

Perepresentasian Pohon Berakar dengan Model Balon

Danang Arief Setyawan

Jurusan Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung , email: if15090@students.if.itb.ac.id

Abstract – Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk merepresentasikan pohon berakar selain dengan model pohon seperti yang kita pada umumnya. Dalam makalah ini akan dibahas salah satu metode perepresentasian pohon berakar tersebut, yaitu dengan menggunakan model balon (*balon drawing*). Pada model ini, tiap upapohon (*subtree*) pada pohon digambarkan dalam sebuah lingkaran dengan jari-jari tiap lingkaran menunjukkan kedalaman tiap upapohon yang bersangkutan. Untuk mendapatkan model balon yang seimbang dan memiliki nilai estetis yang tinggi, perlu dilakukan optimasi terhadap faktor-faktor berupa nilai resolusi sudut serta perbandingan aspek dari model balon tersebut. Optimasi dilakukan dengan mencari nilai optimum dari himpunan permutasi pengurutan semua anak dari tiap simpul.

Kata Kunci: pohon berakar (*rooted tree*), model balon (*balon drawing*).

1. PENDAHULUAN

Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk merepresentasikan suatu data. Pemilihan metode yang digunakan pada umumnya dipengaruhi oleh jenis data yang ingin direpresentasikan serta tujuan perepresentasian data itu sendiri. Misalnya data yang berupa rincian kategori beserta jumlahnya pada umumnya direpresentasikan dalam bentuk tabel atau diagram sesuai dengan keperluan. Jika keperluannya untuk digunakan sebagai data laporan rinci, bentuk tabel lebih cenderung untuk dipilih. Sedangkan untuk sarana perbandingan antar kategori, bentuk diagram (batang, garis, *pie*, dsb) lebih diutamakan.

Salah satu bentuk representasi data yang sering digunakan adalah graf dengan berbagai variasi dan bentuk khususnya. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi secara visualnya adalah dengan menyatakan objek diskrit dengan noktah, bulatan atau titik dan menyatakan hubungan antar objek dengan garis.

Diantara bentuk umum graf yang ada, salah satunya yang cukup populer dan sering digunakan adalah bentuk pohon (*tree*). Bentuk ini termasuk salah satu bentuk yang sudah digunakan sejak lama dan cukup akrab dengan kehidupan kita sehari-hari, misalnya untuk menyatakan silsilah keluarga. Pohon biasanya direpresentasikan secara sederhana dengan merepresentasikan simpul dengan titik dan sisi dengan garis. Namun ada beberapa metode lain untuk

merepresentasikan pohon yang bisa dipakai, salah satu diantaranya adalah dengan model balon (*balon drawing*). Model ini merupakan salah satu metode representasi yang mempunyai keseimbangan dan nilai estetis yang tinggi.

2. POHON BERAKAR

2.1. Graf dan Beberapa Sifatnya

Sebelum membahas lebih jauh mengenai pohon berakar dan representasinya, terlebih dahulu kita simak kembali pengertian dari graf.

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang dalam hal ini :

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
dan

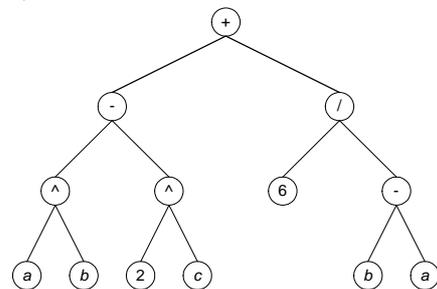
E = himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Graf tak berarah adalah graf yang sisi-sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Dalam hal ini, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh suatu sisi tidak diperhatikan.

Graf tak berarah G disebut *graf terhubung* jika untuk setiap pasang simpul v_1 dan v_2 di dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 .

2.2. Pohon

Pohon terutama digunakan untuk merepresentasikan data yang berupa hirarki, misalnya silsilah keluarga, struktur organisasi, skema/jadwal pertandingan dan lain-lain.



Gambar 1: Contoh Pohon untuk Operasi Aritmatika

Pohon didefinisikan sebagai berikut:

Pohon adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit

Dari definisi ini, terdapat dua sifat penting yang terdapat pada pohon, yaitu terhubung dan tidak mengandung sirkuit. Sebuah graf dikatakan memiliki *sirkuit* apabila ada suatu lintasan yang mempunyai

titik awal dan titik akhir berupa simpul yang sama.

2.2. Pohon Berakar dan Beberapa Terminologinya

Pada kebanyakan aplikasi pohon, simpul tertentu diperlakukan sebagai akar (*root*), sehingga disebut sebagai pohon berakar.

Pohon berakar (*rooted tree*) adalah pohon yang sebuah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah sehingga menjadi graf berarah.

Arah panah yang ada pada pohon berakar selalu mengarah dari simpul orangtua ke simpul anak, oleh karena itu tanda arahnya seringkali dihilangkan (menyerupai graf tak berarah).

Pada pohon berakar terdapat beberapa terminologi umum, yaitu :

a. Anak (*child*) dan Orangtua (*parent*).

Misal x dan y adalah simpul di dalam pohon berakar. Simpul y dikatakan anak simpul x jika ada sisi dari simpul x ke y dan simpul y dikatakan sebagai simpul orangtua.

b. Lintasan (*path*)

Lintasan dari simpul v_1 ke v_k adalah runtutan simpul-simpul v_1, v_2, \dots, v_k sedemikian sehingga v_i adalah orangtua dari v_{i+1} untuk $1 = i = k$.

c. Keturunan (*descendant*) dan Leluhur (*ancestor*)

Jika terdapat lintasan dari simpul x ke simpul y dalam suatu pohon, maka x adalah leluhur dari simpul y dan y adalah keturunan dari simpul x .

d. Upapohon (*subtree*)

Misal x adalah simpul dalam pohon T , maka yang dimaksud upapohon T dengan x sebagai akarnya adalah upagraf $T' = (V', E')$ sedemikian sehingga V' mengandung x dan semua keturunannya dan E' mengandung sisi-sisi dalam semua lintasan yang berasal dari x .

Pohon berakar yang urutan upapohon-upapohonnya diperhatikan dan bersifat tetap disebut sebagai pohon terurut (*ordered tree*), jika tidak maka pohon disebut sebagai pohon tak terurut (*unordered tree*).

e. Derajat (*degree*)

Derajat sebuah simpul adalah jumlah upapohon (jumlah anak) pada simpul tersebut.

f. Daun (*leaf*)

Daun adalah simpul yang berderajat nol (tidak mempunyai anak).

g. Aras (*level*) atau Tingkat

Akar mempunyai aras = 0, sedangkan aras simpul lainnya = 1 + panjang lintasan dari akar ke simpul tersebut.

h. Tinggi (*height*) atau Kedalaman (*depth*)

Aras maksimum dari suatu pohon disebut sebagai tinggi atau kedalaman pohon tersebut.

3. MODEL BALON

3.1. Pengenalan Model Balon (*Ballon Drawing*)

Model balon dari sebuah pohon berakar mempunyai atribut-atribut berikut :

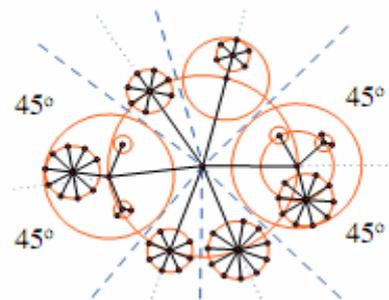
1. semua cabang yang berada di bawah *parent* yang sama ditempatkan di dalam satu lingkaran yang sama dengan berpusat pada *parent* tersebut,
2. tidak ada sisi yang saling bersilangan, dan
3. untuk dua sisi dalam setiap lintasan yang bermula dari akar, sisi yang letaknya lebih jauh dari akar, mempunyai panjang yang lebih pendek dalam penggambarannya.

Dalam model balon, setiap upapohon secara keseluruhan dilingkupi dalam sebuah lingkaran, yaitu pada suatu bagian irisan dengan titik akhir (*end-point*) berupa simpul orangtuanya. Sedangkan jari-jari dari setiap lingkaran mencerminkan jumlah keturunan dari akar upapohon yang bersangkutan.

Berdasarkan ukuran sudut irisan yang terbentuk akibat pembagian area oleh sisi yang menghubungkan akar dari upapohon dengan orangtuanya, model balon untuk pohon berakar terbagi menjadi 2 jenis, yaitu :

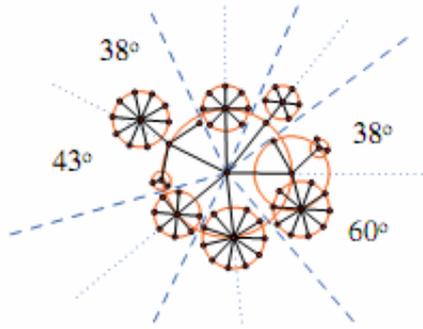
1. Model dengan sudut seimbang (*even angles*)

Pada model ini, kedua sudut dari irisan yang terbentuk harus memiliki derajat yang sama, atau dengan kata lain sisi yang menghubungkan antara akar upapohon dengan orangtuanya harus membagi area irisan tepat di tengah. Untuk mendapatkan model ini, pada waktu menggambar model harus dipastikan bahwa posisi akar dari upapohon bertindihan dengan pusat lingkaran yang melingkupi upapohon yang bersangkutan.



Gambar 2: Model balon dengan sudut seimbang

2. Model dengan sudut tak seimbang (*uneven angles*)
Berlawanan dengan model sudut seimbang, model ini tidak mengharuskan sudut dua irisan yang terbentuk untuk sama besar, sehingga besarnya bisa ditentukan secara bebas oleh pembuat model.



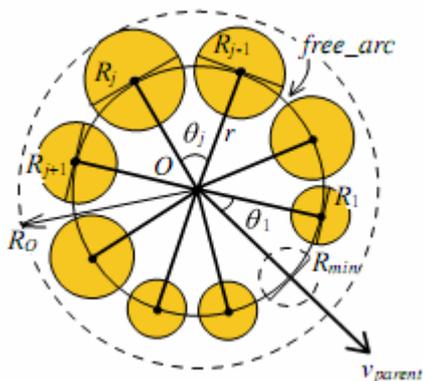
Gambar 3: Model balon dengan sudut tak seimbang

Kriteria estetis (seni) utama yang terdapat pada model balon ini terletak pada resolusi sudut (*angular resolution*) dan perbandingan aspek (*aspect ratio*) yang digunakan dalam penggambarannya. Resolusi sudut merupakan sudut terkecil yang terbentuk antara dua sisi yang berdekatan. Sedangkan perbandingan aspek menyatakan perbandingan antara sudut terbesar dengan sudut terkecil yang terbentuk oleh dua sisi yang berdekatan. Sebuah representasi pohon berakar dengan model balon yang mempunyai perbandingan aspek yang kecil cenderung memberikan gambaran model pohon yang seimbang dan enak dilihat.

3.2. Mencari Model Balon dengan Resolusi Sudut Maksimum dan Perbandingan Rasio Minimum

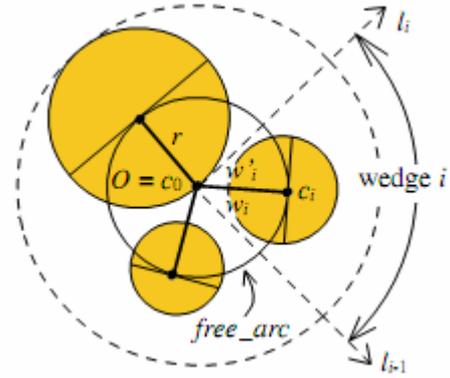
Pada perepresentasian pohon berakar dengan model balon, mengubah urutan penulisan anak akan mempengaruhi resolusi sudut dan juga perbandingan rasio dari model balon yang dibuat. Kita juga telah mengetahui bahwa besar resolusi sudut dan perbandingan aspek menentukan keindahan dan keseimbangan model balon. Maka muncullah pertanyaan berikut : *Bagaimana kita menemukan urutan yang seharusnya agar kita memperoleh model balon dengan resolusi sudut yang maksimum dan perbandingan aspek yang minimum?*

Pertama, mari kita perhatikan penggambaran sebuah graf bintang dengan ukuran lingkaran upapohon yang tak seragam (*subtrees with nonuniform sizes* atau SNS) berikut ini:



Gambar 4: Graf bintang SNS. O bukan akar, dan sisi dari O ke orangtuanya melewati lingkaran dengan jari-jari R_{min}

Misalkan kita mempunyai graf S dengan $n+1$ simpul $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ dengan v_0 sebagai akarnya. Dari gambar 3 di atas dapat diketahui bahwa pada model balon tersebut, lingkaran yang berpusat pada akar dibagi menjadi n irisan yang masing-masing mempunyai lingkaran yang mengasosiasikan anak dari c_0 . Selanjutnya, perhatikan gambar 4 berikut.



Gambar 5: Graf bintang SNS dengan berpusat di c_0

Jika w_i adalah sudut antara ruas sisi l_{i-1} dan c_0c_i , maka model balon dikatakan seimbang jika $w_i = w_{i+1}$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$, artinya ruas c_0c_i membagi irisan menjadi 2 bagian yang sama besar. Jika tidak maka model disebut model balon dengan sudut tak seimbang.

Misal $\sigma_i, 1 \leq i \leq n$, adalah ukuran sudut irisan yang melingkupi lingkaran yang berpusat pada node c_i . Pengurutan semua anak dari c_0 adalah permutasi s dari $\{1, 2, \dots, n\}$ yang menyatakan penempatan simpul-simpul c_1, c_2, \dots, c_n (beserta lingkaran yang berasosiasi dengannya) dalam area lingkaran yang berpusat pada c_0 . Secara lebih spesifik, semua simpul anak digambar dengan urutan $c_{\sigma_1}, c_{\sigma_2}, \dots, c_{\sigma_n}$, dengan c_{σ_i} dan $c_{\sigma_{i \oplus 1}}$ adalah dua simpul yang bertetangga.¹ Dengan mengetahui s , besar sudut antara $\overrightarrow{c_0c_1}$ dan $\overrightarrow{c_0c_{i \oplus 1}}$ adalah

$$\frac{\theta_{\sigma_i} + \theta_{\sigma_{i \oplus n}}}{2}$$

Dengan demikian besar resolusi sudut antara $\overrightarrow{c_0c_1}$ dan $\overrightarrow{c_0c_{i \oplus 1}}$ adalah

$$Ang\ Re\ sl_\sigma = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\theta_{\sigma_i} + \theta_{\sigma_{i \oplus 1}}}{2} \right\}$$

dan perbandingan aspeknya adalah

¹ $i \oplus 1$ menyatakan $(i \bmod n) + 1$

$$AspRatio_{\sigma} = \left\{ \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\theta_{\sigma_i} + \theta_{\sigma_{i \oplus 1}}}{2} \right\}}{\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\theta_{\sigma_i} + \theta_{\sigma_{i \oplus 1}}}{2} \right\}} \right\}$$

Misal Σ merupakan himpunan dari semua permutasi $\{1, 2, \dots, n\}$. Pada bagian berikut kita akan merancang algoritma yang mangkus untuk mencari permutasi yang mengembalikan nilai sebagai berikut

$$optAngRe sl = \max_{\sigma \in \Sigma} \{AngRe sl_{\sigma}\}$$

dan

$$optAspRatio = \min_{\sigma \in \Sigma} \{AspRatio_{\sigma}\}$$

Untuk memudahkan penotasian, kita urutkan himpunan sudut irisan $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ dalam urutan menaik (*ascending*) sebagai berikut

$$m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k, M_k, M_{k-1}, \dots, M_2, M_1 \dots (1)$$

untuk n bilangan genap, atau

$$m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k, mid, M_k, M_{k-1}, \dots, M_2, M_1 \dots (2)$$

untuk n bilangan ganjil, untuk beberapa nilai k dimana m_i adalah nilai minimum ke- i dan mid merupakan nilai median yang bernilai unik. Kita bisa mendefinisikan

$$a_{i,j} = \frac{M_i + m_j}{2}, 1 \leq i, j \leq k$$

Perhatikan kembali gambar 4. Dengan mengabaikan detail pada tiap upapohon, model balon tersebut dapat dilihat sebagai model balon dari sebuah graf bintang SNS dengan akar O untuk berapapun kedalaman dari O . Sebagai tambahan, meskipun kita menghilangkan urutan anak dari O , ukuran lingkaran luar yang melingkupi semua anak dari O akan selalu tetap; artinya, optimisasi setiap upapohon pada kedalaman k tidak mempengaruhi optimisasi pada orangtuanya (pada kedalaman $k-1$). Dari gambaran tersebut, dapat kita ketahui bahwa optimisasi resolusi sudut dan perbandingan aspek sebuah model balon dari sebuah pohon berakar tak terurut dapat dilakukan bertahap dari bawah (*bottom-up*). Sebagai hasilnya, cukuplah bagi kita untuk memeriksa bagaimana melakukan optimisasi resolusi sudut dan perbandingan rasio pada model graf bintang, sedangkan untuk model graf lainnya dapat diturunkan dari model graf bintang.

3.3. Prosedur Optimasi Model Balon pada Pohon Berakar Tak Terurut

Berikut ini prosedur untuk mencari nilai resolusi sudut dan perbandingan aspek yang optimum pada pohon berakar tak terurut.

Procedure OPTMODELBALON

Input : graf bintang SNS S dengan n simpul anak.

Output : model balon S dengan resolusi sudut dan

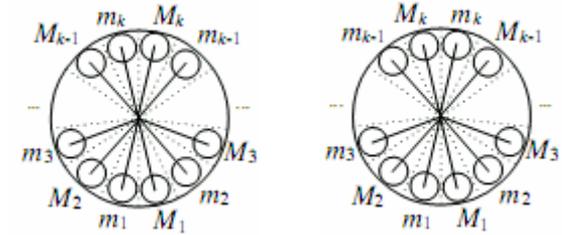
perbandingan aspek yang optimum.

- Urutkan himpunan sudut irisan (melingkupi n lingkaran yang tak-seragam) secara menaik mulai dari yang terkecil hingga yang paling besar sesuai dengan persamaan (1) dan (2) di atas.

- Bergantung pada apakah nilai $n = 2k$ atau $n=2k+1$ dan apakah k bernilai genap atau ganjil, hasilkan urutan

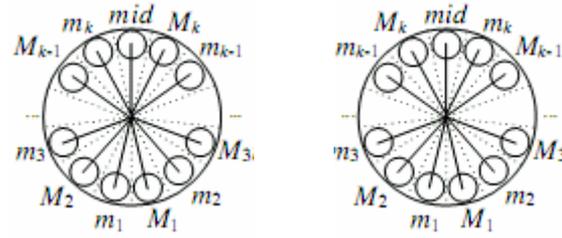
$$(M_1, m_2, M_3, m_4, \dots, (mid), \dots, M_4, m_3, M_2, m_1)$$

dengan menggunakan acuan gambar model yang bersesuaian di bawah ini :



(a) Jika $n=2k$ dan k ganjil

(b) Jika $n=2k$ dan k genap

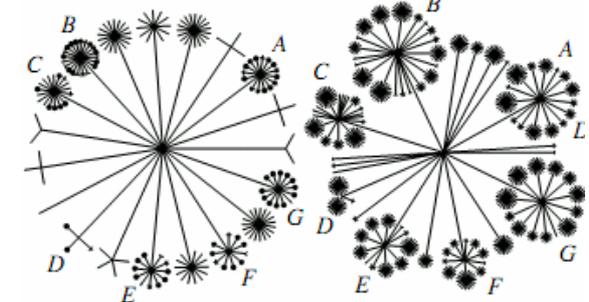


(c) Jika $n=2k+1$ dan k ganjil

(d) Jika $n=2k+1$ dan k genap

3.3. Analisis Prosedur

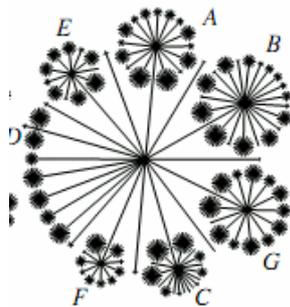
Untuk memberikan gambaran hasil dari penggunaan prosedur di atas, berikut ini simulasi hasil prosedur pada graf bintang yang cukup sederhana.



Gambar 6: Model Fraktal dan salah satu Model SNS-nya

Gambar pertama di atas adalah model fraktal atau model standard, yaitu menampilkan gambar model balon dengan besar sudut semua irisan bernilai identik atau sama besar. Karena semua irisan identik, maka sebenarnya model fraktal ini memiliki besar resolusi sudut dan perbandingan aspek paling baik. Namun kelemahan model ini adalah tingkat *visibility* (keterlihatan) yang buruk pada bagian upapohon. Seperti kita lihat upapohon B hampir menyerupai upapohon C , padahal kenyataannya upapohon B mempunyai struktur yang lebih rumit daripada C .

Gambar di sebelah kanannya merupakan salah satu model SNS (*Subtree with Non-uniform Size*) dari model fraktal sebelumnya, dengan tetap memperhatikan keterurutan simpul-simpul anak. Seperti kita lihat, model SNS mengorbankan nilai resolusi sudut dan perbandingan aspek untuk memperoleh tingkat keterlihatan yang lebih baik pada upapohonnya. Kelemahan model ini terletak pada nilai estetisnya, yaitu kurangnya keseimbangan pada gambar sehingga kurang nyaman untuk dipandang. Jika urutan simpul-simpul anak bisa diabaikan maka prosedur optimasi nilai resolusi sudut dan perbandingan rasio di atas akan memberikan hasil yang lebih nyaman untuk dilihat sebagaimana terlihat pada gambar di bawah:



Gambar 7: Model dengan menggunakan Prosedur Optimasi

Model yang sudah teroptimasi ini mempunyai tingkat visibilitas yang sama dengan model SNS sebelumnya, namun tetap mempertahankan nilai keindahan dan keseimbangannya. Upapohon diurutkan dari yang mempunyai besar irisan sudut yang paling kecil ke yang paling besar kembali ke yang paling kecil. Sehingga apabila dibuat sebuah garis lurus yang melewati akar upapohon dengan sudut irisan terbesar dan akar upapohon dengan sudut irisan terkecil, maka garis tersebut akan membagi model balon menjadi dua bagian yang cenderung simetris.

4. KESIMPULAN

Dari penjabaran dan analisis di atas, dapat kita tarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Model balon merupakan salah satu metode perepresentasian pohon berakar yang mempunyai nilai estetis yang tinggi jika dibandingkan dengan metode representasi standard yang biasa dipakai. Selain itu model balon juga memberikan gambaran struktur pohon dengan lebih cepat dan mudah dipahami.
2. Model fraktal dan model SNS biasa kurang bisa memberikan model balon yang mempunyai nilai keseimbangan dan tingkat visibilitas yang tinggi. Untuk itu diperlukan sebuah metode optimasi terhadap nilai resolusi sudut dan perbandingan aspek pada model balon dengan cara mencari urutan simpul-simpul anak (dari himpunan semua permutasi urutan simpul anak) sehingga

mempunyai keseimbangan yang baik.

3. Metode optimasi yang dipergunakan dalam makalah ini hanya bisa diterapkan dalam pohon berakar yang nilai keterurutan simpul-simpul anaknya bisa diabaikan.

DAFTAR REFERENSI

- [1] R. Munir, "Matematika Diskrit", Institut Teknologi Bandung, 2006
- [2] C. Lin, H. Yen, "Journal of Graph Algorithms and Applications" vol. 11, no. 2, 2007
- [3] R. Diestel, "Graph Theory : Electronic Edition 2005", Springer-Verlag Heidelberg, 2005
- [4] <http://jgaa.info/>
- [5] <http://www.cs.brown.edu/publications/jgaa/>
- [6] <http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/>
- [7] <http://en.wikipedia.org>
- [8] <http://www.maths.qmul.ac.uk/~bill/MAS210/>
- [9] <http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/graph.htm>

* Semua referensi dari internet diakses pada rentang tanggal 20 s.d. 23 Desember 2007.