Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf Sederhana

Muhammad Amrimirza 13506003
Jurusan Teknik Informatika ITB, Bandung 40132, email: if16003@students.if.itb.ac.id

Abstract *– Metode untuk menghitung kelas-kelas kongruensi dikenal dengan teori enumerasi Burnside-Polya. Metode ini merupakan teknik yang penting, karena dapat juga digunakan untuk menghitung kelas-kelas isomorfisma graf. Tulisan ini akan menyajikan proses pembuktian Teorema Polya dan aplikasinya pada enumerasi graf sederhana.*

Kata kunci*: enumerasi, kelas-kelas isomorfisma graf, Teorema Polya.*

1. Pendahuluan

Teori Graf adalah ilmu yang berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan ilmu Aljabar yang lebih dahulu berkembang. Ilmu Aljabar (abstrak) yang merupakan bagian dari ilmu Matematika, pada dasarnya berkembang pesat karena dia berhubungan dengan himpunan, operasi, dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

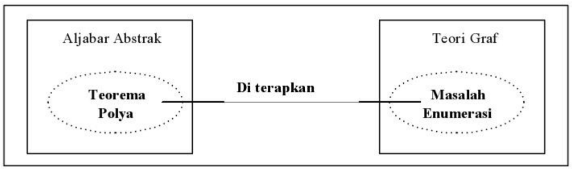
Keunikan Teori Graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (verteks) dan garis (edge). Meskipun pokok bahasan dari topik-topik Teori Graf sangat sederhana tetapi isi di dalamnya belumlah tentu sesederhana itu. Kerumitan demi kerumitan masalah-masalah selalu pasti ada dan bahkan sampai saat ini masih ada masalah yang belum terpecahkan.

Secara garis besar, menurut R.J. Wilson dan J.J. Watkins [5] ada empat masalah pokok dalam Teori Graf yaitu:

- Masalah Eksistensi: masalah yang berhubungan dengan pertanyaan , apakah ada suatu graf yang …? Apakah mungkin dibuat atau dibangun suatu …?
- Masalah Konstruksi: masalah yang berhubungan dengan pembentukan atau pengkonstruksian atau pengadaan. Jika suatu graf ada, apakah mungkin kita mengkonstruksinya? Bagaimana kita dapat membangunnya ?
- Masalah Enumerasi: masalah yang berhubungan dengan penghitungan atau pencacahan. Berapa banyak graf seperti itu? Bagaimana cara kita menghitungnya?
- Masalah Optimisasi: masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, terdekat, terkecil atau paling…. Jika ada banyak kemungkinan, bagaimana kita mendapatkan yang terbaik? Mana yang paling baik ?

Masalah enumerasi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah masalah numerasi yang berhubungan dengan penghitungan banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfis satu dengan yang lainnya. Graf sederhana di sini mengandung arti sebagai graf yang paling banyak ada 1 garis pada setiap pasang titiknya dan tidak memuat untai diri (self loop).

Pada dasarnya tulisan ini merupakan penggabungan dua ilmu, yaitu antara bidang Aljabar (Abstrak) dan bidang Teori Graf. Artinya Aljabar Abstrak melalui Teorema Polya-nya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi graf sederhana.



Gambar 1:
Garis besar konsep tulisan

2. Definisi dan Teorema Aljabar yang Mendukung Teorema Polya

Pada bagian berikut ini akan dibahas beberapa definisi dan beberapa teorema yang mendukung keberadaan Teorema Polya [1].

Definisi 2.1:
Himpunan G ≠ Ø dengan operasi o yang didefinisikan padanya disebut Group (G,o) , bila 4 sifat dibawah ini dipenuhi:

(1) $\forall x, y \in G, \quad x \circ y \in G$ (sifat tertutup terhadap operasi o)
(2) $\exists e \in G, \quad x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$ (ada elemen identitas e)
(3) $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G$ *sehingga* $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ (ada elemen invers)
(4) $\forall x, y, z \in G, \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (sifat asosiatif)

Himpunan H (himpunan bagian dari G), disebut group bagian (G,o) jika (H,o) adalah juga group.

Definisi 2.2:
Misalkan X adalah himpunan berhingga yang banyak anggotanya n. Group Simetri himpunan berhingga Sn adalah kumpulan semua permutasi dari himpunan X.

Definisi 2.3:
Apabila G adalah group bagian dari group Simetri S_n dan untuk x Є X, maka:
(a) Gx = ß{g(x): g Є G}, yaitu himpunan semua bayangan elemen x Є X oleh permutasi di G. Gx sering disebut juga orbitI x terhadap G.
(b) Gx = ß{g Є G: g(x)= x}, adalah himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap. Himpunan Gx disebut sebagai penstabil x di G.
(c) F(g) = ß{z Є X: g(z) = z}, yaitu F(g) adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi g Є G. Himpunan F(g) disebut sebagai karakter permutasi g di himpunan X.

Definisi 2.4:
Group G disebut group berhingga jika memiliki jumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam roup G disebut order G dan disimbolkan dengan |G|.

Definisi 2.5:
Jika H adalah group bagian dari group G dan g adalah nggota G, maka:
gH = {gh: h Є G } disebut koset kiri H terhadap g dan Hg = { hg: h Є G } disebut koset kanan H terhadap g.

Definisi 2.6:
Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan) H yang berbeda dari group G akan membentuk partisi group G, yaitu:
1. Setiap anggota G akan berada pada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan)H.
2. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.
Kumpulan yang mempunyai sifat seperti ini disebut kelas.

Teorema 2.1:
Jika H adalah group bagian dari group G dan |H| = k maka setiap koset kiri (kanan) H memiliki kardinalitas k.

Teorema 2.2 (Lagrange):
Order group berhingga dapat dibagi oleh order sembarang group bagiannya.

Teorema 2.3:
Apabila himpunan berhingga X memiliki k orbit terhadap group G yang beda, maka berlaku:

(a) $\forall x \in X, \quad |G_x| . |G_x| = |G|$ (*Teorema Orbit-Penstabil*)

(b) $\sum_{x\in X} |G_x| = k|G|$ (c) $\sum_{x\in X} |G_x| = \sum_{g\in G} |F(g)|$

Untuk membuktikan Teorema 2.3 (a)-(c) dapat digunakan definisi dan teorema sebelumnya.

Teorema 2.4 (Burnside-Frobenius)

$$\sum_{g\in G} |F(g)| = k|G|$$

Definisi 2.7:
Diberikan penyajian untai (cycle) dari f (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggotanya n) yang memuat sebanyak a_1 untai dengan panjang 1, sebanyak a_2 untai dengan panjang 2, sebanyak a_3 untai dengan panjang 3,…, sebanyak a_i untai dengan panjang i dan i = 1,2,3,4,..., n, maka: tipe untai f disimbolkan dengan vektor [a_1, a_2, a_3, …, a_n] dan bobot f adalah bilangan bulat positif W =1^{a1}, 2^{a2}, 3^{a3}, ..., n^{an} .
Contoh: X ={1,2,3,…, 8}, f = (1354)(2)(687), dalam hal ini a_1 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, dan lainnya nol. Jadi tipe untai f = [10110000], dan bobot f = $1^1 3^1 4^1$.

Definisi 2.8:
Diberikan G adalah group permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan gЄG bertipe untai [a_1, a_2, a_3,…, a_n]. Indeks siklik g didefinisikan sebagai: $Z(g;x_1,x_2,x_3,...,x_n) = x_1^{a1}\, x_2^{a2}\, x_3^{a3}...x_n^{an}$ dan indeks siklik group G didefinisikan sebagai:

$$Z(G;x_1,x_2,x_3,...x_n) \equiv \frac{1}{m}\sum_{g\in G} Z(g;x_1,x_2,x_3,...,x_n)$$

Definisi 2.9:
Fungsi f dari himpunan berhingga X ke himpunan berhingga Y disebut pewarnaan X. Himpunan berhingga Y disebut warna, sedangkan himpunan semua pewarnaan X terhadap warna Y disebut himpunan C. Dua pewarnaan f,g Є C disebut tak dapat dibedakan terhadap group G yang beraksi pada X jika terdapat π Є G sehingga f(x) = g(π(x)) untuk tiap x elemen X. Jelas bahwa relasi tak dapat dibedakan merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan.

Definisi 2.10:
Kelas-kelas kongruensi dalam himpunan C dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di C terhadap group G.

Teorema 2.5:
Diberikan C = { f | f: X → Y } dan X,Y adalah himpunan berhingga; juga diketahui bahwa G adalah group permutasi yang beraksi pada X. Untuk tiap π Є G didefinisikan pemetaan π΄ dari C ke C dengan sifat: π΄ Œ(f(x)) = f(π(x)) untuk tiap x elemen X dan tiap f anggota C, maka berlakulah bahwa:
(a) π΄ adalah permutasi di C.
(b) G΄ = { π΄: π Є G } adalah group.

Teorema 2.6:
Jika Y memuat paling sedikit 2 anggota maka pemetaan dari G ke G΄ yang didefinisikan dengan φ: π'→ π adalah isomorfisma (group).

Definisi 2.11:
Fungsi bobot w memetakan Y ke himpunan r { w(y_1),

(y_2), $w(y_3),\ldots,w(y_r)$ }. Persediaan pola C terhadap group G adalah:

$$PP(G;w(y_1),w(y_2),\ldots,w(y_r)) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=n} K(n_1,n_2,\ldots,n_r)\left[w(y_1)\right]^{n_1}\left[w(y_2)\right]^{n_2}\ldots\left[w(y_r)\right]^{n_r}$$

$K(n_1,n_2,n_3,\ldots n_r)$ adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan (banyak pola) yang dapat dibedakan sehingga warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 anggota, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 anggota, ... dan $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r anggota.

Teorema 2.7:
Misalkan G adalah group permutasi yang beraksi pada himpunan $X = \{x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n\}$ dan C adalah himpunan semua fungsi dari X ke $Y = \{ y_1, y_2, y_3, \ldots,y_r \}$. Jika w(y) adalah fungsi bobot pada Y, dan didefinisikan ω (f) anggota C dengan bentuk:
$\omega(f) = [w(f(x_1))]\,[w(f(x_2))] \ldots [w(f(x_n))]$, maka:
(1) Jika f,ΦC mempunyai sifat tak dapat dibedakan terhadap G, maka ω (f) = ω(Φ).
(2) Jika pola-pola yang berbeda di C dinyatakan dengan $C_1, C_2, C_3, \ldots C_k$; ω (Ci) (i = 1,2,3, ...k) adalah nilai konstan atas C_i , maka pola persediaan C dapat dinyatakan sebagai:

$$PP(G;w(y_1),w(y_2),\ldots,w(y_r)) = \sum_{i=1}^{k} \text{ù}\,(C_i)$$

Teorema 2.8 (Burnside-Frobenius dengan bobot):
Jika $X_1, X_2, X_3,\ldots X_k$ adalah orbit yang berbeda dalam himpunan $X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots,x_n \}$ terhadap permutasi G = { $g_1, g_2, g_3, \ldots g_m$ }, kemudian pada X didefinisikan fungsi bobot ω(x) yang merupakan simbol abstrak dengan sifat bila x_r dan x_s berada pada orbit yang sama, maka ω (x_r) = ω (x_s) dan terdapatlah fungsi bobot pada G, yaitu

$$W(g_i) = \sum_{x\in F(g_i)} \text{ù}\,(x).$$

3. Teorema Polya dan Pembuktiannya

Beberapa definisi dan teorema yang telah dibahas pada bagian sebelumnya dapat digunakan untuk persiapan pembuktian Teorema Polya. Ada dua Teorema Polya yaitu Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Teorema Polya II sering juga disebut sebagai Teorema Polya yang diperluas. Bukti yang indah dari kedua Teorema Polya akan dibuktikan pada bagian ini dan pembuktiannya mengikuti Balakrishnan [1] .

Teorema 3.1 (Polya I):
Diberikan C = { f | f: X → Y } dengan X = n ≥ 2 dan Y = r. Jika G merupakan group permutasi yang beraksi pada X dengan indeks siklik $Z(G;\, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ maka banyaknya pola di C terhadap G adalah Z(G ; r, r, r, ..,r)

Bukti:
Pola-pola di C terhadap group G (yang beraksi pada himpunan X) adalah orbit yang berbeda di C terhadap G, ini diturunkan dari isomorfisma group (Teorema 2.6) akan menghasilkan orbit-orbit di C terhadap G' (group permutasi pada C). Sedangkan banyaknya pola-pola yang terjadi di C terhadap C' diberikan oleh Teorema 2.4 (Teorema Burnside-Frobenius), yaitu:

$$k = \frac{1}{|G'|}\sum_{\pi'\in G'}\left|F(\pi')\right| \quad \ldots(*)$$

dengan F(π') = {f Є C: π'(f) = f}. Karena π'(f) = f jika dan hanya jika f(π(x)) = f(x) untuk tiap x elemen X dan karena G = G' sebagai akibat Teorema 2.6 maka bentuk (*) yang memuat himpunan C dan group G' dapat dibawa kepada bentuk himpunan X dan group G yang beraksi padanya, yaitu:

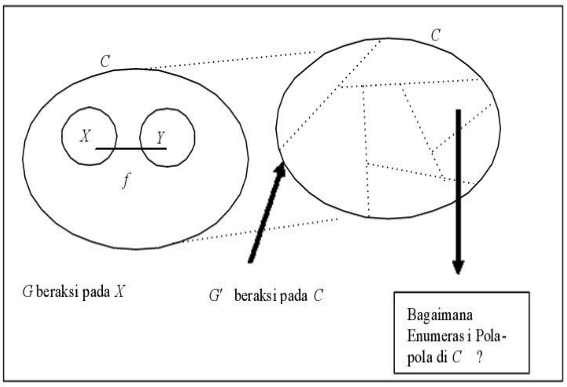
$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\left|f\in C : f(\pi(x)) = f(x)\,untuk \quad \forall x\in X\right| \quad \ldots(**)$$

Jika f(π(x)) = f(x) dan jika $(x_1, x_2, x_3, x_4,\ldots, x_j)$ adalah satu untai suatu permutasi π Є G, maka $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \ldots = f(x_j)$. Dengan kata lain f mempunyai nilai konstan untuk tiap untai p. Kebalikannya, jika f mempunyai nilai konstan untuk setiap untai π dan jika (x x_t … x_w) adalah untai yang memuat sembarang xЄX maka $f(\pi\,(x)) = f(x_t) = f(x_w)$.

Jadi jumlah sisi kanan dari persamaan (**) hanyalah banyaknya cara pewarnaan X dengan r ≥ 2 warna, sehingga elemen-elemen dalam untai yang sama dari permutasi p akan diberi warna yang sama. Jika p bertipe $[a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \ldots a_n]$, maka banyaknya cara pewarnaannya adalah $r^{a1+a2+a3+..+an}$. Sehingga (*) menjadi:

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} r^{a_1+a_2+a_3+\ldots a_n} \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} r^{a_1} r^{a_2} r^{a_3} \ldots r^{a_n}$$

$$k \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} Z(\pi; r,r,r,\ldots,r) = Z(G;r,r,r,r,\ldots,r)$$



Gambar 2: Konsep dasar Teori Polya I

Teorema 3.2 (Polya II):
Persediaan Pola warna, PP(G; w(y1), w(y2), w(y3),…, w(yr)) adalah merupakan indeks siklik dari Z(G;x1, x2, x3, ..., xn) pada:

$$x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \ldots [w(y_r)]^i$$

Dengan i = 1, 2, 3, 4, 5,.., n

Bukti:
Penurunan rumus untuk Teorema Polya II menggunakan Teorema Burnside-Frobenius juga, dan hampir sama dengan Teorema Polya I. Pada intinya fungsi bobot ω (f) memiliki sifat konstan yang diperlukan oleh Teorema 2.4 (Burnside-Frobenius) untuk orbit-orbit C terhadap permutasi dari group G'.

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \ldots, w(y_r)) = \sum_{i=1}^{k} \omega(C_i) = \frac{1}{|G'|}\sum_{\pi' \in G'} W(\pi_i)$$

dimana $W(\pi') = \sum_{f \in F(\pi')} \omega(f)$ ...(a)

Dari bentuk C dan G' dikembalikan ke bentuk X dan G, maka:

$$PP \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} \sum_{\substack{f \in C: f(\pi(x)) = f(x) \\ \forall x}} [w(f(x_1))][w(f(x_2))][w(f(x_3))]\ldots[w(f(x_n))] \qquad \ldots(b)$$

Jumlahan pada persamaan (b) dapat diambil atas seluruh fungsi f(x) yang konstan atas tiap untai p. Misalkan π bertipe [a_1, a_2, a_3, …, a_n] dan didefinisikan multinomial w(y_i) sebagai berikut:

$$\Omega = \overbrace{[w(y_1) + w(y_2) + \ldots + w(y_r)]\ldots[w(y_1) + w(y_2) + \ldots + w(y_r)]}^{a_1 \ \text{faktor}}.$$

$$\overbrace{[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \ldots + w(y_r)^2]\ldots[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \ldots + w(y_r)^2]}^{a_2 \ \text{faktor}}$$
$$\overbrace{[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \ldots w(y_r)^3]\ldots[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \ldots + w(y_r)^3]}^{a_3 \ \text{faktor}}\ldots$$
$$\overbrace{[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \ldots + w(y_r)^n]\ldots[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \ldots + w(y_r)^n]}^{a_n \ \text{faktor}}.$$

Ekspansi Ω memuat $r^{a1+a2+a3+..+an}$ bentuk, yang jumlahnya juga merupakan fungsi f(x) yang konstan atas tiap untai p. Sekarang dapat ditunjukkan bahwa bentuk-bentuk individu dalam ekspansi tersebut sama dengan bobot ω dari fungsi individu f(x). Andaikan bahwa untai dalam penyajian π mempunyai korespondensi satu-satu dengan faktor-faktor dari Ω, dengan cara yang biasa: untai dengan panjang 1 berkorespondensi satu-satu dengan a_1 faktor pertama, untai dengan panjang 2 dengan a_2 faktor kedua …dan seterusnya.

Jika f(x) memetakan untai dengan panjang j yang diketahui (sebut saja himpunan T) di dalam y, maka $w(y_v)^j = \Pi_{x\in T}$ w(f (x)). Bentuk ekspansi seluruhnya diberikan dengan perkalian semua untai yang akan sama dengan $\Pi_U \Pi_{x\in T}$ w(f (x)) dimana U adalah semua untai π. Tapi untai-untai ini mempunyai pengaruh pada partisi di X, sehingga ekspansinya hanya $\Pi_{x\in X}$ w(f(x)) = u ́(f). Akhirnya telah dibuktikan bahwa seluruh jumlahan pada persamaan (b) mempunyai nilai yang sama dengan Ω, tapi jelas terlihat bahwa:

Ω = Z(p;x_1,x_2 ,x_3,...x_n) dengan

$$x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \ldots [w(y_r)]^i$$

untuk i = 1, 2, 3, 4,…, n

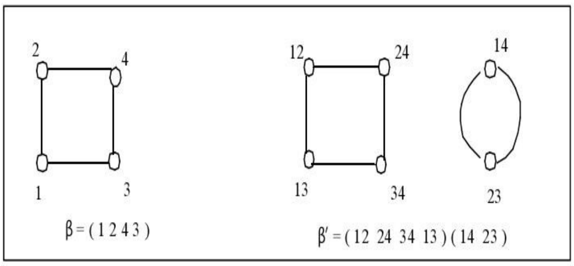
4. Aplikasi pada graf sederhana

Apabila n titik pada graf G dikenai permutasi, maka n(n-1)/2 pasangan titik tak berurut (artinya ij = ji) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan titik tak berurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai garis, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut.

Sebagai contoh kongkrit diberikan himpunan titik X = {1, 2, 3, 4} yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan n = 4 buah. Seluruh kemungkinan garis tak berarah yang ada pada 4 titik tersebut adalah (4)(3)/2 = 6 buah. Suatu permutasi β = (1 2 4 3) pada himpunan titik tersebut, akan membangkitkan permutasi 6 elemen tak berurut sebagai berikut:

$$\hat{a} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \text{akan membangkitkan } \hat{a}' = \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 24 & 21 & 23 & 41 & 43 & 13 \end{matrix}$$

Gambaran kongkritnya adalah seperti pada gambar dibawah ini:



Gambar 4:
Permutasi β dan permutasi β yang dibangkitka oleh β'

Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu graf membentuk group simetri penuh (sebut saja S_n), maka permutasi dari pasangan titik itu (garis) itu juga membentuk group Simetri (sebut R_n). Jadi group S_n (permutasi titik pada graf) akan membangkitkan group Rn (permutasi garis pada graf). Seluruh bentuk group S_4 ada 24, yaitu:

g_1 = (1)(2)(3)(4)	g_2 = (14)(2)(3)
g_3 = (1)(24)(3)	g_4 = (1)(2)(34)
g_5 = (12)(3)(4)	g_6 = (124)(3)
g_7 = (142)(3)	g_8 = (12)(34)
g_9 = (13)(2)(4)	g_{10} = (143)(2)
g_{11} = (134)(2)	g_{12} =(13)(24)
g_{13} = (1)(23)(4)	g_{14} = (14)(23)
g_{15} = (1)(234)	g_{16} = (1)(243)
g_{17} = (123)(4)	g_{18} = (1423)
g_{19} = (1243)	g_{20} = (1234)
g_{21} = (132)(4)	g_{22} = (1432)
g_{23} = (1342)	g_{24} = (1324)

Tipe untai dari S_4 ada 5, yaitu:

- bentuk [4,0,0,0] ada 1 buah dan indeks sikliknya: x_1^4
- bentuk [2,1,0,0] ada 6 buah dan indeks sikliknya: $x_1^2x_2$
- bentuk [1,0,1,0] ada 8 buah dan indeks sikliknya: x_1x_3
- bentuk [0,2,0,0] ada 3 buah dan indeks sikliknya:
- x_2^2
- bentuk [0,0,0,6] ada 6 buah dan indeks sikliknya: x_4

Seperti pada Gambar 4, indeks siklik pada group S akan membangkitkan indeks x_2x_4 pada group R_4 Maka indeks siklik $x_1^2x_2$ pada S_4 akan membangkitkan indeks siklik $x_1^2x_2^2$. Contoh kongkritnya pada permutasi α = (1)(24)(3) pada S_4, perubahannya adalah sebagai berikut:

$$\hat{a} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \text{akan membangkitkan } \hat{a}' = \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 24 & 21 & 23 & 41 & 43 & 13 \end{matrix}$$

atau α' = (12 14)(23 34)(24)(13) yang bertipe $x_1^2x_2^2$

Keseluruhan perubahan indeks siklik dari group S_4 menjadi indeks siklik R_4 , adalah sebagai berikut: $x_1^4 \rightarrow x_1^6$; $x_1^2x_2 \rightarrow x_1^2x_2^2$; $x_1x_3 \rightarrow x_3^2$; $x_2^2 \rightarrow x_1^2x_2^2$; $x_4 \rightarrow x_2$; x_4 sedangkan banyaknya tiap jenis tidak mengalami perubahan. Dari Definisi 2.8 maka didapat:

$$Z(R_4;x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2x_4\right] \qquad ......(***).$$

Aplikasi Teorema Polya I:

Ada 2 keadaan untuk himpunan Y, yaitu adanya garis pada pasangan titik dan tidak adanya garis pada pasangan titik, sehingga r = 2 . Dari persamaan (***) ambillah $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = r = 2$, maka didapat:

$$Z(R_4;2,2,2,2) = \frac{1}{24}\; 2^6 + 6.2^2.2^2 + 8.2^2 + 3.2^2.2^2 + 6.2.2 \;= 11$$

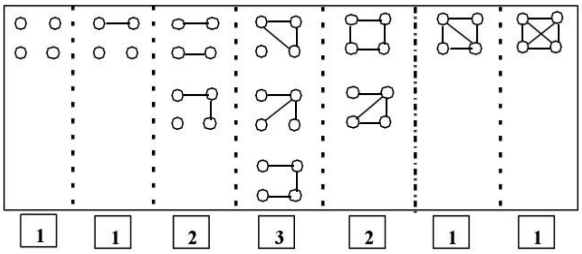
atau untuk graf yang memuat 4 titik, maka akan terdapat 11 graf yang tak isomorfis.

Aplikasi Teorema Polya II:

Ambil dua bobot pada himpunan Y, yaitu w(y1)= tak ada garis = T dan w(y2) = ada garis = A . Kemudian substitusikan $x_1 = T + A$, $x_2 = T^2 + A^2$, $x_3 = T^3 + A^3$, dan $x_4 = T^4 + A^4$ pada persamaan (***), sehingga didapat:

$$Z(R_4;x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{24}[(T+A)^6 + 9(T+A)^2(T^2+A^2)^2 +$$
$$8(T^3+A^3)^2 + 6(T^2+A^2)(T^4+A^4)] \text{ atau}$$
$$Z(R_4;x_1,x_2,x_3,x_4) = \mathbf{1}T^6 + \mathbf{1}T^5A + \mathbf{2}T^4A^2 + \mathbf{3}T^3A^3 + \mathbf{2}T^2A^4 + \mathbf{1}TA^5 + \mathbf{1}A^6.$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri dari 4 titik akan ada sebanyak 1 graf yang tanpa garis, akan ada sebanyak 1 graf dengan 1 garis, akan ada sebanyak 2 graf dengan 2 garis, akan ada sebanyak 3 graf dengan 3 garis, akan ada sebanyak 2 graf dengan 4 garis, akan ada sebanyak 1 graf dengan 5 garis, dan akan ada sebanyak 1 graf dengan 6 garis.



Gambar 5:
Graf terdiri dari n = 4 titik dan kelas-kelas kongruensinya

5. Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang didapat dari tulisan ini:

1. Dalam tulisan ini penulis telah menyajikan teknik untuk menghitung banyak (jumlah) graf sederhana yang tidak isomorfis dengan menggunakan Teorema Polya yang di mulai dengan membangkitkan group permutasi titik terlebih dahulu.
2. Penggunaan Teorema Polya I berhubungan dengan banyaknya graf sederhana yang terdiri dari n titik dan tidak isomorfis antara satu graf dengan yang lainnya.
3. Penggunaan Teorema Polya II berhubungan dengan banyaknya graf sederhana yang memuat n titik dan k garis serta tidak isomorfis antara satu graf dengan yang lainnya.

Daftar Referensi

[1] Balakrishnan V.K., *"Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics"*, McGraw Hill Inc. , 1995.

[2] Deo N., *"Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science"*, Prentice-Hall of India Private Limited, 1987.

[3] Deo N., Nievergelt J. & Reingold E.M., *"Combinatorial Algorithms": Theory and Practice*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, 1977.

[4] Herstein I.N., *"Abstract Algebra"*, Macmillan Publishing Company, 1986.

[5] Wilson R.J. & Watkins J.J., *"Graphs An Introductory Approach"*, John Wiley & Sons Inc, 1990.