Pembuktian Teorema Empat Warna

Hari Bagus Firdaus – 13506044
Jurusan Teknik Informatika STEI-ITB, Bandung, email: if16044@students.if.itb.ac.id

Abstract *– Pewarnaan graf merupakan salah satu masalah yang mengemuka pada awal-awal penemuan teori graf. Percobaan untuk memecahkan masalah ini sudah banyak dilakukan oleh para matematikawan dunia. Salah satu hasilnya adalah The Four Color Theorem atau Teorema Empat Warna*

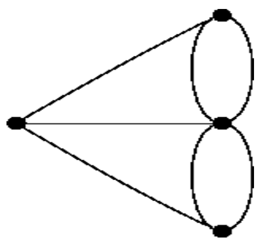
Penemuan Teorema Empat Warna dimulai pada perkiraan Francis Guthrie bahwa pewarnaan peta, dimana tidak ada negara bertetangga yang memiliki warna yang sama, bisa dilakukan hanya dengan menggunakan empat warna saja. Pembuktian demi pembuktian kemudian dibuat sampai pada akhirnya dikonfirmasi oleh Kenneth Appel dan Wolfgang Haken dengan menggunakan komputer. Sepanjang waktu itu, berbagai percobaan dan pembuktian mengenai teorema ini sudah banyak dilakukan, baik yang mendukung maupun yang menentang.

Makalah ini secara garis besar membahas tentang Teorema Empat Warna dan pembuktiannya. Penulis tidak membahas mengenai pembuktian dengan cara yang Appel dan Haken lakukan, karena harus mengunakan komputer, tetapi dengan pendekatan yang berbeda dan lebih sederhana.

Kata Kunci*: Teorema Empat Warna, pewarnaan graf, graf planar, bilangan kromatik.*

1. PENDAHULUAN

Sejak masalah jembatan Konigsberg direpresentasikan dengan graf oleh Euler, teori graf berkembang dengan pesat sebagai cabang dari ilmu matematika. Masalah jembatan Konigsberg adalah mungkinkah melewati tujuh buah jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke titik asal keberangkatan. Jawabannya memang tidak mungkin. Namun, tidak ada seorangpun yang bisa membuktikannya kecuali dengan coba-coba, sampai akhirnya Euler memodelkannya dalam bentuk graf sederhana. Untuk menghormatinya, model graf tersebut diberi nama sirkuit Euler (*Euler cycle*).



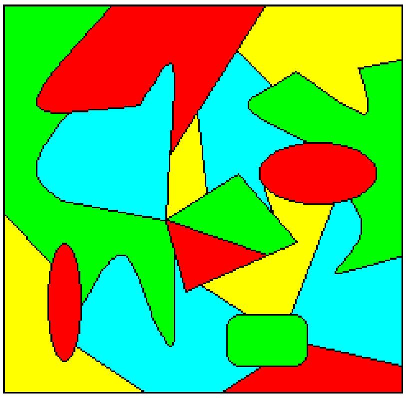
Gambar 1: Sirkuit Euler [8]

Sebuah graf terdiri dari simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*). Sirkuit Euler memiliki 4 buah simpul dan 7 buah sisi, seperti terlihat pada Gambar 1. Secara umum, sebuah graf G adalah suatu pasangan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ dan sisi $E = \{\{v_{1i}, v_{1j}\}, \{v_{2i}, v_{2j}\}, \ldots\}$, dapat ditulis $G = (V,E)$. Syarat sebuah graf ialah minimal harus mempunyai sebuah simpul, sehingga dimungkinkan sebuah graf tidak mempunya sisi satu pun. [3]

Secara global, graf berfungsi sebagai sarana pemodelan. Pemodelan yang dimaksud adalah membuat suatu penyederhanaan terhadap masalah dengan cara merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek-objek tersebut. Penerapan graf dalam kehidupan sangat banyak, diantaranya perpetaan, jaringan telekomunikasi dan komputer, model algoritma, bentuk senyawa dan ikatan kimia, dan struktur sosial masyarakat. [5]

Salah satu topik yang menarik dalam sejarah teori graf adalah pewarnaan graf (*graph coloring*). Topik ini sudah menjadi permasalahan para matematikawan dalam kurun waktu yang lama. Lebih spesifik lagi, masalah pewarnaan graf ini dimulai dari masalah dugaan empat warna (*four color conjecture*), yang sampai hari ini masih dibicarakan di dunia matematika dan informatika. Masalah empat warna adalah masalah bagaimana mewarnai seluruh simpul sehingga tidak ada simpul-simpul bertetangga (*adjacent*), yaitu dihubungkan minimal oleh satu sisi, memiliki warna yang sama. [7] Dengan kata lain, penggunaan warna seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai seluruh simpul disebut bilangan kromatik, yang dilambangkan dengan $\chi(G)$.

Dugaan ini timbul secara tidak sengaja dalam proses pembuatan peta Inggris yang dilakukan Francis Guthrie pada tahun 1852. Sejak itu, banyak tokoh matematika yang mencoba membuktikannya, tetapi tidak ada satupun yang berhasil dan benar untuk seluruh jenis graf planar. Dibutuhkan waktu 124 tahun, tepatnya pada tahun 1976 dengan dua orang matematikawan Amerika, Kenneth Appel dan Wolfgang Haken, ditambah bantuan komputer, untuk membuktikan kebenaran masalah dugaan empat warna ini dan menjadikannya sebuah teorema: simpul-simpul graf planar dapat diwarnai dengan tidak lebih dari empat warna berbeda tanpa ada kesamaan warna pada simpul-simpul yang bertetangga.



Gambar 2: Graf dengan empat warna

2. SEJARAH TEOREMA EMPAT WARNA

Sebenarnya, dugaan empat warna pertama kali dipikirkan oleh August Ferdinand Mobius pada tahun 1840. Namun, pada kenyataannya, Francis Guthrie-lah yang benar-benar menyatakan pemikirannya itu. Pada tahun 1852, saat mewarnai peta negara Inggris, ia menemukan bahwa ia hanya membutuhkan empat warna berbeda. Kemudian ia mengirim surat kepada saudaranya, Frederick, seorang mahasiswa di *University College*, mengenai hal ini. Keduanya tidak bisa membuktikan kebenaran dugaan empat warna ini. Frederick kemudian membawa masalah ini kepada profesornya, Augustus de Morgan. De Morgan tidak bisa membuktikan kebenaran dugaan ini, dan segera setelah mengenali kesulitan dari masalah ini, ia menulis surat kepada Sir William Rowan Hamilton meminta bantuan. Hamilton pada akhirnya memberi kontribusi pada teori graf, yaitu Sirkuit Hamilton, yang dikembangkan melalui usahanya dalam memecahkan dugaan empat warna ini. Tetapi, Hamilton memberi tahu kepada De Morgan bahwa ia tidak yakin bisa menemukan pembuktiannya.

Adalah Arthur Cayley yang mempublikasikan dugaan empat warna untuk pertama kali pada tahun 1878, lewat bukunya *On The Coloring of Maps*. Setelah itu, ada beberapa percobaan gagal dalam pembuktian terjadi. Salah satunya oleh Alfred Kempe pada 1879, yang menggunakan metode rantai Kempe (*The method of Kempe chain*) dan dapat diterima oleh publik. [2] Pembuktian yang berhasil juga dilakukan oleh Peter Guthrie Tait tahun 1880, dimana ia menemukan rumus persamaan teorema empat warna untuk pewarnaan 3 sisi (*3-edge coloring*). Sebelas tahun kemudian, Percy Heawood berhasil menunjukkan kesalahan pembuktian Kempe, dan Julius Petersen menunjukkan kesalahan Tait. Heawood, untuk mengungkap kesalahan Kempe, menemukan bahwa semua graf planar adalah *five-colorable*. Lebih jauh lagi, Heawood membuktikan bahwa bila jumlah sisi yang mengelilingi sebuah daerah dapat dibagi 3, maka daerah itu baru dapat diwarnai dengan 4 warna.

Kontribusi signifikan diberikan oleh G.D.Birkhoff, yang membuat Franklin pada 1922 membuktikan bahwa dugaan empa warna adalah benar untuk peta dengan paling banyak 25 wilayah. Hal ini juga digunakan oleh matematikawan lain untuk membuat berbagai bentuk pengembangan. Pada periode 1960an sampai 1970an, matematikawan Jerman, Heinrich Heesch, mengembangkan metode pembuktian dugaan empat warna dengan mengaplikasikan komputer. Ia memperkenalkan dua metode untuk mencari pembuktian yakni, reduksibilitas (*reducibility*) dan *discharging*. [6]

Sampai pada tahun1976, masalah dugaan empat warna akhirnya dapat dibuktikan oleh Kenneth Appel dan Wolfgang Haken di University of Illinois. Mereka dibantu John Koch dalam beberapa pekerjaan algoritmik. Mereka menggabungkan konsep reduksibilitas dan metode rantai Kempe.

Apabila dugaan empat warna salah, maka ada paling sedikit satu peta yang memiliki wilayah dengan jumlah terkecil yang mungkin, yang membutuhkan lima warna. Pembuktian menujukkan bahwa contoh yang berlawanan seperti ini (*counterexample*) tidak ada melalui penggunaan dua konsep teknis:

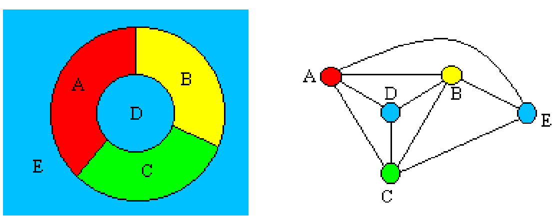
- Sebuah *kumpulan yang tidak dapat dihindari* (*unavoidable set*) meliputi wilayah-wilayah sedemikian rupa sehingga setiap peta harus memiliki paling sedikit satu wilayah dari kumpulan ini.
- Sebuah *konfigurasi yang dapat dikurangi* (*reducible configuration*) adalah sebuah susunan negara-negara yang tidak dapat terjadi dalam sebuah contoh-kontra minimal. Jika sebuah peta mengandung sebuah konfigurasi yang dapat dikurangi, dan bagian peta yang lain bisa diwarna dengan empat warna, maka keseluruhan peta bisa diwarna dengan empat warna, sehingga peta tidak minimal.

Menggunakan prosedur dan aturan matematis berdasarkan sifat konfigurasi yang dapat dikurangi, Appel dan Haken menemukan sebuah kumpulan yang tidak dapat dihindari pada konfigurasi yang dapat dikurangi, yang membuktikan bahwa contoh-kontra minimal pada dugaan empat warna tidak ada. Bukti ini mengurangi jumlah kemungkinan peta dari tak terbatas menjadi 1.936 konfigurasi yang dapat dikurangi (selanjutnya menjadi 1.476), yang harus diperiksa satu per satu oleh komputer. Bagian pekerjaan ini dua kali mengalami pengecekan dengan komputer dan program yang berbeda. Akan tetapi, bagian yang tidak bisa dihindari dari pembuktian ini berjumlah total lebih dari 500 halaman tulis tangan contoh-kontra., sebagian besar adalah anak Haken, Lippold melakukan verifikasi pewarnaan graf. Program komputer sendiri beroperasi selama ribuan jam.

Sejak itu, beberapa algoritma yang lebih efisien ditemukan dalam pewarnaan graf empat warna dan membutuhkan waktu $O(n^2)$, dimana n adalah jumlah simpul. Tahun 1996, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour, dan Robin Thomas menciptakan algoritma waktu kuadratik berdasarkan bukti Appel-Haken. Pembuktian ini lebih efisien karena mengurangi kompleksitas masalah dan memerlukan pengecekan hanya untuk 633 konfigurasi yang dapat dikurangi. Bagian yang tidak bisa dihindari maupun dikurangi harus dijalankan oleh komputer dan tidak bisa dipraktikkan dengan pengecekan tangan biasa. [4]

3. PEMBUKTIAN TEOREMA EMPAT WARNA

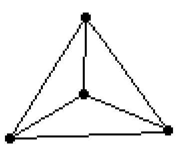
Pewarnaan peta geografis sebenarnya adalah masalah topologi. Kita hanya bisa merepresentasikan setiap negara sebagai sebuah simpul dan hubungan ketetanggaan dua negara sebagai sisi yang menghubungkan dua simpul tersebut.



Gambar 3: Contoh peta sederhana dan representasi grafnya

3.1. Pembuktian pada graf planar sederhana

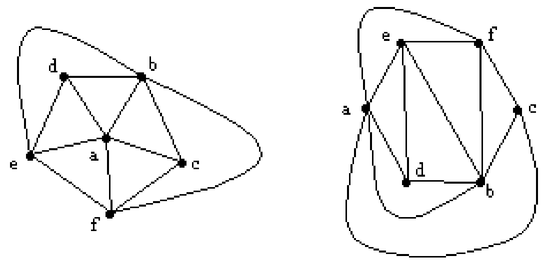
Walaupun De Morgan tidak dapat membuktikan dugaan empat warna, dia mendapati bahwa tidak ada lebih dari empat wilayah pada sebuah bidang dapat saling kontak satu sama lain. Peta yang terdiri dari tiga wilayah adalah sebuah segitiga dan bila ditambahkan satu wilayah lagi maka itu akan ditunjukkan oleh sebuah simpul lagi. Simpul ini harus diletakkan di dalam segitiga agar menunjukkan setiap wilayah saling berdampingan (*adjoint*). Hasil penggambaran kondisi ini adalah sebuah graf planar.



Gambar 4: Sebuah graf planar (V=4, E=6)

Bila simpul kelima ditambahkan, maka simpul itu hanya akan mencapai tiga dari empat simpul lainnya, dikarenakan keempat simpul tadi sudah terhubung dengan tiga sisi secara menyeluruh, sehingga membangun akses ke setiap simpul lainnya.

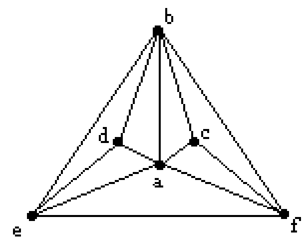
Namun, tidak adanya graf dengan lima simpul yang berdampingan tidak otomatis meniadakan graf yang membutuhkan lima warna berbeda. Bila kita membuat jumlah maksimum hubungan antar simpul pada sebuah graf planar, selalu didapatkan bidang graf yang terbagi menjadi wilayah "bersegitiga" (*triangular*), yaitu wilayah yang dibatasi oleh tiga sisi dan berhubungan hanya dengan tiga simpul. Dengan demikian, benarlah bahwa empat warna cukup untuk semua graf seperti ini, dengan kata lain memiliki bilangan kromatik $\chi = 4$. Perhatikan contoh berikut.



Gambar 4: Contoh bidang graf yang terbagi menjadi daerah-daerah "bersegitiga" (V=6, E=12)

Keduanya adalah graf yang identik secara topologis. Simpul a dan b memiliki mempunyai lima simpul tetangga, e dan f mempunyai empat, c dan d mempunyai tiga. Akan tetapi, sesuai dengan cara menambahkan simpul, kita tidak dapat langsung menyimpulkan empat warna cukup. Jika simpul "a" adalah yang terakhir ditambahkan, dan sebelumnya siimpul-simpul lain sudah menggunakan empat warna, maka simpul "a" butuh warna ke lima.

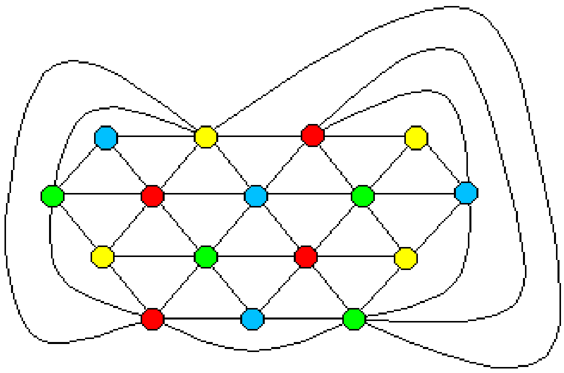
Yang kita perlukan adalah tidak menambahkan simpul "a" sebagai yang terakhir. Gambaran lain dengan topologi yang ekivalen dari kedua graf diatas adalah seperti berikut.



Gambar 5: Graf dengan topologi sama pada Gambar 4

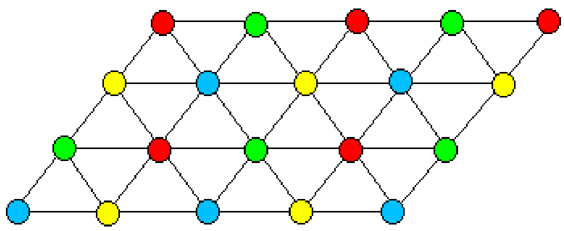
Gambar diatas menunjukkan bahwa simpul e, b, f adalah yang pertama kali ditempatkan dan diberi tiga warna berbeda, lalu menyusul simpul "a", hubungkan dengan tiga simpul sebelumnya, dan beri warna keempat. Kemudian kita bisa meletakkan simpul d didalam segitiga abe dan memberinya warna simpul f. Begitu pula dengan warna e untuk simpul c pada segitiga abf, sehingga graf memiliki empat warna berbeda. Ini adalah kasus dimana graf memiliki pola hirarki yang sama, yaitu simpul dengan tiga sisi. Bila kita menghilangkan simpul dan ketiga sisi itu, graf masih memiliki simpul lain dengan tiga sisi, yang juga bisa dihilangkan, dan seterusnya sampai menjadi segitiga tunggal.

Sayangnya, tidak semua graf memiliki pola hirarki yang sama. Perhatikan graf berikut ini.



Gambar 6: Contoh graf yang tidak berpola hirarki satu simpul dan tiga sisi (V=16, E=42)

Graf diatas tidak mempunyai hirarki yang sama dengan graf sebelumnya berdasarkan fakta bahwa tidak ada tiga simpul yang saling terhubung, langsung terhubung dengan simpul keempat. Namun, graf ini masih dapat diwarnai dengan empat warna berbeda. Hal ini karena graf diatas memiliki potongan-potongan rata (*flat patch*) yang dapat membentuk jaringan segienam yang seragam. Jaringan segienam seragam yang ukurannya tidak terbatas, dengan jelas, dapat diwarnai dengan empat warna berbeda (χ = 4) seperti terlihat pada Gambar 7.



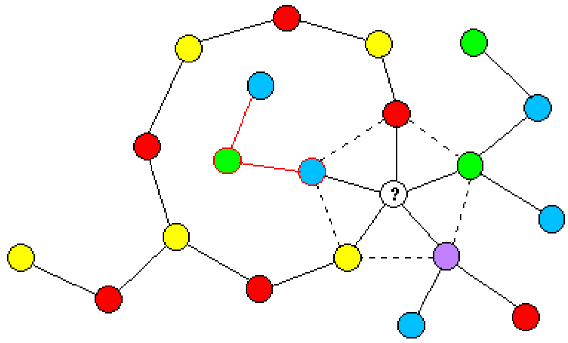
Gambar 7: Jaringan segienam seragam

3.2. Pembuktian yang lebih kompleks

Apabila jumlah simpul, sisi, dan wilayah berturut-turut disimbolkan dengan V, E, dan F, maka rumus Euler untuk bidang (atau ruang) adalah $V - E + F = 2$. Setiap wilayah pada graf planar sederhana dibatasi oleh tiga sisi, dan setiap sisi merupakan batas dari dua wilayah, sehingga $F = 2E/3$, dan rumus Euler untuk graf planar sederhana menjadi $E = 3V - 6$. Setiap sisi dihubungkan oleh dua simpul, sehingga jumlah total sisi terhubung (*attachment*) dalam graf planar menjadi $2E = 6V - 12$, dan rata-rata jumlah sisi terhubung per simpul adalah $6 - 12/V$.

Selanjutnya untuk semua graf, jumlah rata-rata sisi terhubung per simpul adalah kurang dari enam. Ini mengimplikasikan bahwa berdasarkan rumus Euler, tidak ada graf yang membutuhkan lebih dari enam warna. Lebih jauh lagi, dengan sedikit pembuktian, kita akan mendapatkan bahwa tidak ada graf yang memiliki bilangan kromatik lebih dari lima. Oleh karena itu, bila ada graf yang memerlukan lebih dari lima warna, graf tersebut pasti memiliki lebih dari lima simpul.

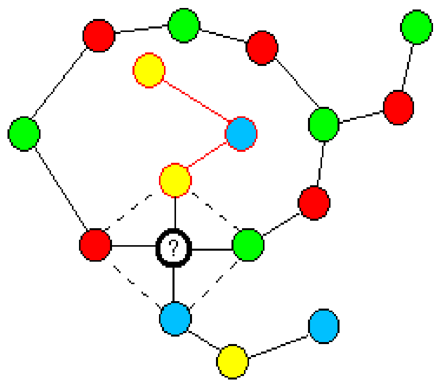
Sekarang lihat graf yang mengandung sebuah simpul dengan lima simpul tetangga dengan lima warna yang berbeda, seperti ilustrasi dibawah.



Gambar 8: Graf mengandung simpul yang dikelilingi lima simpul tetangga dengan warna berbeda

Karena simpul tengah tak berwarna memiliki lima tetangga dengan warna yang berbeda, sepertinya kita membutuhkan warna ke enam (χ = 6). Akan tetapi, kita bisa mengubah urutan (*transpose*) warna biru dan hijau pada *cluster*-2 biru/hijau pada sisi kiri atas *pentagon*, sehingga warna biru menjadi hijau dan hijau menjadi biru. Setelah melakukan ini, simpul tengah tak berwarna akan memiliki tetangga dengan empat warna berbeda dan kita dapat memberinya warna biru (χ = 5).

Rumus Euler masih meninggalkan pertanyaan apakah harus membutuhkan lima warna, ataukah empat warna dapat mencukupi. Perhatikan graf berikut.



Gambar 9: Graf mengandung simpul yang dikelilingi empat simpul tetangga dengan warna berbeda

Simpul tak berwarna yang berada di tengah memiliki empat simpul tetangga dengan empat warna yang berbeda. Ini memperlihatkan bahwa dibutuhkan warna ke lima. Tetapi, dengan mengubah susunan warna biru dan kuning pada *cluster*-2 diatas simpul tengah (ditunjukkan dengan garis *outline* merah), kita akan mendapatkan simpul-simpul tetangga hanya memiliki tiga warna berbeda (merah, hijau, biru). *Simpul tak berwarna dapat diberi warna kuning* (χ = 4).

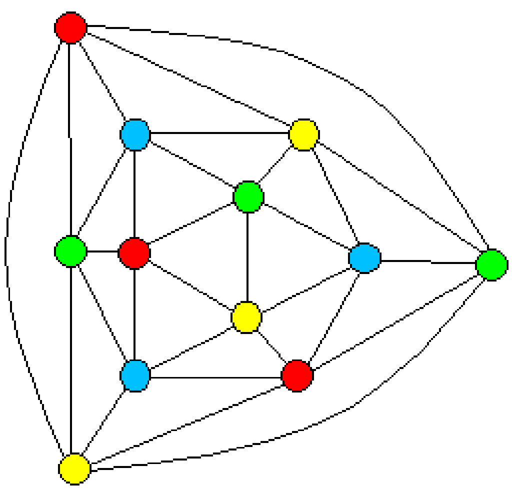
Kita sudah melihat bahwa tidak ada graf yang membutuhkan lebih dari lima warna berbeda, menurut rumus Euler. Dengan menambah sisi, kita juga dapat membuat planar semua graf pada simpul V sehingga seluruh wilayahnya bersegitiga dan memiliki jumlah sisi terhubung tepat sebanyak $6V - 12$. Graf ini pastinya masih merupakan graf minimal lima warna karena kita belum menaikkan jumlah simpulnya, dan menambah sisi tidak dapat mengurangi jumlah warna yang dibutuhkan, mengingat tidak ada graf yang membutuhkan lebih dari lima warna. Karena itu, misalkan a_5, a_6, a_7,... menunjuk jumlah simpul dengan 5, 6, 7 ,…sisi terhubung berturut-turut, kita memiliki sebuah graf minimal lima warna sedemikian rupa sehingga

$$6V - 12 = 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9 ... (1)$$

dimana $V = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 …$ Mensubstitusi ekspresi ini ke dalam persamaan diatas dan meyusunnya kembali, kita mendapatkan

$$12 = a_5 - a_7 - 2a_8 - 3a_9 ... (2)$$

Ini menetapkan batasan yang cukup sulit terhadap berbagai graf minimal lima warna. Sebagai contoh, bila kita memperhatikan sebuah gaf serupa yang tidak memiliki lebih dari enam sisi terhubung pada setiap simpulnya, maka persamaan (2) menyatakan secara tidak langsung bahwa $a_5 = 12$. Dengan kata lain, sebuah graf planar minimal lima warna dengan tidak lebih dari enam sisi terhubung per simpul, dipastikan memiliki tepat 12 simpul dengan lima buah sisi terhubung pada setiap simpulnya. Ini mengindikasikan bahwa 12 simpul ini disusun secara global dalam bentuk sebuah *icosahedron*, dan sisa simpul lainnya yang memiliki enam sisi terhubung per simpul tersusun dalam bentuk segienam beraturan, mengisi wilayah dari *icosahedron*. Graf yang fundamental untuk tipe seperti ini, dengan $a_6 = 0$, ditnjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 10: Graf *icosahedron* dengan $a_6 = 0$

Kita dapat melakukan secara eksplisit, empat pewarnaan pada setiap pola serupa, sehingga juga dapat ditunjukkan dengan jelas bahwa graf serupa tidak memerlukan lebih dari empat warna berbeda. Hal ini membuktikan kebenaran dari Teorema Empat Warna. [1]

4. KESIMPULAN

Beberapa hal penting yang dapat disimpulkan dari penulisan makalah ini ialah:

1. Pembuktian bahwa pewarnaan simpul dari graf planar hanya memerlukan empat jenis warna yang berbeda.
2. Graf planar yang susunannya dapat diubah menjadi wilayah-wilayah yang bersegitiga, mengikuti teorema empat warna.
3. Graf yang mengandung potongan-potongan dari graf lain yang mengikuti teorema empat warna, juga akan mengikuti teorema empat warna.
4. Pada graf planar yang tidak beraturan dan terdiri dari *cluster-cluster*, teorema dapat dibuktikan dengan teknik pengubahan urutan warna.
5. Pembuktian lainnya adalah dengan menggunakan modifikasi dari rumus Euler untuk graf plar.
6. Kesulitan utama pembuktian teorema empat warna adalah pencarian contoh-kontra, yaitu contoh graf yang diperkirakan tidak dapat diwarna dengan empat warna saja.
7. Pembuktian teorema empat warna yang dilakukan oleh Appel dan Haken memberi titik terang pada kemajuan teknik pewarnaan graf.

DAFTAR REFERENSI

[1] MathPages, *http://www.mathpages.com/home/kmath266/kmath266*. Tanggal akses: 27 Desember 2008, pukul 20.00 WIB.

[2] J.J. O'Connor, E.F. Robertson, "The Four Colour Theorem", *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_four_colour_theorem.htm*, September 1996. Tanggal akses: 27 Desember 2007, pukul 20.00 WIB.

[3] Rinaldi Munir, *Diktat Kuliah IF2151 Matematika Diskrit*, Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung, 2004.

[4] Wikipedia, *http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem*. Tanggal akses: 27 Desember 2007, pukul 19.00 WIB.

[5] Wikipedia, *http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory*. Tanggal akses: 27 Desember 2007, pukul 19.00 WIB.

[6] Robin Thomas, “The Four Color Theorem”, *http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html*, November 1995. Tanggal akses: 27 Desember 2007, pukul 19.00 WIB.
[7] PlanetMath, *http://planetmath.org/encyclopedia/FourColorConjecture*. Tanggal akses: 28 Desember 2007, pukul 15.00 WIB.
[8] PlanetMath, *http://planetmath.org/encyclopedia/GraphTheory*. Tanggal akses: 28 Desember 2007, pukul 15.00 WIB.
[9] Richard Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, 5th ed., Prentice Hall, 2001.