

# Pengaplikasian Matematika Diskrit dalam Menentukan Barisan EKG (*Electrocardiogram*)

Austin Dini Gusli – NIM : 13506101

Program Studi Teknik Informatika,  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika,  
Institut Teknologi Bandung  
Jln. Ganesha 10, Bandung

E-mail : if16101@students.if.itb.ac.id

**Abstract** — Makalah ini menganalisa rumus dalam menentukan sebuah barisan, yang umumnya disebut barisan EKG (*electrocardiogram*). Barisan bilangan selalu menjadi suatu daya tarik tersendiri bagi para matematikawan, baik yang sudah ahli maupun yang masih amatir. Banyak orang yang telah mengenal barisan Fibonacci, di mana setiap bilangan berikutnya merupakan hasil penjumlahan dari dua bilangan sebelumnya: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, dst. Kini barisan EKG-lah yang menarik banyak perhatian dari investigasi matematika. Hal-hal yang akan dibahas terkait dengan barisan ini barisan yang bersifat permutasi, investigasi numerik, asumsi rumus asimptotiknya, batas atas dan batas bawahnya, struktur siklus dan generalisasi.

**Kata Kunci** : *electrocardiogram, permutasi, investigasi numeik, batas, PBB/gcd*

## 1. PENDAHULUAN

Barisan ini telah didefinisikan bahwa  $U(1) = 1$ ,  $U(2) = 2$ , dan untuk  $n \geq 3$ ,  $U(n)$  merupakan bilangan asli terkecil di luar bilangan-bilangan sebelumnya dan harus memenuhi  $PBB\{U(n-1), U(n)\} \geq 2$ . Barisan ini dapat disebut sebagai sebuah barisan PBB *greedy gcd*, akan tetapi karena tampilannya yang mengejutkan jika digambarkan ke dalam grafik, maka diberi nama barisan EKG atau *electrocardiogram*. Hal tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.2. yang menemukan pertama kali adalah Jonathan Ayres [Ayres 2001] dan tampil sebagai barisan A064413 pada [Sloane 01]. Secara berurut, 30 bilangan pertama adalah

1	2	4	6	3	9	12	8	10	5
15	18	14	7	21	24	16	20	22	11
33	27	30	25	35	28	26	13	39	
36...									

Meskipun sifat umumnya tidak dapat diprediksikan, pengeplotan dari 1000 atau 10000 bilangan pertama menunjukkan suatu kesamaan pola. 3 dan 4 pada pokok bahasan 4 menunjukkan hal tersebut.

Barisan EKG memiliki definisi pengulangan yang sederhana, meskipun secara mengejutkan sulit untuk dianalisa. Definisinya

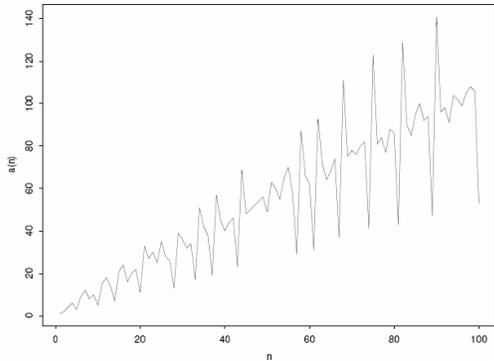
menggabungkan aspek penjumlahan dan pengalihan dari integer-integernya, dan aspek *greedy* dari definisinya menghasilkan ketergantungan pada bilangan pendahulunya dari barisan yang cukup rumit. Tentu saja barisan yang terdiri dari integer positif semuanya tidak langsung nyata terlihat, tetapi akan terlihat bahwa inilah kasus yang terjadi. Barisan EKG merupakan permutasi dari integer-integer positif.

Dengan membandingkan Gambar 1 dan 3, maka dapat mengingatkan kontras antara pengeplotan yang tidak teratur dari  $\pi(\square)$  (bilangan prima  $\leq x$ ) untuk setiap  $x \leq 100$  dan pengeplotan yang sangat teratur untuk  $\square \leq 50000$  seperti yang dapat dilihat pada kuliah yang diberikan oleh Don Zagier mengenai “50 juta bilangan prima pertama” [Zagier 1977]. Yang terjadi bukanlah sebuah kebetulan semata, sebagaimana yang akan terlihat, karena (berdasarkan penelitian) puncak yang runcing pada barisan EKG berhubungan dengan bilangan-bilangan prima yang diatur dalam urutan dimana nilai dari bilangan primanya semakin meningkat. Meskipun demikian, spasi antar puncak yang runcing tidak sama dengan spasi yang terbentuk antar bilangan prima yang diurut.

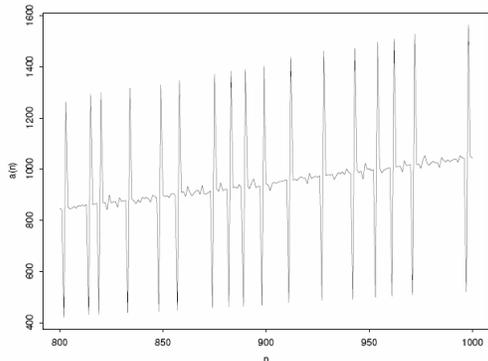
Meskipun barisan EKG itu sendiri baru dikemukakan belakangan ini, di awal tahun 1980-an Erdős, Freud and Hegyvari [Erdős et al. 1983] mempelajari pelbagai hal menyangkut permutasi-permutasi integer dengan pembatasan pada nilai-nilai yang diperbolehkan dari bilangan pembagi terbesar yang paling umum.

Pada pokok bahasan 2, diperoleh beberapa hal mendasar dari barisan EKG, dan membuktikan bahwa barisan tersebut merupakan permutasi dari bilangan asli  $N$ . Algoritma yang efisien untuk menginput barisan dibahas pada pokok bahasan 3. Dengan menggunakan algoritma tersebut bilangan yang diinput sebanyak  $10^7$  bilangan; yang menghasilkan hipotesa rumus asimptotik pada pokok bahasan 4. Diberikan argumentasi berdasarkan hasil penelitian, alas an mengapa rumus-rumus tersebut dapat dibenarkan, tapi kemungkinan besar pembuktian akan sulit dibuktikan. Meski berhasil memperoleh batas atas

dan bawah linier pada barisan EKG, yaitu  $\frac{1}{260}n \leq U(n) \leq 14n$  (pokok bahasan 5 dan 6); pembuktian menggunakan pemikiran *sieving*. Pokok bahasan 7 membahas hasil experimental (penelitian) menyangkut siklus structural dari permutasi terkait dengan N. Pokok bahasan terakhir membahas generalisasi pada jenis permutasi-permutasi integer yang dihasilkan dari penyusunan *greedy* dengan pembatasan pada *gcd* pada bilangan yang berurutan.



Gambar 1. Plot dari  $U(1)$  sampai  $U(100)$



Gambar 2. Plot dari  $U(800)$  sampai  $U(1000)$

## 2. BARISAN EKG

### 2.1. Barisan Merupakan Bentuk Permutasi

Pengetahuan umum menyangkut barisan ini.

Untuk  $n \geq 2$ , dengan  $g = \gcd\{U(n-1), U(n)\}$ . Untuk beberapa nilai prima  $p$  membagi  $U(n-1), U(n)$  merupakan kelipatan  $p$  yang terkecil yang belum diketahui (atau kelipatan  $p$  yang lebih kecil akan menjadi calon  $U(n)$  yang lebih bagus). Bilangan prima  $p$  yang demikian disebut sebagai bilangan prima yang mengendalikan  $U(n)$ . Nilai  $p$  dapat berupa lebih dari satu angka, dimana hasilnya membagi  $g$ .

Untuk bilangan prima  $p$  sembarang dan  $n \geq 2$ , dengan  $B_p(n)$  sebagai kelipatan terkecil dari

$p$  yang tidak termasuk dalam  $\{U(1), \dots, U(n-1)\}$ . Sebagai contoh, barisan  $\{B_2(n): n \geq 2\}$  awalnya adalah 2, 4, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 14, .... Terlihat jelas bahwa

$$B_p(n) \leq B_p(n+1) \leq pn \quad (1)$$

Untuk semua  $p, n \geq 2$ . Dengan  $U(1) = 1$ ,

$$U(n) = \min \{B_p(n): p \text{ membagi } U(n-1)\}, \quad (2)$$

Untuk  $n \geq 2$ , yang memberikan solusi alternative dari barisan.

**Lemma 1.**  $\{U(n): n \geq 0\}$  merupakan permutasi dari bilangan asli N.

**Bukti.** Tidak ada bilangan yang muncul lebih dari sekali, secara structural, sehingga memenuhi syarat agar setiap bilangan muncul. Misalkan hanya sejumlah bilangan prima tertentu membagi bilangan dalam barisan. Akibatnya salah satu bilangan akan dalam jumlah yang tak terhingga banyaknya. Sehingga tak terhingga bilangan-bilangan prima  $p$  membagi bilangan dalam barisan.

### 2.2. Investigasi Numerik

Dalam menginput barisan EKG lebih baik tidak mempergunakan definisi asli melainkan pemahaman akan bilangan-bilangan prima yang diatur dalam urutan dimana nilai dari bilangan primanya semakin meningkat dan menginput nilai  $B_p(n)$  yang ada untuk tiap bilangan prima  $p$ . Pengaturan perhitungan yang efisien adalah dengan mempertahankan 4 buah tabel:

$hit(m) = 0$  if  $m$  has not yet appeared, otherwise 1;

$gap(m) =$  current value of  $B_m(n)$  if  $m$  is a prime, otherwise  $m$ ;

$small(m) =$  smallest prime factor of  $m$ ;

$quot(m) =$  largest factor of  $m$  not divisible by  $small(m)$ .

Penggabungan dari table-table di atas dalam C "struct" meminimalisasi pemakaian *memory access*.

Misalkan dikehendaki perhitungan barisan hingga  $U(n)$  mencapai atau melebihi N.

Langkah pertama adalah menginput terlebih dahulu  $small(m)$  dan  $quot(m)$  untuk setiap  $m \leq N$ . Karena perlu memperhitungkan bilangan prima  $\leq \sqrt{N}$ , yang membutuhkan sekitar  $\sum_{p \leq \sqrt{N}} N/p = O(N \log \log N)$  langkah.

Pada *main loop*,  $a(n)$  merupakan nilai saat ini. Atur  $k = a(n)$ ,  $B = N$  dan ulang hingga  $k$  mencapai 1:

$$p = small(k),$$

$$B = \min\{B; gap(p)\},$$

$$k = quot(k).$$

Kemudian di *set* sehingga  $U(n+1) = B, hit(B) = 1$ , dan *update*

$gap(q)$  untuk setiap bilangan prima  $q$  yang membagi  $B$ .

Analisis mendetail kompleksitas dari *main loop* belum dilaksanakan, tapi juga membutuhkan sekitar  $O(N \log \log N)$  langkah, sebanding dengan dan tidak lebih besar dari jumlah langkah yang diperlukan perhitungan awal dari perhitungan keseluruhan. Program ini menghitung  $10^7$  bilangan dari barisan dalam waktu kurang dari satu menit. Contohnya,  $U(10954982) = 11184814$ .

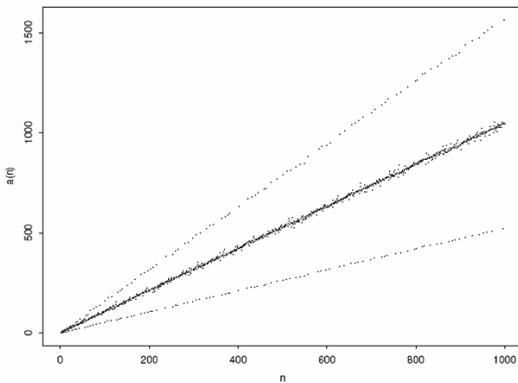
### 2.3. Asumsi Rumus Asimptotik

Hasil dari data percobaan menyatakan bahwa setiap bilangan prima  $p$  muncul dalam barisan, maka akan diikuti dengan  $2p$ , kemudian  $3p$  dan seterusnya. Meski dapat terjadi munculnya sebuah bilangan kelipatan  $p$ , sebelum bilangan prima  $p$  itu sendiri muncul (sebagai contoh  $\dots, 3p, p, 2p, \dots$ , hal ini tidak akan terjadi sebelum mencapai bilangan  $10^7$ ).

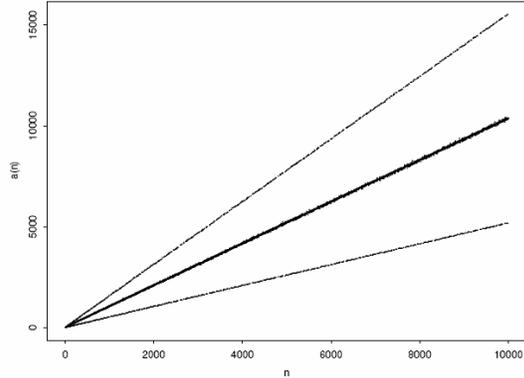
**Asumsi 1.** Bilamana  $p$  ada dalam barisan akan langsung diikuti dengan  $2p$ , dst. Hasil numerik menunjukkan bahwa bilangan dalam barisan akan membentuk seperti ketiga garis pada Gambar 3 dan 4.

- if  $a(n) = m$  and  $m$  is neither a prime nor three times a prime, then  $a(n) \approx n$ ;
- if  $a(n) = p$ ,  $p$  prime, then  $a(n) \approx n/2$ ;
- if  $a(n) = 3p$ ,  $p$  prime, then  $a(n) \approx 3n/2$ .

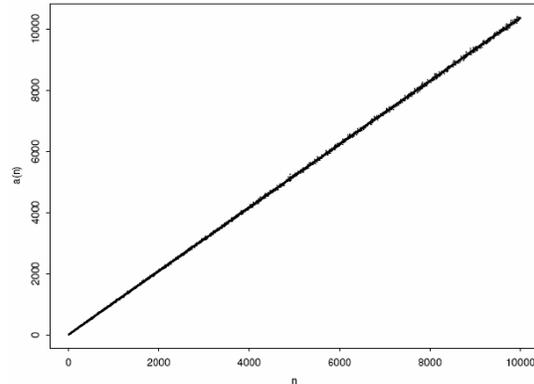
Hal ini diamati juga oleh Ayres [Ayres 2001]. Bahkan jika barisan dibuat lebih teliti dengan mengganti tiap bilangan  $U(n) = p$  atau  $3p$ ,  $p$  bilangan prima  $> 2$ , oleh  $U(n) = 2p$ , bilangan-bilangan pada barisan hamper membentuk sebuah garis yang terlihat pada Gambar 5.



Gambar 3. Seribu anggota barisan pertama



Gambar 4. Sepuluh ribu anggota barisan pertama



Gambar 5. Barisan diperhalus dengan mengganti  $U(n) = p$  atau  $3p$ ,  $p$  bilangan prima  $> 2$ , oleh  $U(n) = 2p$

**Asumsi 2.** Jika  $f(n) \sim g(n)$  artinya rasio kedua pendekatan mendekati 1 sebagaimana  $n \rightarrow \infty$ .

(1) If  $a(n) = m$ ,  $m \neq 6$  or  $3p$  for  $p$  prime, then

$$a(n) \sim n \left( 1 + \frac{1}{3 \log n} \right) \quad (3)$$

(2) If  $a(n) = p$ ,  $p$  prime, then

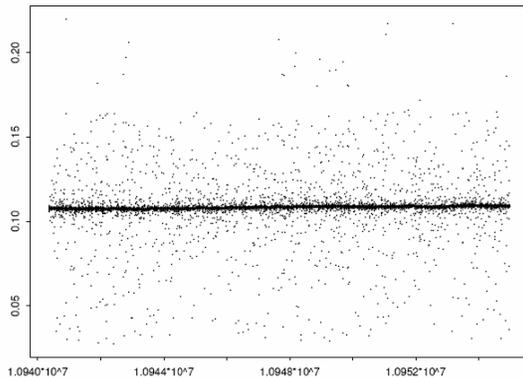
$$a(n) \sim \frac{1}{2} n \left( 1 + \frac{1}{3 \log n} \right) \quad (4)$$

(3) If  $a(n) = 3p$ ,  $p$  prime, then

$$a(n) \sim \frac{1}{2} n \left( 1 + \frac{1}{3 \log n} \right) \quad (5)$$

Sebagai pembuktian asumsikan  $U(n)=m$  untuk barisan yang telah diperjelas. Gambar 5 menunjukkan bahwa barisan telah mencapai semua bilangan dari 1 hingga  $m$  setidaknya satu kali. Karena  $p$  dan  $3p \leq m$  sudah di buat lebih teliti, dengan memperhitungkan bahwa  $2p \leq m$ , maka

$$n \sim m - \pi(m) - \pi \frac{m}{3} + 2\pi \frac{m}{2} \quad (6)$$



Gambar 6. Nilai  $c$  untuk  $n$  mendekati  $10^7$

Dimana  $\pi(x)$  = bilangan prima  $\leq x$ , jika ditulis bahwa

$$U(n) \approx n \left( 1 + \frac{1}{2 \log n} + \frac{c}{(\log n)^2} \right)$$

(7)

akibatnya  $c$  tidak memiliki nilai yang pasti meskipun seringkali nilai  $c$  yang diambil adalah sebesar 0,11. Dengan menggunakan kedua bilangan penjabaran dari  $\pi(x)$ , diperoleh

$$U(n) \sim n \left( 1 + \frac{1}{2 \log n} + \frac{c'}{(\log n)^2} \right) \quad (8)$$

Dimana  $c' = 4/9 + (\log 3/3) - \log 2 = 0,1175...$

Dengan menggunakan asumsi 1 dan 2 serta mengasumsikan bahwa bilangan ke- $k$  bilangan prima  $p_k$  pada barisan yang dibentuk oleh  $U(n) = 2p_k$ ,  $U(n+1) = p_k$ ,  $U(n+2) = 3p_k$ , maka

$$\pi \sim \frac{2p_k}{1 + \frac{1}{2 \log(2p_k)}}$$

**Asumsi 3.** Barisan  $U(n)$  memenuhi syarat  $U(n) \geq \frac{13}{28}n$ , dengan syarat jika dan hanya jika  $n=28$ , dan  $U(n) \leq \frac{13}{7}n$  dengan syarat jika dan hanya jika  $n=7$ .

Untuk nilai  $n$  yang lebih besar batas atas dan batas bawah asimptotik akan menjadi  $n/2$  dan  $3n/2$ .

## 2.4. Batas Atas yang Linier

**Lemma 2.**  $U(n) \leq 14n$ , untuk  $n \geq 1$

**Bukti.** Buktinya mengandung kontradiksi, dimana pemikiran yang melandasi pembuktian adalah fakta bahwa nilai dari fungsi  $\{U(k) : 1 \leq k \leq n\}$  bentuknya menyerupai tumpukan pasir, dimana masing-masing bilangan hanya dapat tersusun diatas sebuah tangga terdiri dari kelipatan yang lebih kecil dari bilangan prima  $p$  sebagai pembagi yang mengendalikan. Untuk mencapai nilai diatas  $14n$ , maka pasti akan runtuh berkali-kali, pada berbagai kelipatan  $kp$  dari  $p$  dengan nilai yang berkisar antara  $2n$  sampai dengan  $14n$ . Untuk dapat menanjak kembali perlu menggunakan bilangan prima pembagi yang mengendalikan lainnya, yaitu

$q$ . Bilangan yang ada pada tangga seperti yang dijelaskan sangat banyak bila menggunakan argumentasi yang berdasarkan *combinatorial sieve* (sebagai pembanding [Hooley 1976], hal. 4-5); kontradiksi terjadi atas pernyataan bahwa tumpukan pasir mengandung lebih dari  $n$ -bilangan.

## 2.5. Batasan Bawah yang Linier

**Lemma 3.**  $U(n) \geq \left\lfloor \frac{1}{260}n \right\rfloor$ , untuk  $n \geq 1$

**Bukti.** Pembuktiannya merupakan bentuk modifikasi dari Lemma 1. Tujuannya adalah menunjukkan jika terapat bilangan kurang dari  $n \leq 260$  terlewatkan dalam fungsi  $\{U(k) : 1 \leq k \leq n\}$  maka terapat paling kurang  $n/65$  bilangan dalam barisan yang merupakan bilangan **lawan prima**.

## 2.6. Struktur Siklus

Karena barisan merupakan permutasi dari  $N$ , maka perlu dilakukan penggalian pengetahuan menyangkut struktur siklus. Bukti eksperimental yang diperoleh mengasumsikan bahwa ada siklus terbatas (*finite cycle*) yang tak terhingga jumlahnya (*infinite cycle*) dan juga ada siklus tak terhingga (*infinite cycle*) yang tak terhingga jumlahnya (*infinite cycle*). Tampak sangat mustahil membuktikan hasil bukti eksperimental ini, atau bahkan untuk membuktikan adanya siklus yang terhingga (*infinite cycle*).

Beberapa bilangan pertama dari siklus terbatas (*finite cycle*) adalah

1, 2, 3, 8, 40, 64, 121, 149, 359, 2879, 5563, 28571, dengan interval antar bilangan

1, 1, 6, 1, 1, 1, 2, 12, 11, 25, 8, 22, 11

secara berurutan. Ada juga siklus tak terhingga (*finite cycle*) dengan dua nilai pertamanya adalah

... ,229310, 117833, ... , 22, 27, 26, 28, 13, 14, 7, 12, 18, 20, 11, 15, 21, ... ,636551, 652766, ...

dan

... ,502008, 257519, ... ,248, 253, 131, 138, 73, 82, 129, 201, 212, ... ,645906, 662330, ...

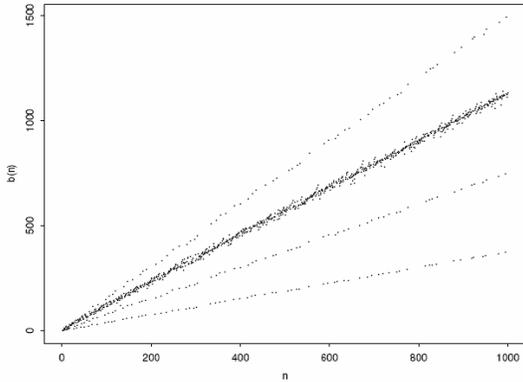
di mana bilangan terendah adalah 7 dan 73. Lima belas bilangan pertama dari siklus yang dibahas diatas belum membentuk suatu kesatuan untuk 700000 bilangan pertama dari barisan. Meski terlihat mustahil, secara teoritis pada suatu titik tertentu bilangan-bilangan dalam barisan dapat membentuk suatu kesatuan.

## 2.7. Generalisasi

Barisan EKG dapat digeneralisasikan dengan berbagai cara, dengan tetap mempertahankan struktur dasar dari barisan *greedy* dengan syarat kontinuitas bilangan *gcd*. Untuk  $M \geq 2$ , dengan  $b(n) = n$  untuk

$1 \leq n \leq M$ , dan untuk  $n \geq M+1$ , dengan  $b(n)$  bilangan asli terkecil belum termasuk dalam

barisan dengan landasan bahwa  $\gcd\{b(n-1), b(n)\} \geq M$ . bukti pada Lemma 1 menunjukkan bahwa  $(b(n) : n \geq 1)$  juga adalah permutasi dari bilangan asli  $N$ . Untuk kasus  $M = 3, 4, 5$  dapat dilihat barisan pada A064417, A064418, A064419 [Sloane 2001].



**Gambar 7.** Plot dari  $b(1)$  sampai  $b(1000)$  dengan  $M = 3$

Gambar 7 menunjukkan 1000 bilangan pertama untuk kasus  $M = 3$ . Barisan ini cenderung memiliki sifat yang mirip dengan barisan EKG: puncak yang runcing pada barisan berhubungan dengan bilangan-bilangan prima, dengan urutan kejadian  $3P, P, 2P, 4P$ . Semua titik pada barisan ini cenderung berada dekat dengan garis miring  $1/3, 2/3, 1,$  dan  $4/3$ .

Yang paling umum, dapat diperbolehkan adanya bilangan acak yang terbatas (*arbitrary finite prefix*) sebagai bilangan awal dari barisan. Dengan asumsi sebuah barisan  $c(n)$  dengan pembatasan masalah pada  $\gcd\{c(n-1), c(n)\} \geq M$ , untuk  $n \geq N$ , tapi dengan bilangan terbatas  $c(n) = a(n) : 1 \leq n \leq N$  dimana setiap bilangan  $a(n)$  merupakan bilangan asli, dan bahwa bilangan yang dimaksud termasuk nilai  $a(n) = k$  untuk  $1 < k < M$ . Pembuktian dari Lemma 1 dapat dimodifikasi sehingga dapat diterapkan pada barisan ini dan juga menunjukkan bahwa barisan ini merupakan permutasi.

Jika dipergunakan aturan greedy  $\gcd$  dengan  $M = 2$ , dimulai dengan bilangan acak yang terbatas (*arbitrary finite prefix*), dapat diperoleh

sejumlah bilangan tak terhingga (*infinite*) yang bervariasi dari barisan permutasi menyerupai barisan EKG. Kebanyakan dari barisan ini, bahkan mungkin semuanya, akhirnya membentuk suatu kesatuan dengan barisan EKG. Dalam hal apapun, segi kualitatif dari hasil permutasi menyerupai yang terjadi pada barisan EKG: bilangan prima muncul dalam rangkaian berurutan (kecuali bilangan-bilangan tertentu yang telah dibahas diatas); pokok pikiran secara umum permutasi tetap menyerupai apa yang ditunjukkan oleh Gambar 3.

Terlihat bahwabatasan atas dan bawah yang linier berlaku untuk semua permutasi tipe-tipe  $c(n)$  diatas.

### 3. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari studi Barisan EKG adalah sebagai berikut.

1. Barisan EKG merupakan sebuah barisan permutasi dengan rumus 
$$U(n) \sim n \left( 1 + \frac{1}{2 \log n} + \frac{c^2}{(\log n)^2} \right)$$
2. Batas atas linier dari barisan ini adalah  $U(n) \leq 14n$  sedangkan batas bawahnya adalah  $U(n) \geq \left\lfloor \frac{1}{260} n \right\rfloor$ .
3. Barisan EKG telah dapat digeneralisasi dalam berbagai cara.

### DAFTAR REFERENSI

[1] J. C. Lagarias, E. M. Rains and N. J. A. Sloane, "The EKG sequence", 2002.  
 [2] <http://sciencenews.org>. Diakses pada tanggal 28 Desember 2007, pukul 15.20.  
 [3] <http://mathworld.wolfram.com>. Diakses pada tanggal 28 Desember 2007, pukul 15.20  
 [4] Rossen, Kenneth H. (2003). Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw Hill