goldbach meninggal pada 20 November 1764 di Moskow, Rusia. Dia meninggal pada saat berusia 74 tahun. Goldbach dibesarkan di kota kelahirannya dan masuk sebuah universitas di sana. Di universitas tersebut, Goldbach mengambil ilmu obat-obatan dan hukum. Selain itu, dia tercatat sebagai seorang profesor matematika di St. Petersburg. Pada tahun 1710, Goldbach mulai berkeliling Eropa untuk bertemu para ilmuwan lainnya. Pada tahun 1711 bertemu dengan Leibniz di kota Leipzig. Tercatat ditemukan total 11 surat yang mereka gunakan sebagai media komunikasi antara tahun 1711 – 1713. Pada tahun 1712 Goldbach juga sempat bertemu dengan de Moivre dan Nicolaus Bernoulli di Inggris. Bernoulli merupakan orang yang berhasil membuat Goldbach tertarik pada dunia matematika. Pada tahun 1721, Goldbach bertemu dengan Bernoulli untuk kedua kalina di Venice, dan Goldbach juga bekerjasama dengan saudara dari Nicolaus Bernoulli, yaitu Daniel Bernoulli pada tahun 1723. Di tahun 1724, Goldbach kembali ke kampung halamannya dan bertemu dengan 2 orang penting dalam hidupnya, yaitu Jakob Hermann dan Georg Benhard Bilfinger. Pada tahun 1729, Goldbach bertemu dengan Euler, dan mereka bekerjasama selama 35 tahun dalam dunia matematika. Pada saat kerjasama dengan Euler inilah lahir konjektur Goldbach. Selain itu

Goldbach juga berjasa dalam bidang matematika lainnya, seperti penjumlahan tidak terbatas, teori kurva, dan teori persamaan.

Gambar 1. Christian Goldbach

2.2. Lahirnya Konjektur Goldbach

Pada tahun 1742, Goldbach menemukan persoalan yang menarik dalam dunia matematika. Dia menemukan bahwa setiap bilangan ganjil > 2 adalah hasil penjumlahan dari 3 buah bilangan prima. Pada saat itu ia beranggapan bahwa 1 merupakan sebuah bilangan prima. Lalu ia pun mengirim surat yang menunjukkan penemuannya tersebut kepada Euler. Setelah membaca surat tersebut, Euler memberikan catatan bahwa konjektur tersebut dapat diperkuat menjadi setiap bilangan genap > 2 merupakan hasil penjumlahan dari 2 buah bilangan prima. Inilah yang akhirnya disebut konjektur kuat Goldbach (disebut juga konjektur genap Goldbach atau *binary Goldbach conjecture*). Selain itu, Goldbach juga mengeluarkan sebuah konjektur lain, yakni setiap bilangan ganjil > 6 merupakan hasil penjumlahan dari 3 buah bilangan prima. Konjektur ini kemudian dikenal dengan konjektur lemah Goldbach (disebut juga konjektur ganjil Goldbach atau *ternary Goldbach conjecture*).
Meskipun demikian, sebelum Goldbach dan Euler mengemukakan konjekturnya yang terkenal , seorang matematikawan asal Prancis, yaitu Rene Descartes, telah lebih dahulu menemukan persoalan ini. Akan tetapi, konjektur tersebut tetap dinamai konjektur Goldbach tanpa alasan yang kuat.

Berikut adalah contoh - contoh nyata dari konjektur kuat Goldbach:

Bilangan n	Bilangan prima pertama	Bilangan prima kedua
30	17	13
4	2	2
16	11	5
24	13	11

Tabel 1. Contoh konjektur kuat Goldbach

Sedangkan tabel di bawah ini adalah contoh nyata dari konjektur lemah Goldbach :

Bilangan n	Bilangan prima 1	Bilangan prima 2	Bilangan prima 3
7	3	2	2
13	3	3	6
21	3	7	11
27	3	11	13

Tabel 2. Contoh konjektur lemah Goldbach

Perlu diingat bahwa bilangan Goldbach yang besar memiliki lebih dari 1 pasangan bilangan prima yang membentuknya. Misalnya bilangan 30 seperti pada contoh tabel di atas. Selain dapat direpresentasikan sebagai 17 + 13, bilangan tersebut juga dapat direpresentasikan sebagai 23 + 7 dan 19 + 11. Dengan demikian, bisa dikatakan bahwa 30 terdiri atas 3 *pairs*.

3. KONJEKTUR GOLDBACH

Walaupun konjektur Goldbach bisa dianggap benar, tetap saja tidak ada bukti yang bisa menyatakan kebenaran dari konjektur tersebut. Karena itu banyak matematikawan yang berusaha untuk membuktikan bahwa konjektur tersebut salah, dengan cara mencari bilangan yang tidak memenuhi konjektur tersebut. Akan tetapi banyak pula matematikawan yang berusaha untuk membuktikan bahwa konjektur tersebut benar. Seiring perkembangan teknologi komputer, jumlah bilangan Goldbach pun meningkat secara pesat. Tercatat pada tahun 1998, batas bilangan Goldbach sudah mencapai 10^{18}. Tentunya ini merupakan sebuah angka yang luar biasa besar. Walaupun begitu,, tetap saja masih belum ditemukan sebuah bilangan pun yang tidak mengikuti konjektur Goldbach. Berikut adalah tabel yang berisikan data perkembangan bilangan Goldbach yang telah berhasil dibuktikan kebenarannya.

Penghitung	**Tahun**	**Batas**
Desboves	1885	10000
N. Pipping	1940	100000
M.K. Shen	1964	3.3×10^{7}
Stein dan Stein	1965	10^{8}
A. Granville, dkk	1989	2×10^{10}
M. Sinisalo	1993	4×10^{11}
Deshouillers, dkk	1998	10^{14}
Richstein	2001	4×10^{14}
T. Oliveira e Silva	2007	10^{18}

Tabel 3. Data perkembangan bilangan Goldbach

3.1. Perkembangan Konjektur Goldbach

Seperti telah dibahas pada bab sebelumnya, konjektur Goldbach terbagi atas 2, yaitu konjektur ang lemah dan yang kuat. Walaupun bisa dikatakan benar, konjektur ini sangat sulit untuk dibuktikan kebenarannya. Bahkan, Euler sempat menyebut konjektur ini "*ein ganz gewisses Theorema*", karena ia sendiri sebagai ahli matematika tidak dapat membuktikan kebenaran dari teori ini. Hingga sekarang, masalah konjektur ini masih belum terselesaikan, walaupun beberapa orang menatakan bahwa konjektur lemah Goldbach sudah hampir terpecahkan.

Kebenaran konjektur Goldbach dapat dibuktikan dengan mudah bila bilangan yang digunakan bersifat puluhan dan ratusan. Namun pertanyaannya adalah bagaimana bila bilangan yang dicari kebenarannya bersifat jutaan atau bahkan trilyunan? Masalah itu berhasil dipecahkan oleh Hardy dan Littlewood pada tahun 1923 dengan menggunakan bukti asimtotik. Hardy dan Littlewood membuktikan bahwa ada bilangan x sehingga setiap bilangan $y > x$ merupakan jumlah dari 3 buah bilangan prima. Penemuan mereka ini dikenal dengan nama *Hardy-Littlewood prime tuple conjecture.*

Pada 1930, Lev Schnirelmann membuktikan setiap bilangan genap > 2 dapat ditulis sebagai hasil penjumlahan dari 300000 bilangan prima. Akan tetapi, Olivier Ramaré berhasil memperbaiki teori tersebut pada tahun 1995 dengan menunjukkan bahwa bilangan genap > 2 merupakan hasil penjumlahan dari maksimum 6 buah bilangan prima.

Pada tahun 1937 seorang matematikawan Rusia bernama Vingradov berhasil membuktikan kebenaran konjektur Goldbach untuk bilangan ganjil yang lebih besar lagi dengan menggunakan metode analitis, yang menghasilkan suatu asimtotik yang dikenal dengan *extended Goldbach conjecture.*

Pada tahun 1966, seorang matematikawan China, Chen Jing-Run berhasil membuktikan bahwa setiap bilangan genap yang sangat besar dapat diekspresikan sebagai jumlah dari sebuah bilangan prima dan sebuah bilangan dengan tidak lebih dari dua faktor prima. Teori Chen Jing-Run ini dipublikasikan pada tahun 1973 dengan nama *sieve theor.* Contohnya adalah $100 = 23 + 77$. Faktor prima dari 77 adalah 7 dan 11.

Kita juga dapat membuktikan konjektur Goldbach dengan cara menghitung secara kasar. Pada tahun 1993, Sinisalo menggunakan 130 buah CPU IBM 3083 untuk membuktikan konjektur Goldbach. Hasilnya, ia dapat menghitung sampai bilangan 4×10^{11}. Program yang ia gunakan pada saat itu adalah QBasic. Misalkan kita ingin membuktikan bahwa bilangan genap n adalah bilangan Goldbach. Algoritmanya adalah dengan menggunakan sebuah prosedur untuk mengambil sebuah bilangan ganjil dan sebuah bilangan prima dimulai dari 3 hingga n/2. Bila p adalah bilangan prima, maka selisih dari n dan p dites keprimaannya. Bila selisihnya prima, tentunya kita akan mempunyai dua buah bilangan prima. Dari algoritma ini juga akan didapat sebuah pasangan (pair) bilangan prima terkecil dan terbesar yang membangun sebuah bilangan Goldbach.

Berikut adalah potongan program yang digunakan oleh Sanisilo dalam membuktikan kebenaran bilangan Goldbach :

```
DECLARE FUNCTION IsPrime& (p&)
DEFLNG I-Z
CLS

INPUT "enter number to test: ", n
m = 0 ' number of pairs
PRINT : PRINT n;

FOR p = 3 TO n / 2 STEP 2
IF IsPrime(p) AND IsPrime(n - p) THEN
PRINT TAB(10); "="; p; "+"; n - p
m = m + 1
END IF
NEXT

PRINT : PRINT m; "distinct representations"

FUNCTION IsPrime (p)
IF p MOD 2 = 0 THEN
IsPrime = 0
ELSE
IsPrime = 1

FOR i = 3 TO SQR(p) STEP 2
IF p MOD i = 0 THEN IsPrime = 0: EXIT FOR
NEXT
END IF
END FUNCTION
```

3.2. Contoh Pembuktian Konjektur Goldbach

Saat ini, semakin banyak ilmuwan matematika yang berusaha untuk memecahkan konjektur Goldbach. Mereka menawarkan berbagai macam solusi dengan menggunakan berbagai metode yang berbagai macam pula. Beberapa matematikawan menggunakan grafik untuk memecahkan konjektur ini. Beberapa matematikawan lainnya menggunakan perhitungan secara matematis. Penulis menemukan bahwa pembuktian dengan menggunakan hitungan matematis cenderung lebih rumit dan sulit untuk diterima oleh banyak orang secara umum. Karena itu, penulis akan membahas pembuktian dengan menggunakan perhitungan yang lebih sederhana, namun ditambah dengan bantuan grafik dan tabel. Berikut adalah contoh pembuktian bahwa konjektur kuat Goldbach benar dengan menggunakan grafik dan tabel.

Bila konjektur Goldbach benar, maka untuk setiap bilangan genap n terdapat sebuah bilangan prima p sehingga n - p juga merupakan bilangan prima. Kita gunakan nilai p mulai dari bilangan prima terkecil. Bila hasil selisihnya bukan merupakan bilangan prima, kita gunakan bilangan prima berikutnya hingga kita mendapatkan sebuah bilangan prima. Kita bisa anggap bilangan prima yang didapat tersebut adalah bilangan q. Dengan kata lain, didapat bahwa n = p + q, dimana p dan q merupakan bilangan prima. Bilangan prima terkecil atau bilangan p dalam bilangan Goldbach dapat dibuat fungsi g(n).

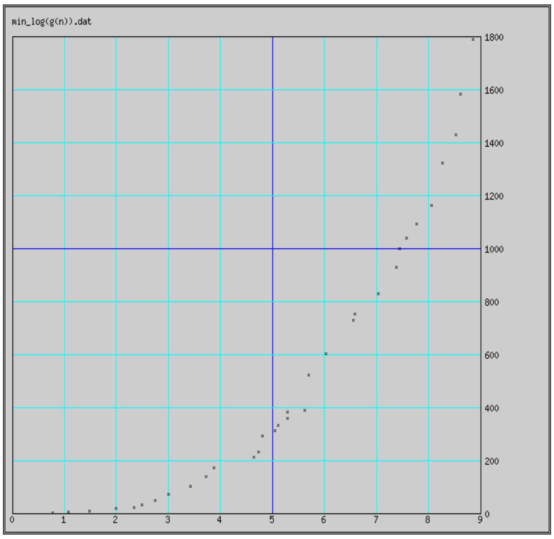
Di bawah ini adalah tabel bilangan prima minimum yang membangun suatu bilangan Goldbach atau dengan kata lain bilangan p yang direpresentasikan sebagai g(n). Misalkan bilangan yang dicari kebenarannya adalah n. Percobaan ini dipakai ketika nilai n < 1.000.000.000 dan menggunakan 586 buah CPU yang aktif terus menerus selama lebih dari 1 bulan. Kolom terakhir dari tabel menyatakan rasio dari g(n) / n. Dari tabel tersebut kita dapat melihat bahwa rasio perbandingan kolom terakhir semakin ke bawah (semakin besar bilangan n) maka nilainya juga semakin kecil.

n	g(n)	n - g(n)	g(n) / n
6	3	3	0.500000000
12	5	7	0.416666667
30	7	23	0.233333333
98	19	79	0.193877551
220	23	197	0.104545455
308	31	277	0.100649351
556	47	509	0.084532374
992	73	919	0.073588710
2642	103	2539	0.038985617
5372	139	5233	0.025874907
7426	173	7253	0.023296526
43532	211	43321	0.004847009
54244	233	54011	0.004295406
63274	293	62981	0.004630654
113672	313	113359	0.002753536
128168	331	127837	0.002582548
194428	359	194069	0.001846442
194470	383	194087	0.001969455
413572	389	413183	0.000940586
503222	523	502699	0.001039303
1077422	601	1076821	0.000557813
3526958	727	3526231	0.000206127
3807404	751	3806653	0.000197247
10759922	829	10759093	0.000077045
24106882	929	24105953	0.000038537
27789878	997	27788881	0.000035876
37998938	1039	37997899	0.000027343
60119912	1093	60118819	0.000018180
113632822	1163	113631659	0.000010235
187852862	1321	187851541	0.000007032
335070838	1427	335069411	0.000004259
419911924	1583	419910341	0.000003770
721013438	1789	721011649	0.000002481

Tabel 4. Tabel contoh hasil perhitungan bilangan Goldbach dengan menggunakan komputer

Dari tabel tersebut, kita dapat membuat sebuah grafik dimana n kita nyatakan sebagai sumbu x dan g(n) atau bilangan prima terkecil ang membangun suatu bilangan Goldbach sebagai sumbu y. Dari hasil grafik tersebut, bila kita berhasil menemukan suatu fungsi yang sesuai dengan kemunculan titik daripada grafik tersebut, maka kemungkinan besar konjektur ini berhasil dibuktikan.

Grafik yang dimaksudkan adalah sebagai berikut :

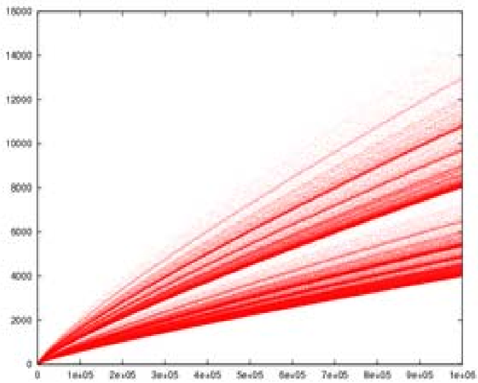


Gambar 2. Gambar grafik n terhadap g(n)

Selain itu didapat pula bahwa semakin besar bilangan Goldbach yang diperiksa kebenarannya, semakin banyak pula cara untuk membentuk bilangan tersebut. Sebagai contoh, 12 = 5 + 7. Bilangan yang lebih besar seperti 24, bisa merupakan representasi dari 5 + 19, 7 + 17, dan 11 + 13. Hal ini telah dibahas pada bab sebelumnya dimana kita menyatakan pasangan – pasangan bilangan itu sebagai pairs. Kumpulan pairs ini dapat disusun juga menjadi sebuah grafik yang dikenal dengan nama "Goldbach comet". Sebaliknya daripada gambar dari garfik 1, bila ditemukan suatu garis lurus sejajar sumbu y tanpa satu titik pun yang melewatinya, maka konjektur tersebut dikatakan gagal.

Number	Number of Pairs
10	2
100	6
500	13
10000	127

Tabel 4. Data dari jumlah pair dari bilangan Goldbach



Gambar 3. Grafik "Goldbach comet"

Dari grafik di atas, sumbu x merepresentasikan bilangan n yang hendak dicari kebenarannya, sedangkan sumbu y merepresentasikan jumlah cara untuk membentuk bilangan Goldbach n tersebut.

3.3. Algoritma Pembuktian Bilangan Goldbach

Berikut adalah algoritma dalam bentuk pseudo-code dari contoh pembuktian yang telah penulis lampirkan pada upabab sebelumnya :

Function Goldbach (tabel prima, int n) → boolean
*/*mengembalikan true bila bilangan genap n adalah bilangan Goldbach*/*
Boolean benar ← false
Int x = 1
/*counter bilangan pada tabel bilangan prima*/
Input (n)
While (n – prima[x] != bilangan prima)
    x ← x + 1
/*akhir while*/
If (n – prima[x] = bilangan prima)
  then benar ← true
/*akhir if*/
→ benar

Walaupun algoritma di atas secara umum benar, algoritma tersebut memiliki beberapa kelemahan yang mendasar. Yang pertama adalah bahwa hingga saat ini belum ada algoritma untuk mencari kemunculan bilangan prima, sehingga tabel prima tersebut harus kita assign secara manual dan diperlukan suatu update untuk menambah bilangan prima yang baru bila bilangan prima maksimum sudah tidak dapat dipakai. Kelemahan yang kedua tentu saja bahwa semakin banyak bilangan prima yang dimasukkan ke dalam tabel, maka pengeksekusian algoritma tersebut akan semakin berat. Walaupun begitu, peningkatan jumlah bilangan prima juga diikuti oleh peningkatan nilai bilangan n secara signifikan. Kita bisa lihat pada tabel sebelumnya bahwa bilangan prima minimum dari 6 adalah 3. Sedangkan bilangan prima minimum bilangan sebesar 700 juta adalah sekitar 1700 – 1800. Jelaslah perbedaan tersebut sangat besar.

4. KESIMPULAN

Walaupun sederhana, ternyata konjektur Goldbach sangat sulit untuk dibuktikan kebenarannya. Banyak alternatif solusi yang ditawarkan oleh para matematikawan di seluruh dunia untuk memecahkan konjektur ini. Walaupun begitu, masih belum ada matematikawan yang secara pasti dapat membuktikan konjektur ini benar atau salah. Saat ini bilangan Goldbach telah mencapai angka 10^{18} berkat kemajuan teknologi komputer. Dari perhitungan juga ditemukan fakta bahwa semakin besar bilangan Goldbach, maka jumlah pasangan bilangan prima yang menyusunnya juga semakin banyak dan bilangan prima terkecil yang menyusun bilangan Goldbach tersebut semakin besar pula.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Makalah ini tentunya tidak dapat terselesaikan dengan baik tanpa bantuan dari pihak – pihak yang baik secara langsung maupun tidak langsung telah membantu pihak penulis. Oleh karena itu, penulis secara khusus ingin memberikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak Rinaldi Munir selaku dosen mata kuliah Matematika Diskrit ITB
2. Pihak keluarga yang secara aktif mendukung diselesaikannya makalah ini
3. Para rekan mahasiswa yang telah memberikan banyak masukan dalam penyusunan makalah ini.

DAFTAR REFERENSI

[1]http://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach's_conjecture

[2]http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html

[3] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Goldbach.html

[4] Herkommer, Mark. "Goldbach Conjecture". 2004. e-book version (pdf)

Semuanya diakses pada tanggal 23 Desember 2007 pukul 14.00 – 15.00.