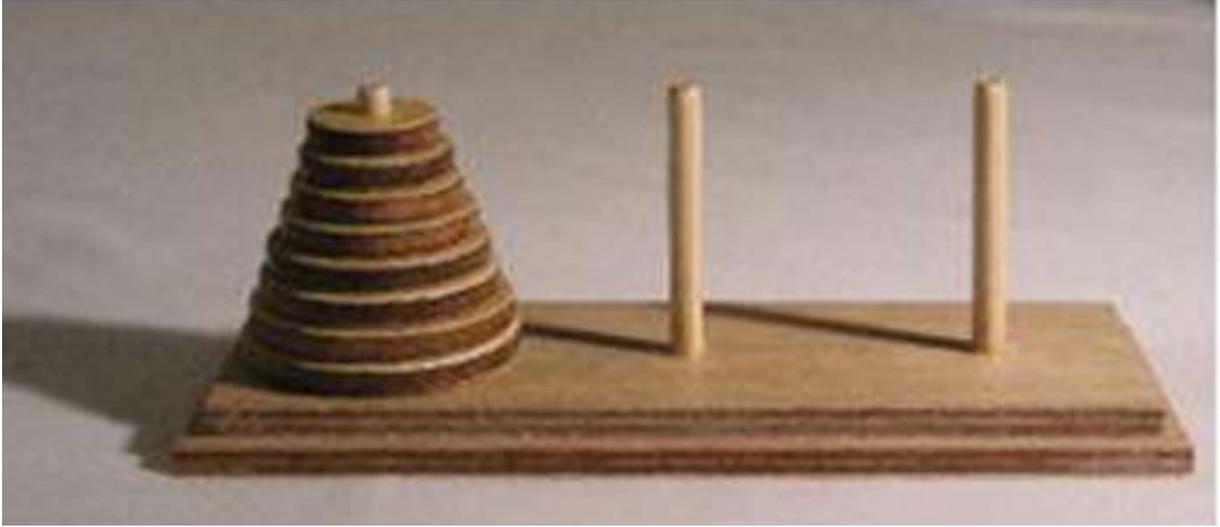


# Towers Of Hanoi Beserta Aplikasinya

Ibnu Mas'ud – NIM : 13506034

Jurusan Teknik Informatika ITB, Jalan Ganesha 10 Bandung E-mail : [if16034@students.if.itb.ac.id](mailto:if16034@students.if.itb.ac.id)



Gambar 2.1: Teka-teki *towers of Hanoi*

**Abstract** – Makalah ini membahas tentang asal-usul teori, solusi, serta aplikasi dari Tower of Hanoi yang pada awalnya ditemukan oleh seorang ilmuwan matematika dari Prancis yang bernama Édouard Lucas pada tahun 1883. Beliau terinspirasi dari sebuah kuil yang terdapat di Hanoi, Vietnam. Di dalam kuil tersebut terdapat tiga tiang yang berisi 64 keping emas. Seorang pendeta Brahmana menyatakan bahwa apabila kepingan tersebut telah berpindah tiang dari satu tiang ke tiang yang lainnya dengan urutan yang sama maka dunia akan kiamat. Lucas terinspirasi membuat aplikasi teka-teki tersebut, mempelajarinya dan berusaha memecahkan persoalan tersebut dipandang dari sudut matematika.

**Kata Kunci** : Tower Of Hanoi, Solusi, Piringan, tiga tiang, teka-teki.

## 1. PENDAHULUAN

*Towers Of Hanoi* adalah sebuah legenda dari sebuah kuil umat budha yang berada di daerah Hanoi, Vietnam. Kuil tersebut mengajarkan salah satu pelajaran dasar matematika kepada para pendeta mudanya menggunakan teka-teki piramid. Berdasarkan legenda, dahulu kala ada seorang pendeta Brahmana yang menyatakan kepada murid-muridnya tentang teka-teki tersebut, ketika pemindahan tower itu telah selesai maka dunia akan kiamat.

## 2. TEKA-TEKI TOWERS OF HANOI

Hanoi adalah ibukota negara Vietnam, yang berlokasi disamping sungai merah. Agama penduduk di kota

Hanoi di dominasi oleh tiga faham, yaitu Budha Mahayana, Konfusianisme, dan Taoisme. Akan tetapi mayoritas penduduk di kota Hanoi menganut agama budha.

Sistem pendidikan di kota Hanoi berdasarkan ajaran konfusianisme sehingga sudah terbiasa dengan ajaran-ajaran yang melibatkan teka-teki yang bernuansa matematika.

Dikisahkan di dalam sebuah kuil budha di Hanoi, Vietnam [Gambar 2.2] terdapat tiga buah tiang tegak setinggi 5 meter dan memiliki 64 buah tumpukan piringan emas dengan ukuran yang berbeda. Ukurannya dari bawah ke atas semakin mengecil. Tiap piringan memiliki lubang di tengahnya yang memungkinkannya untuk dimasukkan kedalam tiang. Pada mulanya piringan tersebut tersusun pada sebuah tiang.

Pendeta Brahmana yang tadi menyatakan bahwa dunia akan kiamat ketika pemindahan selesai, memberi pernyataan kepada pendeta – pendeta mudanya seperti apa peraturan-peraturan yang diperbolehkan ketika memindahkan seluruh piringan tersebut dari sebuah tiang ke tiang yang lain, yaitu :

- setiap kali pemindahan hanya satu piringan saja yang boleh di pindahkan,
- pemindahan piring berarti memindahkan satu piringan dari sebuah tiang, dan memindahkannya ke tiang yang lain, yang

- berarti piringan tersebut menjadi bagian yang paling atas dari tiang yang tersebut
- c. tidak boleh ada piringan besar di atas piringan yang kecil
  - d. ketika memindahkan piringan, tiang yang satu lagi dapat dipakai sebagai tempat peralihan piringan emas tersebut dengan tetap memegang aturan yang telah dijelaskan.

Menurut legenda yang disebutkan apabila pemindahan seluruh piringan itu berhasil maka dunia akan kiamat.



Gambar 2.2 : Kuil Hanoi, Vietnam

Hal inilah yang membuat Lucas matematikawan asal Prancis tertarik untuk menyelesaikan masalah tersebut secara matematika. Ia membuat aplikasinya dengan memuatkan sebuah teka-teki [Gambar 2.1] yang memiliki kesamaan dengan *Towers Of Hanoi*. Peraturan-peraturannya pun sama dengan yang di cetuskan oleh pendeta brahmana di atas.

### 3. SOLUSI

Solusi-solusi yang telah di temukan hingga saat ini cukup beragam dengan berbagai macam teknik, setiap teknik memiliki keunggulan dan kelemahannya masing-masing.

Lucas menyederhanakan aplikasi permainan towers of Hanoi dengan menggunakan hanya delapan piringan saja untuk memudahkan menemukan solusi baik secara matematis maupun dalam kehidupan nyata.

Solusi-solusi yang telah di temukan, yaitu:

#### 3.1 Menggunakan Metode Rekursif

Seperti yang telah kita ketahui bersama, ketika ada suatu persoalan di dalam perhitungan atau dalam kehidupan yang berhubungan dengan matematika. Kita akan mendapatkan solusi yang lebih mudah ditemukan dan dimengerti apabila persoalan tersebut di pecahkan menjadi masalah yang lebih umum,

barulah menyelesaikan masalah tersebut dengan bagian yang lebih spesifik.

Solusi untuk teka-teki *towers of Hanoi* dengan metode rekursif pun demikian. Pertama-tama kita jabarkan masalah pemindahan piringan dari satu tiang ke tiang yang lainnya menjadi lebih umum.

Secara umum masalah teka-teki *towers of Hanoi* dapat kita jabarkan dengan kata-kata, bagaimana memindahkan tiang yang berisi (n) piringan dari tiang awal (a), menuju tiang yang di tuju (b), sedangkan (c) menjadi tiang yang tersisa dari tiga tiang yang telah di definisikan dua tadi.

Pada awalnya kita dapat melihat bahwa semua masalah yang terdapat dalam teka-teki towers of Hanoi adalah simetri yaitu bagaimana memindahkan piringan dari tiang yang satu ke tiang yang lainnya. Di sini terdapat pengulangan kalimat tiang setiap menyelesaikan masalah.

Apabila solusi yang di inginkan adalah memindahkan piringan yang berjumlah (n) buah dari (a) menuju (b), dengan memberikan sebuah nama untuk kegiatan memindahkan piringan dari tiang awal menuju tiang akhir, berarti nama tersebut dapat digunakan untuk semua piringan yang lain yang kegiatannya sama yaitu pindah dari tiang awal ke tiang akhir.

Hal ini juga berlaku apabila piringan yang tersedia dari tiang awal hanya berjumlah satu atau jumlah piringannya kosong, solusinya tetap sama dan hasilnya pun tetap sama yaitu pindah ke tiang yang di tuju.

Misalkan jumlah piringan yang ada satu buah, maka dengan mudah kita tinggal memindahkannya dari tiang awal ke tiang tujuan karena semua peraturan telah terpenuhi.

Sekarang apabila kita andaikan jumlah piringan lebih dari satu ( $n > 1$ ), maka dimanapun selama proses pemindahan berlangsung, piringan terbesar harus pindah dari tiang awal menuju tiang akhir atau tiang persinggahan tetapi tetap tujuan akhir dari piringan terbesar yaitu tiang akhir. Agar kejadian tersebut dapat terlaksana, syarat wajibnya adalah memindahkan piringan yang di atas piringan tersebut (n-1). Sehingga solusinya ialah memindahkan piringan yang (n-1), dari tiang awal (a) menuju tiang persinggahan (c). Selanjutnya kita dapat memindahkan piringan yang terbesar dari tiang awal (a) menuju tiang akhir (b), akhirnya kita tinggal memindahkan piringan yang lebih kecil (n-1) yang tadi terletak di tiang persinggahan menuju tiang akhir (b). Seperti yang telah di jelaskan tadi, bahwa pemindahan piringan yang terbesar tidak menjadi masalah, sekarang masalahnya adalah memindahkan (n-1) piringan yang tadi berada di tiang persinggahan menuju tiang akhir. Masalah yang dihadapi juga sama dengan yang

sebelumnya yaitu memindahkan piringan yang terbesar dari (n-1) piringan yang ada di tiang (c). Karena masalah yang di hadapi sama maka solusinya pun sama. Misalkan kita merubah tiang persinggahan yang di tempati (n-1) piringan yang lebih kecil menjadi tiang awal, tiang yang telah terisi piringan yang terbesar tetap menjadi tiang tujuan, dan tiang satu lagi yang tidak terpakai menjadi tiang persinggahan, lalu kita tinggal memindahkan (n-2) piringan yang lebih kecil ke tiang persinggahan, setelah itu kita memindahkan tiang yang kedua terbesar ke tiang tujuan.

Strategi yang sama dapat kita lakukan untuk mengurangi masalah dari n-1, n-2, n-3, dan seterusnya hingga tersisa tinggal satu piringan. Hal seperti ini lah yang disebut rekursif. Algoritma ini dapat di jadikan skema dengan cara berikut ini. Berikan identitas kepada piringan tersebut sesuai dengan perubahan ukuran piringan dengan bilangan asli. Sehingga 0 adalah piringan yang terkecil dan n-1 adalah piringan yang terbesar.

Langkah di bawah ini dapat di gunakan untuk memindahkan piringan dari piringan (a) menuju piringan (b), dengan (c) sebagai piringan yang tersisa (persinggahan).

- ❖ Kesatu : jika  $n > 1$  gunakan langkah ini untuk memindahkan n-1 piringan yang lebih kecil dari a menuju c.
- ❖ Kedua : pindahkan piringan terbesar dari a menuju b.
- ❖ Ketiga : jika  $n > 1$  gunakan langkah ini juga untuk memindahkan n-1 piringan yang lebih kecil dari c ke b.

Prosedur rekursif untuk memindahkan n buah piringan dari a ke b adalah :

Hanoi (n,a,b,c)

(a) basis

Jika  $n = 1$ , pindahkan piringan dari A ke B.

(b) rekurens

Jika  $n > 1$ ,

- ❖ Hanoi (n-1,a,c,b)
- ❖ Pindahkan 1 piringan dari a ke b.
- ❖ Hanoi (n-1, c,b,a)

Dengan cara induksi matematika, dapat dengan mudah kita buktikan bahwa prosedur di atas membutuhkan langkah yang paling minimal untuk memindahkan n piringan dari tiang awal menuju tiang akhir.

Dengan menggunakan relasi rekursif, bilangan pasti yang dibutuhkan dari perpindahan piringan dapat di hitung dengan  $2^k - 1$ . solusi ini di dapat dengan memberikan sebuah rumus untuk langkah ke satu dan ketiga berjumlah  $T_{k-1}$  perpindahan, dan langkah kedua ketika berpindah berjumlah  $2T_{k-1} + 1$ .

### 3.2 Menggunakan Metode Non-rekursif

List perpindahan piringan untuk *towers* dari satu tiang ke tiang yang lainnya dengan menggunakan algoritma rekursif memiliki banyak keteraturan. Ketika menghitung perpindahan mulai dari 1, piringan yang asli berpindah ketika memindahkan n buah selama n kali dapat di bagi menjadi 2 bagian. Sehingga setiap perpindahan yang ganjil piringan yang paling kecil termasuk kedalamnya. Lalu, dapat diteliti bahwa piringan paling kecil dari ketinggian n yang ganjil berpindah dari tiang a, b, c, a, b, c, dan seterusnya,. Untuk ketinggian n yang genap skema perpindahan tiangnya adalah a, c, b, a, c, b, dan seterusnya, dimana a adalah tiang awal, b adalah tiang tujuan, dan c adalah tiang persinggahan.

Hal seperti diataslah yang menghasilkan algoritma di bawah ini yang lebih mudah untuk diimplementasikan daripada menyelesaikan teka-teki towers of Hanoi dengan algoritma rekursif.

Perpindahan alternatif selain yang telah dijelaskan di atas, yaitu:

- ❖ Pindahkan piringan yang terkecil ke tiang yang sebelumnya tidak ditempati oleh piringan tersebut
- ❖ Pindahkan piringan yang lain yang dapat di pindahkan (hanya akan ada satu piringan yang memenuhi persyaratan agar dapat berpindah)

Ketika perpindahan yang pertama kali, piringan yang paling kecil pindah ke tiang yang di tuju (b) jika ketinggian tiang tersebut ganjil dan pindah ke tiang yang tersisa atau persinggahan (c) jika ketinggian tiang tersebut genap.

Jadi apabila jumlah piringan genap solusinya adalah sebagai berikut:

1. pindahkan piringan ke-0 dari tiang a ke tiang c
2. pindahkan piringan ke-1 dari tiang a ke tiang b
3. pindahkan piringan ke-0 dari tiang c ke tiang b
4. pindahkan piringan ke-2 dari tiang a ke tiang c
5. pindahkan piringan ke-0 dari tiang b ke tiang a
6. pindahkan piringan ke-1 dari tiang b ke tiang c
7. pindahkan piringan ke-0 dari tiang a ke tiang c
8. pindahkan piringan ke-3 dari tiang a ke tiang b

9. pindahkan piringan ke-0 dari tiang c ke tiang b
10. pindahkan piringan ke-1 dari tiang c ke tiang a
11. pindahkan piringan ke-0 dari tiang b ke tiang a
12. pindahkan piringan ke-2 dari tiang c ke tiang b
13. pindahkan piringan ke-0 dari tiang a ke tiang c
14. pindahkan piringan ke-1 dari tiang a ke tiang b
15. pindahkan piringan ke-0 dari tiang c ke tiang b
16. pindahkan piringan ke-4 dari tiang a ke tiang c
17. dan seterusnya hingga semua berpindah

sehingga kesimpulan dari metode non-rekursif adalah:

- ❖ piringan yang memiliki ketinggian aslinya genap perpindahannya sama dengan piringan yang paling kecil
- ❖ piringan yang memiliki ketinggian aslinya ganjil perpindahannya berlawanan
- ❖ Jika piringannya genap, perpindahannya adalah tiang tujuan, tiang persinggahan, tiang awal, dan seterusnya
- ❖ Jika piringannya ganjil perpindahannya adalah tiang persinggahan, tiang tujuan, tiang awal, dan seterusnya.

### 3.3 Solusi Binary

Posisi piringan dapat dianggap lebih langsung apabila dianggap sebagai *binary* (basis 2). Representasi dari nomor perpindahan (awal keadaan ketika akan berpindah #0, dengan semua digit 0, dan keadaan akhir adalah #  $2^n - 1$ ), menggunakan peraturan di bawah ini:

- ❖ Setiap piringan memiliki satu angka *binary* (bit)
- ❖ Bit yang paling besar mewakili piringan yang paling besar. Nilai 0 mengindikasikan bahwa piringan terbesar ada di tiang awal, sedangkan nilai 1 mengindikasikan bahwa piringan terbesar terletak di tiang akhir atau tujuan
- ❖ *Bitsring* dibaca dari kiri ke kanan, dan tiap bit dapat digunakan untuk mengindikasikan lokasi dari piringan yang bersangkutan
- ❖ Bit yang sama nilainya dengan yang sebelumnya berarti bahwa piringan tersebut berada di atas tumpukan piringan sebelumnya di dalam satu tiang
- ❖ Bit yang berbeda nilainya dengan yang sebelumnya berarti bahwa piringan tersebut

berada di kiri atau di kanan dari piringan yang sebelumnya, aturan yang mengatur kiri dan kananya adalah sebagai berikut:

Asumsikan bahwa tiang awal berada di sebelah kiri dan tiang akhir berada di sebelah kanan

Asumsikan juga “*wrapping*” sehingga tiang sebelah kanan dihitung sebagai tiang “kiri” dari tiang sebelah kiri, dan sebaliknya

Jadikan  $n$  sebagai nomor dari piringan yang terbesar yang dilokasikan di dalam tiang yang sama dengan piringan terbesar yang sama dari tiang sebelah kirinya. Jika  $n$  adalah genap, maka piringan di lokasikan satu tiang dari yang sebelah kiri, dan apabila ganjil, maka piringan di simpan satu tiang di sebelah kanannya.

### 3.4 Solusi Menggunakan Grey Code

Sistem numerik binary dari *Gray Code* memberikan alternatif pemecahan selain yang telah dijelaskan di atas. Sistem *Gray Code*, setiap angka di representasikan dalam bilangan kombinasi binary dari 0s dan 1s, dan hal ini menjadi standard dari sistem penomoran angka. *Gray code* beroperasi dengan premis bahwa setiap nilai berbeda dari nilai-nilai yang telah di berikan sebelumnya dengan perbedaan hanya tepat satu bit saja. Nomor dari bits yang ada di dalam *gray code* sangat penting, dan menggunakan kosong bukan hanya *optional* saja, tidak seperti di dalam sistem penentuan posisi.

Jika penghitungan dari ukuran bit di dalam *gray code* sama dengan nomor dari piringan tertentu yang ada di *Towers of Hanoi*, mulai dengan kosong, dan bertambah secara teratur, lalu bit berubah setiap perpindahan sesuai dengan perpindahan piringan, di mana nilai signifikan bit terkecil adalah piringan terkecil dan nilai signifikan bit terbesar adalah piringan terbesar.

Menghitung perpindahan dari 1 dan memberikan identitas kepada piringan dimulai dari 0 dan bertambah nilai identitasnya sesuai dengan penambahan ukuran piringan, piringan yang utama dipindahkan selama memindahkan  $m$  adalah nomor dimana  $m$  dapat dibagi oleh dua.

Teknik identifikasi diatas disebabkan oleh perpindahan piringan, bukan karena kemana piringan tersebut dipindahkan. Untuk piringan paling kecil, selalu ada dua kemungkinan pemindahan. Untuk piringan yang lainnya selalu ada satu kemungkinan yang mungkin, kecuali ketika semua piringan ada di dalam tiang yang sama, tetapi dalam kasus tersebut bukan hanya piringan yang kecil yang harus di pindahkan atau

tujuannya telah tercapai. Untungnya, di dalam *gray code* terdapat aturan yang mengatakan kemana harus memindahkan piringan terkecil. Asumsikan a menjadi tiang awal, b menjadi tiang tujuan, dan c menjadi tiang yang ketiga yang tersisa. Jika nomor dari piringan ganjil maka perputaran piringan yang terkecil selama di dalam perpindahan tiang adalah a-b-c-a-b-c, dan seterusnya. Jika nomor dari piringan genap, maka ini perputaran piringan terkecil harus terbalik: a-c-b-a-c-b, dan seterusnya.

## 4. APLIKASI

### 4.1 Dalam Neurologi

*Towers Of Hanoi* biasanya digunakan di dalam penelitian-penelitian untuk menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan memori seseorang. *Towers Of Hanoi* di buat untuk mengecek apakah ia amnesia atau tidak dengan dasar apakah ia dapat mengingat memori yang sebelum-sebelumnya yang terdapat di dalam *Towers Of Hanoi*.

### 4.2 Dalam Backup Data

Dalam dunia informasi, Backup adalah membuat salinan dari data yang telah di olah oleh user dan akan menyimpannya di sebuah media penyimpanan.

Hal ini di gunakan di karenakan dalam dunia informasi terdapat berbagai macam aktivitas yang dapat menghilangkan data, seperti virus, kelalaian manusia, media penyimpanan jatuh, terbakar, dll.

*Towers Of Hanoi* digunakan di dalam backup data didalam skema rotasi backup.

Skema rotasi dalam backup memiliki beberapa teknik yang telah di teliti dan diaplikasikan. Diantaranya yaitu:

- a. *Grandfather, father, and son*
- b. *Towers Of Hanoi*
- c. *Incremented Media Method*

Skema backup rotasi itu ialah metode untuk membuat salinan ketika menggunakan banyak media penyimpanan. Skema ini menentukan bagaimana dan kapan waktu yang tepat ketika akan menggunakan atau media penyimpanan yang tersedia. Selain itu, skema ini menentukan media penyimpanan mana yang akan di gunakan dan berapa lama proses penyimpanan itu berlangsung.

Kita hanya akan membahas skema rotasi backup dengan teknik *Towers Of Hanoi* sesuai dengan topik yang sedang dibicarakan. Pembahasan skema teknik *Grandfather, father, and son*, serta teknik *Incremental Media Method* penulis serahkan kepada pembaca.

Bila di bandingkan dengan skema *Grandfather, father,*

and son skema rotasi towers of Hanoi lebih kompleks. Cara kerja skema ini sesuai dengan cara kerja pemindahan piringan emas dari satu tiang ke tiang yang lainnya, yang telah dipaparkan oleh pendeta Brahmana kepada muridnya. Apabila menggunakan solusi rekursif untuk menyelesaikan Towers of Hanoi, merupakan solusi yang 'smart' untuk mengefektifkan pengumpulan backup data yang cukup banyak, sesuai dengan kemampuannya untuk mengulangi kegiatan pemindahan beberapa kali sampai piringan itu pindah semuanya ke tiang yang di tuju.

Penjabaran skema rotasi mem-backup dengan teknik Towers of Hanoi kenyataannya lebih kompleks untuk dimengerti. Pada dasarnya setiap media penyimpanan (*tape*) diasosiasikan dengan piringan yang berada didalam teka-teki *towers of Hanoi*. Media penyimpanan yang banyak seakan-akan di tumpuk layaknya piringan, sesuai dengan peraturan teka-teki tersebut piringan yang dapat di pindahkan hanya yang paling atas, dan piringan tersebut akan menempati urutan paling atas di dalam tiang yang lainnya. Proses mem-backup data dilakukan ketika media penyimpanan yang seolah-olah berpindah dari satu tiang ke tiang yang lainnya. Di tiang yang di tuju proses penyimpanan data untuk keperluan backup dilaksanakan. Perilaku ini mirip dengan pemindahan piringan emas yang tertera di dalam teka-teki *towers of Hanoi*. Perilaku ini akan diulangi dan diulangi kembali sampai media tempat penyimpanan berpindah ke 'tiang' yang di tuju.

## 5. KESIMPULAN

*Towers Of Hanoi* adalah sebuah teka-teki untuk memindahkan piringan dari suatu tempat ke tempat yang di tuju. *Towers Of Hanoi* dapat diselesaikan dengan berbagai macam cara matematik. Selain itu juga seringa digunakan untuk alat pengetes amnesia seseorang dan digunakan sebagai skema dalam metode pem-backup-an data.

## DAFTAR REFERENSI

- [1] Munir, rinaldi, "Matematika Diskrit", edisi keempat, Teknik Informatika ITB, 2006.
- [2] Munir, rinaldi, "Algoritma dan Pemrograman", edisi ke-3, Penerbit Informatika, 2006.
- [3] [http://en.wikipedia.org/wiki/Towers\\_of\\_Hanoi](http://en.wikipedia.org/wiki/Towers_of_Hanoi) Desember-Januari.
- [4] <http://en.wikipedia.org/wiki/Backup> Desember-Januari.
- [5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Backup\\_Rotation\\_Scheme](http://en.wikipedia.org/wiki/Backup_Rotation_Scheme) Desember-Januari.