Penerapan Kombinatorik dalam Penyelesaian Permainan *Mastermind*™

Satrio Adi Rukmono – NIM: 13506070
Program Studi Teknik Informatika ITB, Bandung 40132, email: if16070@students.if.itb.ac.id

***Abstraksi** – Permainan* Mastermind™ *merupakan permainan papan* (board game) *yang unik dan menarik, di mana seorang pemain harus memecahkan kode yang dibuat oleh pemain lain dengan jumlah langkah tak lebih dari jumlah langkah maksimum yang ditentukan. Makalah ini membahas penerapan kombinatorik pada penyelesaian permainan yang telah berusia lebih dari tiga puluh tahun ini dalam sesedikit mungkin langkah, memberikan kemenangan pasti bagi pemain kedua.* Mastermind™ *Merupakan merk terdaftar dari Invicta Plastic, Oadby, Inggris.*

***Kata Kunci**:* Mastermind, Master Mind, game, board game*, papan permainan, permutasi, kombinatorik, Mordecai Mairowitz.*

1. PENDAHULUAN

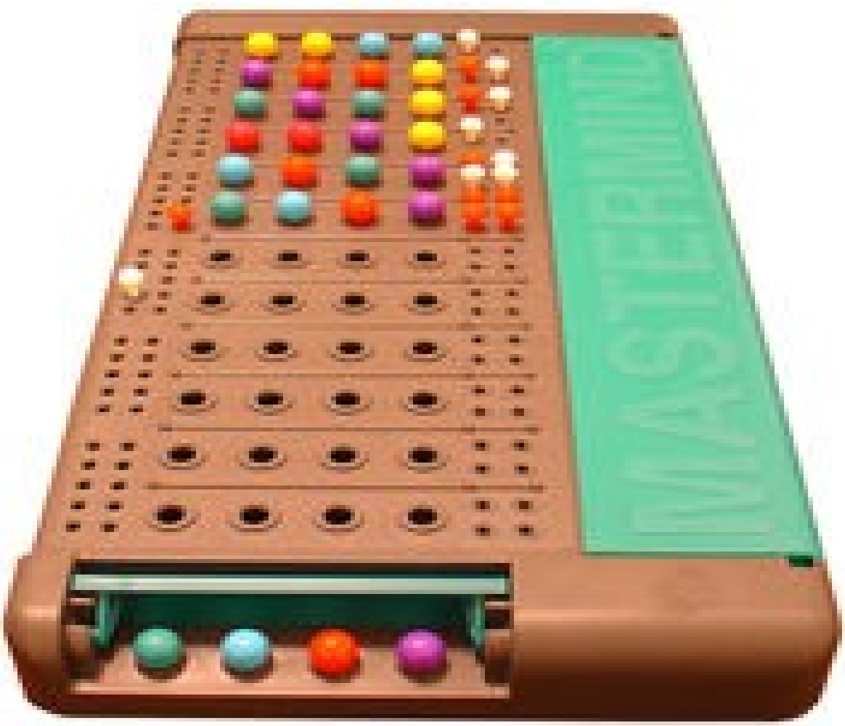
Mastermind™ (beberapa literatur menulskannya terpisah – *Master Mind*) merupakan sebuah permainan pemecahan kode (*code-breaking*) untuk dua orang pemain yang diciptakan pada tahun 1970 oleh Mordecai Mairowitz, seorang ahli telekominkasi dari Israel. Permainan ini menimbulkan persoalan yang menarik, yaitu bagaimana memecahkan kode dalam sesedikit mungkin langkah.

2. PERMAINAN *MASTERMIND*™

Permainan Mastermind™ dimainkan oleh dua orang pemain. Seorang pemain bertindak sebagai pembuat kode (*codemaker*), sedangkan pemain yang lain – pemecah kode (*codebreaker*) – bertugas memecahkan kode yang dibuat oleh pemain pertama.

Codemaker membuat sebuah kode berupa urutan empat buah bola berwarna yang masing-masing dipilih dari enam warna yang tersedia, dengan memungkinkan adanya perulangan. Kode yang dibuat ini tidak boleh diberitahukan kepada *codebreaker*.

Codebreaker harus memecahkan urutan warna bola-bola ini dengan cara menebak. Pada setiap langkah, *codebreaker* menebak urutan empat warna. *Codemaker* merespon tebakan ini dengan memberikan dua buah angka: angka pertama menunjukkan jumlah



Gambar 1: papan permainan *Mastermind*

bola yang memiliki warna yang tepat pada tempat yang tepat, sedangkan angka kedua menunjukkan jumlah bola yang memiliki warna yang tepat namun berada pada tempat yang salah. Selanjutnya codebreaker kembali menebak dan codemaker merespon, dan berulang terus hingga permainan berakhir, yaitu jika permainan telah mencapai jumlah langkah maksimum yang diperbolehkan atau codebreaker berhasil memecahkan kode sebelum langkahnya habis. Biasanya jumlah maksimum langkah yang diperbolehkan adalah 12 langkah, walaupun sesuai perjanjian angka ini dapat berubah menjadi sepuluh atau bahkan delapan.

Sebagai contoh, apabila *codemaker* membuat kode sebagai berikut:

merah, kuning, hijau, hijau

dan *codebreaker* menebak:

merah, hijau, biru, hijau

maka *codemaker* akan mersepon dengan pasangan angka:

2, 1

karena dua warna tebakan *codebreaker* berada pada tempat yang tepat, yaitu merah (posisi I) dan hijau (posisi IV), dan satu warna, yaitu hijau (pada posisi II dalam tebakan *codebreaker*) berada pada posisi yang salah (seharusnya posisi III).

3. METODE PEMECAHAN KODE

Untuk memudahkan penghitungan, anggaplah urutan warna yang dipilih oleh *codemaker* adalah (c_1, c_2, c_3, c_4), tebakan dari *codebreaker* adalah (g_1, g_2, g_3, g_4), dan pasangan angka yang merupakan respon dari *codemaker* adalah *(b, w)*. Selain itu, representasikan tiap-tiap warna dengan angka-angka 1, 2, 3, 4, 5 dan 6, sehingga kode yang dibuat oleh *codemaker* pada contoh yang telah dikemukakan sebelumnya dapat ditulis kembali sebagai (1, 3, 5, 5), tebakan *codebreaker* sebagai (1, 5, 2, 5), dan respon dari *codemaker* sebagai (2, 1).

Yang menarik, w dapat dihitung sebagai

$$w=\left(\sum_{i=1}^{6} min(c_i, g_i)\right)-b \quad (1)$$

dengan c_i adalah jumlah kemunculan warna *i* pada kode yang dibuat *codemaker* dan g_i adalah jumlah kemunculan warna *i* pada tebakan *codebreaker*[1].

Dengan empat buah bola yang masing-masing dipilih dari enam warna, jumlah pola yang dapat dibentuk adalah $6\times6\times6\times6=1296$ pola.

Sedangkan banyaknya kemungkinan tebakan yang dibuat, yaitu banyaknya pasangan bilangan *(b, w)* yang mungkin adalah empat belas buah, dengan rincian sebagai berikut:

1) (0, 0)
2) (0, 1)
3) (1, 0)
4) (0, 2)
5) (1, 1)
6) (2, 0)
7) (0, 3)
8) (1, 2)
9) (2, 1)
10) (3, 0)
11) (0, 4)
12) (1, 3)
13) (2, 2)
14) (4, 0), yaitu tebakan benar.

Sebelum tebakan pertama, ada 1296 solusi yang mungkin, tetapi, setelah tebakan pertama dan respon dari *codemaker*, jumlah solusi yang mungkin akan berkurang. Sebagai contoh, jika (1, 1, 1, 1) dipilih sebagai tebakan pertama, respon yang mungkin hanyalah pasangan *(b, w)* dengan *w=0*, yaitu (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), dan (4, 0). Dengan demikian, dari ke-1296 cara menyusun bola dapat disusun lima buah kategori umum berdasarkan banyaknya perulangan.

- Tanpa perulangan, yaitu *(a, b, c, d)*,
- Satu perulangan (duplet), yaitu *(a, a, b, c)*,
- Dua perulangan (triplet), yaitu *(a, a, a, b)*,
- Dua perulangan (dua buah duplet), yaitu *(a, a, b, b)*,
- Tiga perulangan, yaitu *(a, a, a, a)*.

Dengan $a, b, c, d \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dengan kelima kategori tersebut digunakan sebagai tebakan pertama, reduksi jumlah solusi yang mungkin ditunjukkan dalam tabel 1[2].

Sebagai contoh, jika tebakan pertama adalah *(a, a, b, b)*, dan *codemaker* merespon dengan (0, 2), secara logis hanya tersisa 96 kemungkinan solusi yang mungkin. Jika beruntung, dengan tebakan pertama *(a, a, b, b)* dan direspon dengan (0, 4), maka hanya ada satu kemungkinan, yaitu *(b, b, a, a)*, sehingga *codebreaker* menang hanya dalam dua langkah.

Jika tebakan ini, *(a, a, b, b),* diambil sebagai tebakan pertama, maka seburuk apapun respon yang diberikan, sebanyak-banyaknya hanya akan ada 256 kemungkinan solusi yang tersisa. Bandingkan dengan tebakan (a, a, a, a), di mana kasus terburuk meninggalkan 625 kemungkinan solusi. Maka, secara logis, tebakan (a, a, b, b) adalah tebakan yang cocok untuk digunakan sebagai tebakan pertama.

(b, w)	Tebakan pertama				
	(a, b, c, d)	*(a, a, b, c)*	*(a, a, a, b)*	*(a, a, b, b)*	*(a, a, a, a)*
(0, 0)	16	81	256	256	625
(0, 1)	152	276	256	308	0
(1, 0)	108	182	256	317	500
(0, 2)	312	222	96	61	0
(1, 1)	252	230	208	156	0
(2, 0)	96	105	114	123	150
(0, 3)	136	44	16	0	0
(1, 2)	132	84	36	27	0
(2, 1)	48	40	32	24	0
(3, 0)	20	20	20	20	20
(0, 4)	9	2	1	0	0
(1, 3)	8	4	0	0	0
(2, 2)	6	5	4	3	0
(4, 0)	1	1	1	1	1

Tabel 1: reduksi jumlah solusi yang mungkin dengan berbagai tebakan pertama dan responnya

3.1. Memecahkan Kode dalam Enam Tebakan

Algoritma yang paling sederhana untuk memecahkan kode pada *Mastermind*^{TM} berupa gaya brutal (*brute force*). Algoritma ini dipercaya mampu memecahkan kode dalam enam tebakan atau kurang[3].

Secara umum, metode yang digunakan pada algoritma ini membuat sebuah daftar berisi semua kemungkinan solusi berdasarkan petunjuk yang ada. Daftar ini diurutkan secara menaik berdasarkan banyaknya perulangan pada setiap tebakan. Sebelum tebakan pertama, daftar tersebut berisi seluruh 1296 pola, dan karena daftar tersebut diurutkan sedemikian rupa, maka tebakan pertama selalu (1, 2, 3, 4). Jika respon yang diterima, misalnya, adalah (0, 0), maka daftar yang terbentuk setelah langkah pertama ini terdiri dari 16 buah pola yang hanya melibatkan warna-warna 5 dan 6. Tebakan yang selanjutnya dibuat adalah elemen pertama dari daftar yang terbentuk pada langkah sebelumnya, dengan perkecualian:

- tebakan kedua selalu (2, 3, 4, 5)
- tebakan ketiga selalu (3, 4, 5, 6)
- jika elemen pertama dari daftar yang terbentuk pada langkah ketiga berada pada kolom A dari tabel di bawah ini, gunakan kolom B, bukan kolom A, sebagai tebakan keempat:

No.	A	B
1	(1, 3, 6, 2)	(4, 3, 1, 4)
2	(1, 5, 2, 6)	(5, 4, 6, 4)
3	(1, 5, 6, 2)	(5, 1, 3, 3)
4	(1, 6, 2, 5)	(2, 6, 3, 4)
5	(2, 1, 6, 5)	(5, 1, 4, 3)
6	(2, 5, 1, 6)	(5, 4, 1, 5)
7	(2, 5, 6, 1)	(5, 5, 4, 1)
8	(5, 1, 2, 6)	(6, 4, 6, 2)
9	(1, 1, 4, 2)	(2, 1, 2, 4)
10	(1, 2, 1, 5)	(2, 2, 3, 3)
11	(1, 5, 1, 6)	(3, 6, 6, 5)
12	(3, 1, 6, 1)	(6, 4, 6, 1)
13	(1, 1, 6, 6)	(4, 4, 4, 6)

Tabel 2: perkecualian dalam pemilihan langkah keempat

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa pola yang paling baik digunakan untuk tebakan pertama adalah *(a, a, b, b)*, algoritma pemecahan kode dalam enam langkah ini bukanlah algoritma yang mangkus.

3.2. Memecahkan Kode dalam Lima Tebakan

Pada tahun 1977, Donald Ervin Knuth menunjukkan bahwa *codebreaker* dapat memecahkan kode pada *Mastermind*^{TM} dalam lima langkah atau kurang. Algoritma yang digunakan oleh Knuth mereduksi jumlah pola yang mungkin secara progresif[3]. Algoritma ini membutuhkan rata-rata jumlah langkah untuk semua kasus sebesar 4,478 langkah.

Cara kerja algoritma ini adalah sebagai berikut:

1) Tebakan pertama adalah (1, 1, 2, 2).
2) Cari semua pola (dari 1296) yang memberikan *b* dan *w* yang sama jika pola tersebut adalah jawaban yang benar. Buang semua pola yang tidak memenuhi.
3) Untuk setiap pola yang tersisa (kecuali jika tinggal satu pola – yaitu pola yang tepat) dan setiap nilai *b* dan *w* yang mungkin, hitung berapa banyak pola yang bisa dieliminasi. Cari nilai minimum dari angka-angka ini, menjadi nilai dari setiap pola yang tersisa. Ambil pola dengan nilai terbesar sebagai

tebakan selanjutnya.

4) Kembali ke langkah 2 hingga kode terpecahkan.

Dalam *pseudocode* ditulis sebagai berikut:

```
while bScore != 0
{selama solusi belum didapat}
 if numberOfTries == 0
  {tebakan pertama}
  guess("aabb")
  {"aabb" menunjukkan tebakan
   (a, a, b, b)}
 else
  {tebakan-tebakan berikutnya}
  maximumGuess = ""
  maximumGuessScore = 0
 foreach possibleGuess
  {cari nilai terbesar dari setiap
   pola yang mungkin}
  thisScore = 9999
  foreach possibleScore
   number_of_removals =
       count_removals(guess, score)
   thisScore = min(number_of_
                removals, thisScore)
  if thisScore > maximumGuessScore
   maximumGuessScore = thisScore
   maximumGuess = guess
 guess(maximumGuess)
```

Gambar 2: *pseudocode* algoritma Knuth

Setelah Knuth, banyak matematikawan yang membuat variasi dari algoritma ini. Variasi yang dibuat tidak bertujuan untuk menurunkan jumlah langkah maksimum dalam memecahkan kode, karena untuk empat buah bola yang masing-masing dipilih dari enam warna, jumlah langkah maksimum yang terkecil adalah 5 (dijelaskan pada subbab 3.4). Variasi algoritma ini hanya bertujuan untuk menurunkan rata-rata jumlah langkah dalam memecahkan kode.

Pencapaian terbaik ditemukan oleh Kenji Koyama dan Tony W. Lai pada tahun 1993 dengan rata-rata jumlah langkah adalah $\frac{5625}{1296}=4{,}340$ dengan hanya satu buah kasus yang membutuhkan enam langkah[4]. Selanjutnya, Kenji Koyama dan Tony W. Lai, masih pada tahun yang sama, berhasil menemukan solusi lain yang menaikkan sedikit angka rata-rata menjadi 4,341 tetapi menurunkan jumlah langkah maksimum yang terkecil menjadi lima langkah.

Swaszek, pada tahun 1999-2000 membuat sebuah analisis strategi praktis tanpa membutuhkan penghitungan rumit dengan komputer ataupun menyimpan data pola yang mungkin, melainkan hanya menggunakan tebakan acak dari pola-pola yang tersisa. Cara ini ternyata secara mengejutkan memberikan angka rata-rata yang cukup kecil, yaitu 4,638, sedangkan dengan metode yang serupa, tapi menebak dengan berurutan, dan bukannya acak, rata-rata yang dihasilkan hanya 4,758. Hal ini sekali lagi membuktikan bahwa otak manusia dengan intuisinya melebihi mesin tercanggih sekalipun.

Gambar 3: Donald Ervin Knuth

3.3. Solusi Statis

Setelah mengetahui jumlah langkah maksimum terkecil dan rata-rata jumlah langkah minimum dalam memecahkan kode dalam *Mastermind*^{TM}, timbul persoalan baru: adakah rangkaian pola tunggal yang dapat digunakan untuk menebak semua kasus yang mungkin (1296 kasus!) dalam jumlah langkah yang masih diperbolehkan?

Chvatal pada tahun 1983 menemukan bahwa hal ini dapat dilakukan, dan pada tahun 2002, Greenwell menemukan jumlah langkah yang dipercaya sebagai yang terkecil untuk solusi statis ini, yaitu enam buah tebakan[1]. Setelah setiap tebakan, *codebreaker* bahkan tidak perlu menunggu respon dari *codemaker*. Respon untuk keenam tebakan tersebut dapat diberikan setelah keenam tebakan dilontarkan, dan *codebreaker* tetap dapat memecahkan kodenya pada langkah ketujuh. Keenam langkah tersebut adalah

1) (1, 2, 2, 1),
2) (2, 3, 5, 4),
3) (3, 3, 1, 1),

4) (4, 5, 2, 4),
5) (5, 6, 5, 6),
6) (6, 6, 4, 3).

Tidak diketahui apakah jumlah langkah ini masih bisa dikurangi lagi menjadi lima (untuk memeriksanya membutuhkan $6^{5\times 4}=6^{20}\approx 3{,}7\times 10^{15}$ perhitungan), walaupun dipercaya tidak.

3.4. Variasi Permainan

Versi asli permainan *Mastermind*^{TM} yang dibuat oleh Mordecai Mairowitz menggunakan empat buah bola yang masing-masing dipilih dari enam warna yang berbeda. Hal ini tentunya tidak menutup kemungkinan dibuatnya variasi, antara lain dalam jumlah warna yang diperbolehkan. Bagaimana pengaruhnya jika tiap bola dari keempat bola tersebut dipilih dari, misalnya, delapan warna yang berbeda? Apa pengaruhnya terhadap jumlah langkah maksimum yang terkecil yang dapat digunakan untuk memecahkan kodenya?

Anggaplah jumlah warna yang diperbolehkan adalah *N* buah warna. Dengan algoritma terbaik, jumlah langkah maksimum terkecil yang diperlukan adalah fungsi G(*N*) yang selalu bertambah besar dengan bertambahnya *N*. Sebagai contoh, untuk *N* = 1, hanya ada satu pola yang terbentuk, sehingga G(1) = 1. Untuk *N* = 2, ada 16 pola yang terbentuk, dengan pasangan *(b, w)* yang mungkin sebanyak 14 buah, sehingga tidak setiap pola dapat dipecahkan dalam satu langkah. Diperlukan satu langkah lagi untuk menentukan solusi yang benar, dan satu langkah lagi untuk solusi yang benar tersebut, maka G(2) >= 3. Pada *Mastermind*^{TM} standar (dengan *N* = 6), seperti yang telah dilihat pada subbab-subbab sebelumnya, memiliki G(6) <= 5. Berikut merupakan bukti bahwa G(6) = 5.

Setiap tebakan akan memberikan tepat satu buah respon dari 14 respon yang ada. Satu dari ke-14 respon tersebut mengindikasikan tebakan yang benar, yaitu (4, 0). Oleh karena itu, dua buah tebakan akan memberikan sebanyak-banyaknya $(13\times 14)+1$ = 183 solusi yang mungkin.

Bagaimanapun, berdasarkan analisis pada bagian pembukaan dari bab 3 menunjukkan bahwa sebaik apapun tebakan pertama yang dibuat, kasus terburuk tetap memberikan sekurang-kurangnya 256 pola yang mungkin. Jadi setelah dua langkah selanjutnya, solusi belum tentu dapat ditentukan. Dengan demikian dibutuhkan paling sedikit lima langkah, sehingga dapat ditulis bahwa G(6) <= 5. Namun sebelumnya telah kita lihat bahwa G(6) >= 5, sehingga G(6) = 5.

Untuk kasus yang lebih umum, untuk *N* buah warna, terdapat sebuah teorema yang dikemukakan oleh Graham Nelson[2]:

$$\lceil N/4\rceil \leqslant G(N) \leqslant \lceil N/4\rceil + 12 + G(4) \quad (2)$$

untuk N bilangan bulat positif.

Pembuktian:
Untuk warna-warna $c_1, c_2, ..., c_N$, gunakan (c_1, c_2, c_3, c_4) sebagai tebakan pertama, lalu (c_5, c_6, c_7, c_8) sebagai tebakan kedua, ($c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$) sebagai tebakan ketiga dan seterusnya, hingga sebanyak $\lceil N/4\rceil$ tebakan. Langkah ini mengurangi jumlah warna yang mungkin berada pada kode hingga sebanyak-banyaknya 16 warna, karena setidaknya empat dari tebakan-tebakan yang dibuat memiliki warna yang tepat. Dengan demikian dapat ditentukan warna-warna apa saja yang digunakan pada solusi yang tepat dalam 12 tebakan. Misalkan tebakan (c_1, c_2, c_3, c_4) menerima respon sebanyak *M* = (*b* + *w*) di mana $1 \leqslant M \leqslant 4$. Kemudian, untuk tebakan-tebakan berikutnya, gunakan (c_1, c_1, c_1, c_1), (c_2, c_2, c_2, c_2), dan (c_3, c_3, c_3, c_3). Jika ada di antara tebakan tersebut yang mendapat respon *b* + *w* > 0, maka warna tersebut ada pada solusi yang sebenarnya. Jika pada setiap tebakan itu nilai *w* > 0, maka nilai *w* menunjukkan berapa kali warna tersebut muncul dalam solusi. Jadi jika jumlah seluruh (*b* + *w*) pada ketiga tebakan tersebut lebih kecil dari *M*, maka warna c_4 juga terdapat dalam solusi yang tepat. Langkah-langkah ini akan berulang hingga sebanyak-banyaknya 12 kali.

Langkah tersebut memperkecil masalah hingga sekecil variasi *Mastermind*^{TM} dengan *N* = 4, sehingga sebanyak-banyaknya dibutuhkan G(4) tebakan lagi. Dengan demikian terbukti bahwa

$$G(N) \leqslant \lceil N/4\rceil + 12 + G(4) \quad (3)$$

yang merupakan bagian kanan dari pertidaksamaan (2).

Untuk bagian kiri dari pertidaksamaan (2), anggaplah bahwa $\lceil N/4\rceil \leqslant G(N)$ salah. Berarti algoritma terbaik dapat memecahkan kode dalam kurang dari *N*/4 tebakan, tetapi ini berarti bahwa tidak semua *N* warna digunakan dalam setiap kode yang mungkin, sehingga tidak dapat dibedakan dari himpunan {(c_1, c_1, c_1, c_1), ..., (c_N, c_N, c_N, c_N), (c_1, c_2, c_1, c_2)}. Dengan demikian persamaan (2) terbukti.

Sebagai contoh
$250{,}000 \leqslant G(1{,}000{,}000) \leqslant 250{,}017$.

4. KESIMPULAN

Permainan *Mastermind*^{TM} standar dapat dipecahkan secara dinamis dalam jumlah langkah maksimum terkecil sebanyak lima langkah, dan secara statis dalam enam atau tujuh langkah.

Variasi permainan dengan N warna berbeda yang diperbolehkan menghasilkan jumlah tebakan maksimum terkecil yang selalu bertambah seiring bertambahnya N. Secara spesifik,

$$\lceil N/4 \rceil \leqslant G(N) \leqslant \lceil N/4 \rceil + 12 + G(4) \quad (2)$$

DAFTAR REFERENSI

[1] Weisstein, Eric W. "Mastermind." http://mathworld.wolfram.com/Mastermind.html (tanggal akses 30 Desember 2007, pukul 16:42)

[2] Nelson, Toby. "Investigations into the Master Mind^{TM} Board Game." http://www.tnelson.demon.co.uk/mastermind/index.html (tanggal akses 31 Desember 2007, pukul 10:50)

[3] "Mastermind (board game)." http://en.wikipedia.org/wiki/Mastermind_%28board_game%29 (tanggal akses 30 Desember 2007, pukul 16:31)

[4] Kenji Koyama, Tony W. Lai, "An Optimal Mastermind Strategy". *Journal of Recreational Mathematics*, 1993.