

Penerapan Pewarnaan Graf untuk Mencari Keunikan Solusi Sudoku

Andi Setiawan

Jurusan Teknik Informatika ITB, Bandung 40116, email: andise@students.its.ac.id

Abstract – Makalah ini membahas tentang pewarnaan graf dan penerapannya pada permainan sudoku. Permainan sudoku adalah permainan yang sangat terkenal di dunia pada awal abad ke-21. Beberapa pertanyaan yang mungkin muncul pada saat setiap orang mencoba memecahkan permasalahan sudoku yaitu, apakah sudoku yang mereka kerjakan memiliki solusi dan apakah solusinya hanya satu (unik). Jawaban pertanyaan-pertanyaan ini dapat dicari dengan menggunakan teknik pewarnaan graf. Dalam hal ini, pewarnaan graf yang digunakan adalah pewarnaan simpul. Pewarnaan simpul adalah teknik mewarnai simpul – simpul pada graf sehingga tidak ada simpul – simpul yang bertetangga, yaitu terhubung langsung dengan minimal sebuah sisi, memiliki warna yang sama. Dengan menggunakan cara ini, ada atau tidaknya suatu solusi sudoku dan keunikan dari solusi suatu permasalahan sudoku dapat diselidiki.

Kata Kunci: sudoku, pewarnaan graf, solusi.

1. PENDAHULUAN

1.1. Permainan Sudoku

Nama “Sudoku” berasal dari Bahasa Jepang, "Suuji wa dokushin ni kagiru" yang berarti angka-angkanya harus tetap tunggal. Sudoku adalah sebuah permainan teka-teki yang berdasarkan logika angka. Tujuan dari permainan ini adalah mengisi angka satu sampai sembilan ke dalam jaring-jaring kotak 9×9 yang terdiri dari sembilan kotak 3×3 tanpa ada angka yang terulang yang dari suatu baris, kolom, dan kotak.

Teka-teki ini diciptakan oleh Howard Gams. Pertama kali diterbitkan di sebuah surat kabar Perancis pada 1985. Versi modern permainan ini dimulai di Indianapolis pada 1979. Kemudian menjadi terkenal kembali di Jepang pada 1986, ketika penerbit Nikoli menemukan teka-teki ini.[5]

1.2. Graf

Graf adalah salah satu pembahasan dalam matematika diskrit sudah cukup tua, namun menarik dan dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak permasalahan. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, suatu bulatan atau titik, sedangkan hubungan antar objek dinyatakan sebagai garis. Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V,E) di mana V adalah himpunan tidak kosong dari

	9				6		4	
		5	3					8
				7		2		
		1		5				3
	6				9		7	
2				8	4	1		
		3		1				
8					2	5		
	5		4					8

Gambar 1. Contoh Teka-Teki Sudoku

simpul – simpul (*vertex* atau *node*) dan E, himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan dua buah simpul pada suatu graf.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Atau

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$$

Di mana $e = (v_i, v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j . [3]

Graf memiliki banyak kegunaan. Umumnya digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan agar dapat menjadi lebih mudah. Contoh permasalahan yang dapat dimodelkan dengan menggunakan graf yaitu: penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, jaringan komunikasi, jaringan network komputer, analisis algoritma, peta, dan lain – lain. Salah satu topik yang menarik pada graf adalah masalah pewarnaan graf (*graph colouring*). Bidang ini memiliki sejarah yang sangat menarik dan teori – teorinya telah menimbulkan banyak perdebatan pada kalangan matematikawan. Terdapat tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), dan pewarnaan wilayah (*face colouring*). Pewarnaan simpul adalah dasar dari pewarnaan graf, oleh karena itu, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah dapat diubah kedalam versi pewarnaan simpul. Contohnya, pewarnaan sisi adalah pewarnaan simpul dari graf garisnya, dan pewarnaan wilayah adalah pewarnaan simpul dari planarnya atau dualnya. Dalam

pembahasan selanjutnya, makalah ini akan membahas pewarnaan simpul secara lebih mendalam.

1.3. Terminologi Dasar Graf [3]

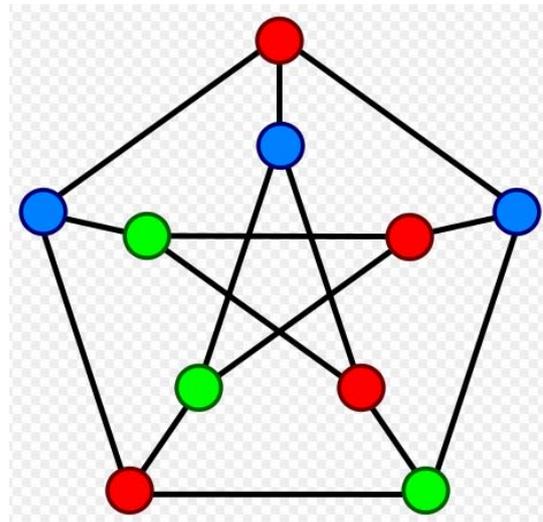
Agar dapat memudahkan memahami pewarnaan graf. Kita perlu mengenali istilah dalam graf. Dalam pembahasan teori graf, terdapat banyak sekali istilah-istilah yang perlu diketahui. Berikut ini adalah istilah penting yang ada dalam pembahasan teori graf:

- a. Bertetangga (*adjacent*)
Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.
- b. Bersisian (*incident*)
Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_i dan v_j jika $e = (v_i, v_j)$ atau e menghubungkan simpul v_i dan v_j .
- c. Derajat (*degree*)
Suatu simpul pada graf tak – berarah dikatakan berderajat n jika jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut berjumlah n . Hal ini dilambangkan dengan $d(v)$. Derajat maksimum simpul yang terdapat pada suatu graf dilambangkan dengan $B(G)$.
- d. Lintasan (*path*)
Lintasan adalah barisan berselang–seling simpul–simpul dan sisi–sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ yang menghubungkan simpul awal v_0 dan simpul tujuan v_n . Untuk graf teratur, biasanya lintasan ditulis sebagai barisan simpul–simpulnya saja, yaitu $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$
- e. Upagraf (subgraph)
Suatu graf $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan upagraf dari graf $G = (V, E)$, bila V_1 merupakan himpunan bagian dari V dan E_1 merupakan himpunan bagian dari E .
- f. Planar
Suatu graf G merupakan graf planar bila graf tersebut dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi – sisi yang tidak saling memotong (bersilangan).
- g. Upagraf merentang (Spanning Subgraph)
Upagraf $G' = (V', E')$ dari graf $G = (V, E)$ dikatakan upagraf merentang jika $V' = V$ dan G' adalah himpunan bagian dari G .

Selain mengetahui istilah-istilah dalam teori graf, jenis dan sifat dari graf juga sangat penting untuk diketahui. Namun, karena jenis dan sifat graf tersebut tidak banyak dalam pembahasan selanjutnya, maka jenis dan sifat graf tersebut tidak dibahas disini.

2. PEWARNAAN GRAF

Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada beberapa subjek pada graf. Masalah utama dalam pewarnaan simpul graf adalah bagaimana mewarnai semua simpul pada graf sehingga tidak ada simpul – simpul yang bertetangga, yaitu dihubungkan oleh minimal satu buah sisi, memiliki warna yang sama. Hal ini biasanya kemudian dikaitkan dengan penggunaan warna yang seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai semua simpul disebut bilangan kromatik dari graf G , dan disimbolkan dengan $\chi(G)$. Contoh pewarnaan graf:



Gambar. 2 Contoh Graf berwarna

Graf pada gambar 2 adalah contoh pewarnaan Simpul Graph dengan $\chi(G) = 3$

Masalah pewarnaan graf diyakini pertama kali muncul sebagai masalah pewarnaan peta, di mana warna setiap daerah pada peta yang berbatasan dibuat berlainan sehingga mudah untuk dibedakan. Hal ini kemudian mengembangkan teorema – teorema menarik dan berujung pada teorema 4 warna, yang menyatakan : “Bilangan kromatik graf planar tidak lebih dari 4.” Teorema ini pertama kali muncul sebagai suatu perkiraan oleh Francis Guthrie, seorang mantan murid dari Augustus De Morgan, pada tahun 1852 dan akhirnya dibuktikan oleh matematikawan Amerika Kenneth Appel dan Wolfgang Haken. Pembuktian teorema ini menggunakan computer dengan waktu yang melebihi 1000 jam. [4]

Masalah pewarnaan graf memiliki banyak aplikasi di dalam bidang lain, misalnya membuat jadwal, kecerdasan buatan, aliran kerja dalam proyek, pencocokan pola, dan lain–lain. Masalah ini bahkan telah berkembang luas menjadi suatu permainan yang

sangat terkenal di kalangan masyarakat luas, yaitu sudoku, suatu permainan angka yang sangat menarik dan populer.

2.1. Pewarnaan Simpul

Biasanya, jika tidak diberitahukan kualifikasinya, pewarnaan graf biasa diasumsikan menjadi pewarnaan simpul. Dan jika pewarnaan simpul tersebut tidak diberitahukan kualifikasinya, pewarnaan simpul tersebut diasumsikan tepat (proper). Artinya tepat adalah tidak ada dua simpul bertetangga yang diwarnai dengan warna yang sama. Pewarnaan yang menggunakan sebanyak k warna disebut k -coloring dan berpadanan dengan permasalahan pembagian himpunan simpul ke dalam himpunan bebas sebanyak k atau lebih sedikit lagi.

2.2. Bilangan Kromatis

Seperti yang sudah dibahas sebelumnya, bilangan kromatis adalah jumlah terkecil warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf, disimbolkan dengan χ . Contohnya bilangan kromatis sebuah graf lengkap K_n yang terdapat n buah simpul (sebuah graf dengan sebuah sisi pada setiap dua buah simpul) adalah $\chi(K_n) = n$. Sebuah graf dapat diwarnai k -coloring adalah k -colorable, dan dia k -kromatis jika bilangan kromatisnya tepat sebanyak k .

Berikut ini akan diberikan beberapa sifat bilangan kromatis ($\chi(G)$):

- $\chi(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf kosong (secara total tidak terhubung).
- $\chi(G) \geq 3$ jika dan hanya jika G memiliki subgraph yang merupakan K_3 atau C_3
- $\chi(G) \leq B(G)+1$.
- $\chi(G) \leq B(G)$, kecuali jika G adalah graf lengkap atau graf lingkaran dengan jumlah simpul ganjil.
- Untuk setiap graf planar, berlaku teorema 4 warna, yaitu $\chi(G) \leq 4$.
- Bila G' adalah upagraph dari G , maka $\chi(G') \leq \chi(G)$.
- Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G)=n$.
- Graf Lingkaran C_n memiliki $\chi(G)=2$ bila n genap dan $\chi(G)=3$ bila n ganjil.
- Graf Teratur berderajat n selalu memiliki $\chi(G) \leq n+1$ sesuai sifat no 3 di atas.
- Graf Bipartit selalu bisa diwarnai dengan 2 warna.
- Graf yang berupa pohon selalu dapat diwarnai dengan 2 warna.

2.3. Polinomial kromatis

Polinomial kromatis menghitung banyaknya cara sebuah graf dapat diwarnai menggunakan tidak lebih dari sejumlah warna. Sebagai contoh, dengan menggunakan tiga buah warna, sebuah graf dalam gambar disamping dapat di tentukan dengan 12 buah cara. Tapi tidak dapat diwarnai dengan dua buah warna. Dengan menggunakan empat buah warna, graf tersebut dapat diwarnai dengan $24 + 4 \cdot 12 = 72$ cara, menggunakan 4 buah warna, sehingga ada $4! = 24$ cara pewarnaan (setiap penentuan warna dengan empat

warna tersebut pada semua graf dengan 4 simpul, disebut sebagai pewarnaan tepat); dan untuk setiap penggunaan 3 dari empat warna tersebut, terdapat 12 cara pewarnaan. Jadi, untuk graf seperti pada contoh, jumlah pewarnaan yang sah adalah seperti ini:

Warna yang tersedia	1	2	3	4	...
Jumlah pewarnaan	0	0	12	72	...

Tabel 1. Hubungan warna dengan jumlah pewarnaan

Polinomial kromatis adalah sebuah fungsi $P(G,t)$ yang menghitung jumlah t -pewarnaan dari G . Sesuai dengan namanya, untuk G yang diberikan, fungsinya adalah polinomial dalam t . Contoh:

$$P(G,t) = t(t-1)^2(t-2), \text{ dan } P(G,4) = 72.$$

Polinomial kromatis mengandung informasi mengenai banyaknya warna yang dapat diberi pada G sama seperti bilangan kromatis. Dan χ adalah bilangan positif terkecil yang bukan merupakan akar dari polinomial kromatis.

$$\chi(G) = \min\{k: P(G,k) > 0\}$$

Polinomial kromatis ini pertama kali digunakan oleh Birkhoff dan Lewis untuk membantah teorema empat warna. Hal ini masih merupakan permasalahan yang belum terselesaikan untuk mengkarakterisasi graf yang memiliki bilangan polinomial kromatis yang sama dan untuk menentukan dengan tepat, polinomial mana yang kromatis

Contoh:

Polinomial kromatis untuk beberapa jenis graf

Segitiga K_3	$t(t-1)(t-2)$
Graf lengkap K_n	$t(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))$
Pohon dengan n simpul	$t(t-1)^{n-1}$
Graf lingkaran C_n	$(t-1)^n + (-1)^n(t-1)$
Graf Petersen	$t(t-1)(t-2)(t^7 - 12t^6 + 67t^5 - 230t^4 + 529t^3 - 814t^2 + 775t - 352)$

Tabel 2. Polinomial kromatis beberapa jenis graf

Sifat-sifat:

- $P(G,0) = 0$
- $P(G,1) = 0$ jika G memiliki sebuah sisi
- $P(G,t) = 0$, jika $t < \chi(G)$.
- $(-1)^{|V(G)|} P(G, -1)$ adalah jumlah orientasi asiklik dari G
- Jika G memiliki n simpul, m sisi, dan k komponen G_1, G_2, \dots, G_k , maka $P(G,t)$ memiliki derajat n .
- Koefisien t^n pada $P(G,t)$ adalah 1.
- Koefisien t^{n-1} dalam $P(G,t)$ adalah $-m$.
- Koefisien t^0, t^1, \dots, t^{k-1} semuanya nol.
- Koefisien pada t^k adalah bukan nol.
- $P(G,t) = P(G_1,t)P(G_2,t) \cdots P(G_k,t)$
- Koefisien setiap polinomial kromatis mewakili tandanya (positif negatif).
- Sebuah graf dengan n buah simpul adalah pohon jika dan hanya jika $P(G,t) = t(t-1)^{n-1}$
- Turunannya, $P'(G,1)$ adalah $\theta(G)$.

2.4. Menghitung polinomial kromatis

Jika G mengandung sebuah gelang, maka G tidak dapat diwarnai dengan sah.

$$P(G,t) = 0$$

Jika e bukanlah sebuah loop, maka polinomial kromatis memenuhi persamaan rekursif

$$P(G,t) = P(G - e,t) - P(G / e,t)$$

Dimana $G-e$ adalah graf dengan sisi yang sisi yang dibuang, dan G/e adalah graf dengan sisi akhir menuju pada simpul tunggal. [5]

3. PEWARNAAN GRAF PADA SUDOKU

3.1. Polinomial Kromatis pada Sudoku

Untuk mencari keunikan solusi sudoku, maka digunakan polinomial kromatis. Sebuah k -coloring graf G adalah pemetaan f dari himpunan simpul G ke $\{1,2,\dots,k\}$. Pemetaan ini disebut pewarnaan yang tepat (*proper coloring*). Jika $f(x) \neq f(y)$ kapanpun x dan y adalah bertetangga dalam G . Jumlah warna yang dibutuhkan untuk mewarnai simpul dengan tepat graf G adalah bilangan kromatis G dan dinotasikan $\chi(G)$.

Tidaklah begitu sulit untuk melihat teka-teki sudoku sebagai masalah pewarnaan. Tentu saja kita menghubungkan sebuah graf dengan 9×9 jaring-jaring kotak pada sudoku. Graf akan memiliki 81 buah simpul dengan setiap simpul berkorespondensi dengan kotak pada sudoku. Dua buah simpul yang berbeda akan bertetangga jika dan hanya jika kotak yang berkorespondensi terletak pada kolom, baris, atau kotak 3×3 yang sama. Setiap kotak sudoku yang terselesaikan kemudian sama dengan pewarnaan yang tepat pada graf ini. Kita bahas ini pada konteks yang

lebih umum. Misalkan terdapat $n^2 \times n^2$ jaring-jaring kotak. Pada setiap jaring-jaring kotak, Sebuah sisi dengan nama (i, j) dengan $1 \leq i, j \leq n^2$. Kita dapat katakan bahwa (i, j) dan (i', j') adalah bertetangga jika $i = i'$ atau $j = j'$ atau $[i/n] = [i'/n]$ dan $[j/n] = [j'/n]$. (dimana $[\cdot]$ menyatakan bilangan bulat terdekat yang lebih besar dari hasil). Kita akan menotasikan graf ini dengan X_n dan menyebutnya Sudoku Graf dengan rank n . Sebuah kotak sudoku dengan rank n akan mewarnai dengan tepat sebuah graf dengan menggunakan n^2 buah warna. Sebuah Sudoku berkorespondensi dengan pewarnaan parsial dan pertanyaannya apakah pewarnaan parsial ini dapat dilengkapi kedalam pewarnaan total graf tersebut. Terkadang, lebih baik melabelkan simpul Sudoku dengan rank n menggunakan (i, j) dengan $0 \leq i, j \leq n^2 - 1$. kemudian (i, j) dan (i', j') adalah bertetangga jika $i = i'$ atau $j = j'$ atau $[i/n] = [i'/n]$ dan $[j/n] = [j'/n]$, dimana sekarang $[\cdot]$ menyatakan fungsi integer terbesar. Yaitu, $[x]$ berarti bilangan bulat terdekat yang lebih kecil dari x .

Ingat, Graf teratur adalah sebuah graf dengan derajat setiap simpul sama. Sebuah perhitungan menunjukkan bahwa X_n adalah graf teratur dengan setiap simpul memiliki derajat $n^2 - 2n - 1 = (3n+1)(n-1)$. Dalam kasus ini $n=3$, X_3 adalah 20-reguler dan dalam kasus $n=2$, X_2 adalah 7-reguler.

Banyaknya cara pewarnaan graf G dengan k buah warna terkenal dengan polinomial dengan k derajat sama dengan banyaknya simpul G . Teorema pertama dari pewarnaan parsial C dari G , jumlah cara menyelesaikan pewarnaan untuk menghasilkan pewarnaan yang tepat menggunakan k warna juga sebuah polinomial dalam k , dengan k adalah lebih dari sama dengan jumlah warna yang digunakan dalam C . Lebih jelasnya, dinyatakan dalam teorema 1 dan teorema 2.

Teorema 1. Misalkan G , sebuah graf terbatas dengan v buah simpul. Dan C adalah pewarnaan parsial simpul dari G dengan menggunakan d_0 warna. $pG,C(k)$ adalah jumlah cara menyelesaikan graf menggunakan k warna untuk mendapatkan pewarnaan yang tepat dari G . Maka $pG,C(k)$, adalah polinom monik (dalam k) dengan koefisien integer dari derajat $v-t$ untuk $k \geq d_0$

Teorema 2. Misalkan G adalah sebuah graf dengan bilangan kromatis $\chi(G)$ dan C adalah pewarnaan parsial dari G dengan hanya memakai $\chi(G)-2$ warna. Jika pewarnaan parsial dapat diselesaikan untuk pewarnaan total dari G , maka pasti terdapat paling sedikit dua buah cara untuk menambahkan jumlah warna.

Pembuktian teorema ini cukup rumit sehingga tidak dibahas dalam makalah ini, namun jika pembaca tertarik, pembuktian teorema ini dapat dicari di

referensi penulis.

3.2. Pewarnaan Eksplisit dari X_n

Dengan menggunakan teorema 3, kita dapat mengetahui bagaimana seseorang dapat mewarnai dengan tepat suatu graf sudoku X_n . Ingatlah bahwa bilangan kromatik dari sebuah graf adalah jumlah warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai setiap simpulnya. Sehingga, graf lengkap K_n terdiri dari n buah simpul dimana setiap simpul yang bertetangannya dengan setiap simpul lain memiliki bilangan kromatik sama dengan n .

Teorema 3. Untuk setiap bilangan asli n , terdapat sebuah cara pewarnaan untuk sebuah graf sudoku X_n dengan menggunakan n^2 warna. Bilangan kromatis untuk X_n adalah n^2

Pembuktian teorema ini dapat dicari pada referensi penulis.

3.3. Menghitung jumlah kemungkinan solusi Sudoku

Penulis akan menjelaskan secara singkat keunikan dari solusi yang diberikan oleh Puzzle Sudoku. Tidaklah selalu jelas pada awalnya apakah teka-teki yang diberikan memiliki solusi. Pada bagian ini, kita akan menentukan beberapa kondisi awal yang diperlukan agar sudoku dapat memiliki solusi yang unik.

Sebagai contoh, teka-teki sudoku dibawah tepatnya memiliki dua buah solusi.

9		6		7		4		3
			4			2		
	7			2	3		1	
5						1		
	4		2		8		6	
		3						5
	3		7					5
		7			5			
4		5		1		7		8

Gambar 3. Sudoku dengan solusi tepat dua buah

Penulis meninggalkan pada pembaca untuk menunjukkan bahwa teka-teki pada gambar 3 mengacu pada konfigurasi dalam gambar 4.

9	2	6	5	7	1	4	8	3
3	5	1	4	8	6	2	7	9
8	7	4	9	2	3	5	1	6
5	8	2	3	6	7	1	9	4
1	4	9	2	5	8	3	6	7
7	6	3	1			8	2	5
2	3	8	7			6	5	1
6	1	7	8	3	5	9	4	2
4	9	5	6	1	2	7	3	8

Gambar 4. Solusi teka-teki gambar 3

Tepatnya, seseorang dapat memasukkan salah satu dari penyusunan gambar 5 untuk melengkapi kotak-kotak diatas, sehingga kita memiliki dua solusi.

9	4
4	9

4	9
9	4

Gambar 5. Dua buah cara menyelesaikan teka-teki

Pengamatan singkat menghasilkan pernyataan sebagai berikut, jika dalam solusi penyelesaian teka-teki sudoku, kita memiliki konfigurasi dengan tipe seperti pada gambar 6, dalam tumpukan vertikal yang sama, maka paling sedikit ada salah satu dari nilai kotak tersebut harus diberikan dalam teka-teki awal, atau kalau tidak, kita akan memiliki dua buah solusi yang mungkin dalam teka-teki awal dengan menukarkan a dan b dalam konfigurasi tersebut.

a	b
b	a

Gambar 6. Konfigurasi yang menjelaskan kedua solusi

Seperti yang diperhatikan sebelumnya, jika jumlah warna berbeda yang digunakan untuk teka-teki sudoku ini paling banyak 7, maka paling sedikit terdapat dua buah solusi untuk teka-teki tersebut. Penulis menyadari hal ini karena kita dapat menukarkan dua buah warna yang tidak terpakai dan masih mendapatkan solusi yang sah. Multiplisitas dari solusi ini juga dapat dilihat dari polinomial kromatis. Jika d_0 adalah jumlah warna berbeda yang digunakan, kita dapat melihat bahwa $p_{X_3,C}(k)$ adalah polinomial dalam k dimana $k \geq d_0$. Dan karena bilangan kromatik dari X_3 adalah 9, maka $p_{X_3,C}(k)$ harus bernilai 0 untuk $k = d_0, d_0 + 1, \dots, 8$.

Dimana $pX_{3,C}(k)$ adalah polinomial monik dengan koefisien bilangan bulat, kita dapat menulis

$$pX_{3,C}(k) = (k - d_0)(k - (d_0 + 1)) \cdots (k - 8)q(k),$$

Untuk sebagian polinomial $q(k)$ dengan koefisien bilangan bulat. Dengan $k=9$ menghasilkan

$$pX_{3,C}(9) = (9 - d_0)!q(9)$$

dan pada bagian kanan dengan nilai lebih besar atau sama dengan 2 jika $d_0 \leq 7$. Hal ini menunjukkan pada kita kondisi yang diperlukan agar terdapat solusi yang unik, dengan syarat teka-teki tersebut memiliki solusi, yang merupakan asumsi umum dalam setiap teka-teki sudoku.

4. KESIMPULAN

Graf adalah suatu bahasan dalam matematika diskrit yang memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Pada pembahasan makalah ini, graf digunakan untuk mencari keunikan solusi dari Sudoku.

Sudoku adalah permainan teka-teki yang sangat menarik yang dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf. Dengan setiap simpul pada graf menyatakan jaring-jaring kotak pada sudoku, dan setiap sisi dipandang sebagai relasi antara kotak-kotak tersebut (antara kolom, baris, ataupun kotak kecil

yang sama).

Untuk mencari keunikan dari solusinya, kita dapat menggunakan pewarnaan simpul graf. Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah mengenal polinomial kromatis dan penerapannya dalam mencari keunikan solusi sudoku. Dan kita telah menemukan bahwa sudoku yang direpresentasikan dengan tujuh atau lebih sedikit warna, tidak memiliki solusi yang unik. [1]

DAFTAR REFERENSI

- [1] Agnes M. Herzberg, M. Ram Murty, "Sudoku Squares and Chromatic Polynomials", <http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf>, diakses tanggal 28 Desember 2007, pukul 22.00 WIB.
- [2] American Mathematical Society, www.ams.org, 2007. Tanggal akses 28 Desember 2007, pukul 22.00 WIB.
- [3] Munir, Rinaldi, Diktat Kuliah IF 2153, Matematika Diskrit, Edisi Keempat, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2006.
- [4] Rosen, Kenneth H., Discrete Mathematics and Its Applications, 4 th, McGraw-Hill Internasional, 1999.
- [5] Wikipedia, Wikipedia – Free Encyclopedia, www.wikipedia.com, 2006. Tanggal akses : 28 Desember 2007, pukul 22.00 WIB.