Penerapan Pewarnaan Graf dalam Teka-teki Sudoku

Lea Angelina – NIM : 13506117

Program Studi Teknik Informatika
Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10, Bandung
E-mail: if16117@students.if.itb.ac.id

***Abstrak** – Makalah ini membahas tentang berbagai penerapan pewarnaan graf dalam teka-teki Sudoku. Polinomial kromatik dan Sudoku berkaitan erat. Maka itu, terdapat berbagai macam penerapan pewarnaan graf dalam teka-teki Sudoku.*

Bilangan kromatik adalah jumlah warna minimal yang dibutuhkan untuk mewarnai simpul-simpul pada graf sehingga tidak ada simpul-simpul yang bertetangga, yaitu terhubung langsung dengan sebuah sisi, memiliki warna yang sama. Sedangkan polinomial kromatik adalah jumlah cara sebuah graf dapat diwarnai dengan menggunakan tidak lebih dari jumlah warna yang diberikan.

Polinomial kromatik merupakan suatu bagian penting dalam teori pewarnaan graf. Metode pewarnaan graf sendiri telah digunakan secara luas dalam pembuatan Sudoku solver, yaitu suatu program untuk menyelesaikan masalah teka-teki Sudoku. Teka-teki Sudoku sendiri sangat populer, dan merupakan contoh yang baik yang memiliki kaitan erat dengan teori graf. Maka itu, topik tentang Sudoku dan pewarnaan graf akan menjadi sangat menarik apabila dibahas.

***Kata Kunci:** Sudoku, graph, chromatic number, graph colouring, graph colouring algorithm.*

1. PENDAHULUAN

Sudoku adalah sebuah teka-teki logika yang sangat menarik, berbasiskan latin square yang umumnya memiliki ukuran kisi 9×9 dan memiliki 9 sub kisi yang berukuran 3×3. Tetapi Sudoku sebenarnya sangat bervariatif. Terdapat pula ukuran kisi 16×16 dan berbagai ukuran lain. Bahkan ada juga Sudoku 3 dimensi atau nama lainnya Dion Cube, Super Samurai Sudoku, Killer Sudoku, bahkan SudoCube yang merupakan perpaduan antara Sudoku dan Rubik Cube. Yang akan dibahas di sini adalah Sudoku berukuran 9×9. Peraturan utamanya yaitu setiap kolom, baris, dan sub kisi harus berisi angka 1 sampai dengan 9. Sudoku memiliki tingkat kesulitan yang sangat bervariasi. Sudoku adalah istilah bahasa Jepang yang artinya, "Angka-angka harus tetap tunggal". Akan tetapi Sudoku sebenarnya bukan berasal dari Jepang, tetapi dibuat oleh Howard Garns pada 1979.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a			4	8					
b		9		4	6			7	
c		5					6	1	4
d	2	1		6			5		
e	5	8		7		9		4	1
f			7			8		6	9
g	3	4	5					9	
h		6			3	7		2	
i						4	1		

Gambar 1. Contoh permainan Sudoku yang mudah.

Sudoku bisa dikerjakan dengan logika sederhana maupun rumit. Sudoku merupakan salah satu aplikasi dalam masalah pewarnaan graf dan memiliki aspek kombinatorial yang menarik. Jadi sebenarnya kaitan Sudoku dan graf sangatlah dekat.

Pada makalah ini akan digunakan beberapa istilah yang berkaitan dengan Sudoku, yaitu:

- Kotak, mengacu pada salah satu dari 81 kotak pada kisi Sudoku, yang akan diisi dengan angka 1 sampai 9.
- Sub kisi, yaitu himpunan kotak berukuran 3×3 yang digaris tebal pada teka-teki Sudoku.
- Calon, yaitu angka-angka yang mungkin diisi pada kotak kosong, yang akhirnya akan dieliminasi melalui proses induksi-deduksi.

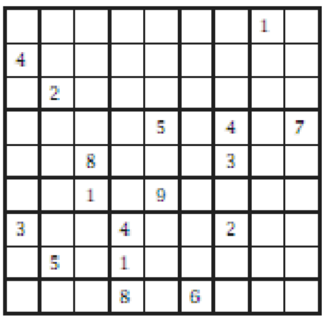
Sebelumnya telah disebutkan bahwa Sudoku dikembangkan dari Latin square. Latin square yang memiliki orde n adalah array berukuran n×n yang terdiri dari angka-angka yang tersusun sedemikian hingga semua baris dan kolom berisi setiap angka dari 1 sampai n. Setiap Sudoku adalah merupakan latin square berorde 9, tetapi latin square belum tentu Sudoku, karena ada kondisi tambahan berupa 9 buah sub kisi berukuran 3×3.

Orde	Jumlah Latin Square
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000

8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9824376582130398717250647569203200000

Tabel 1. Jumlah Latin Square berdasarkan ordenya.

Banyak pertanyaan muncul begitu saja saat mengerjakan teka-teki Sudoku. Pada teka-teki yang diberikan, apakah ada penyelesaian? Jika ada penyelesaian, apakah merupakan penyelesaian tunggal? Jika bukan penyelesaian tunggal, berapa penyelesaian alternatif yang tersedia? Apakah ada suatu cara yang sistematis untuk menemukan seluruh penyelesaiannya? Berapa jumlah teka-teki yang memiliki penyelesaian tunggal? Berapa jumlah masukan petunjuk (entry) minimum yang harus ada untuk membuat sebuah teka-teki Sudoku hanya memiliki penyelesaian tunggal? Pada gambar 2 ditunjukkan bahwa untuk memiliki penyelesaian tunggal, sebuah teka-teki Sudoku sekurang-kurangnya harus memiliki 17 masukan petunjuk. Gordon Royle [1] menemukan 36.628 teka-teki Sudoku dengan 17 masukan yang memiliki penyelesaian tunggal.

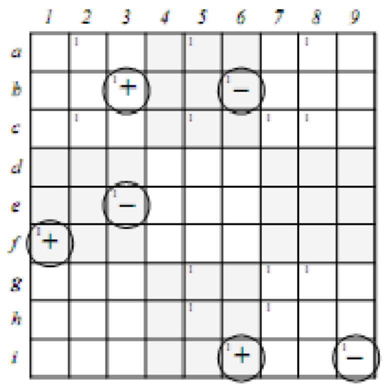


Gambar 2. Sebuah teka-teki Sudoku dengan 17 masukan.

Pertanyaan-pertanyaan sebelumnya akan ditampilkan dalam konteks matematika untuk dilakukan percobaan untuk menjawabnya. Lebih tepatnya, teka-teki Sudoku akan ditafsirkan dalam masalah pewarnaan simpul dalam teori graf. Dengan itu, dimungkinkan untuk membuat pertanyaan-pertanyaannya menjadi lebih umum dan melihat dari lingkup yang lebih luas.

2. POLINOMIAL KROMATIK

Graf G yang memiliki λ warna adalah pemetaan f dari set simpul G ke $\{1, 2, \ldots, \lambda\}$. Pemetaan itu disebut proper coloring jika $f_{(x)} \neq f_{(y)}$ ketika x dan y bertetangga dalam G. Jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai simpul-simpul pada graf G disebut bilangan kromatik dari G dan dinotasikan sebagai $\chi_{(G)}$. Dengan begitu, diketahui bahwa teka-teki Sudoku dapat dilihat sebagai masalah pewarnaan simpul. Sudoku berukuran 9×9 digambarkan sebagai sebuah graf dengan 81 simpul, dan setiap simpul mewakili setiap kotak pada grid. Dua simpul disebut bertetangga jika dan hanya jika kotak dalam grid yang diwakili berada dalam kolom, baris, atau sub kisi yang sama. Kita akan mencoba melihat masalah ini secara lebih umum. Misal ada sebuah kisi $n^2 \times n^2$, pada setiap kotak pada kisi, kita mengasosiasikan sebuah simpul (i, j), $1 \leq i, j \leq n^2$. (i, j) dan (i, j) bertetangga jika i = i' atau j = j' atau $\lceil i/n \rceil = \lceil i'/n \rceil$ dan $\lceil j/n \rceil = \lceil j'/n \rceil$. Kita akan menotasikan graf ini dengan X_n dan menyebutnya graf Sudoku dengan orde n. Kotak Sudoku dengan orde n adalah pewarnaan dari graf tersebut menggunakan warna berjumlah n^2. Sebuah teka-teki Sudoku berhubungan dengan pewarnaan parsial dan pertanyaannya adalah apakah pewarnaan parsial ini dapat diselesaikan dengan benar.



Gambar 3. Contoh pewarnaan sederhana.

Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya memiliki orde yang sama. Menurut perhitungan, X_n adalah graf teratur yang setiap simpulnya berorde $3n^2 - 2n - 1 = (3n + 1)(n - 1)$. Dalam kasus n = 3, X_3 adalah graf teratur berorde 20 dan bila n = 3, X_2 adalah graf teratur berorde 7.

Jumlah cara mewarnai graf G dengan λ warna dikenal sebagai polinomial dalam variable λ yang berorde sama dengan jumlah simpul dalam G. Teorema pertama adalah jika diberikan pewarnaan parsial C pada G, jumlah cara menyelesaikan pewarnaan untuk mendapatkan pewarnaan yang benar menggunakan λ warna juga merupakan polinomial dalam λ, λ lebih besar atau sama dengan jumlah warna yang digunakan dalam C. Lebih jelasnya, akan dinyatakan dalam Teorema 1.

Teorema 1. Misal G adalah graf terbatas dengan s simpul, C adalah pewarnaan parsial yang benar terhadap t simpul pada G menggunakan λ warna, $p_{G,C}(\lambda)$ adalah jumlah cara untuk menyelesaikan pewarnaan di atas menggunakan λ warna untuk mendapatkan pewarnaan yang benar pada G. Maka, $p_{G,C}(\lambda)$ adalah polinomial berkoefisien utama 1 (dalam λ) dengan koefisien integer yang berorde s – t untuk $\lambda \geq d_0$.

Bukti. Digunakan teori fungsi Mobius untuk membuktikan teorema 1. Misal (G, C) dengan G adalah sebuah graf dan C adalah sebuah pewarnaan yang benar untuk beberapa simpul. (G', C) adalah subgraf dari (G, C) jika G' didapat dengan mengerutkan beberapa sisi dari G dengan sekurang-kurangnya satu titik ujung dalam C, dan menghasilkan himpunan terurut sebagian. Pengerutan minimum terjadi pada simpul-simpul pada C dengan mempertahankan ketetanggaannya. Simbol C juga akan digunakan untuk menotasikan graf minimum ini dalam himpunan terurut sebagian. Untuk setiap subgraf (G', C) dalam himpunan terurut sebagian ini, misal $p_{G',C}(\lambda)$ adalah jumlah cara mewarnai G' dengan benar menggunakan λ warna dengan pewarnaan spesifik untuk C. Misal $q_{G',C}(\lambda)$ adalah jumlah cara mewarnai (tidak harus benar) simpul-simpul pada G' menggunakan λ warna dengan pewarnaan spesifik untuk C. Jelas bahwa $q_{G',C}(\lambda) = \lambda_{s'-t}$, di mana s' adalah jumlah simpul pada G' dan t adalah jumlah simpul pada C. Jika $\lambda \geq d_0$, maka diberikan λ pewarnaan untuk (G, C), bisa didapatkan pewarnaan yang benar untuk subgraf unik (G', C) hanya dengan mengerutkan sisi-sisi jika dua simpul bertetangga pada (G, C) memiliki warna yang sama. Maka didapatkan relasi

$$q_{G,C}(\lambda) = \lambda^{s-t} = \sum\ pG',C(\lambda).$$

Dengan invers Mobius, dideduksikan bahwa

$$p_{G,C}(\lambda) = \sum \mu\,(C, G')\,\lambda^{s'-t},$$

dan sisi kanan adalah polinomial berkoefisien utama 1 dengan koefisien integer, berorde s-t.

Teorema 2. Misal G adalah graf dengan bilangan kromatik $\chi_{(G)}$ dan C adalah pewarnaan parsial dari G dengan menggunakan $\chi_{(G)} - 2$ warna. Jika pewarnaan parsial bisa diselesaikan dengan cara yang benar, maka sekurang-kurangnya ada dua cara untuk memperluas pewarnaannya.

Bukti. Karena belum digunakan dua warna dalam awal pewarnaan parsial, dua warna ini bisa ditukar dalam akhir pewarnaan yang benar untuk mendaparkan perluasan yang lain.

Teorema 2 menegaskan bahwa jika C adalah pewarnaan parsial dari G yang bisa diselesaikan secara unik hingga pewarnaan keseluruhan untuk G, maka C harus menggunakan sekurang-kurangnya $\chi_{(G)} - 1$ warna. Secara khusus, pada teka-teki Sudoku berukuran 9×9, sekurang-kurangnya harus digunakan delapan warna pada kotak masukan petunjuk yang diberikan. Secara umum, untuk teka-teki Sudoku berukuran $n^2\times n^2$, sekurang-kurangnya harus digunakan n^2-1 warna pada pewarnaan parsial masukan petunjuk supaya teka-teki Sudoku tersebut memiliki penyelesaian tunggal.

3. PEWARNAAN EKSPLISIT PADA X_n

Akan ditunjukkan bagaimana mewarnai graf Sudoku X_n dengan benar. Ingatlah bahwa bilangan kromatik pada graf adalah jumlah warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai simpul-simpulnya. Demikian juga, graf K_n terdiri dari n simpul yang setiap simpulnya bertetangga dengan simpul lain memiliki bilangan kromatik n.

Teorema 3. *Untuk setiap bilangan natural n, ada pewarnaan graf Sudoku X_n secara benar menggunakan n^2 warna. Bilangan kromatik dari X_n adalah n^2.*

Bukti. Terlihat bahwa setiap kotak pada sudut kiri atas kisi n x n saling bertetangga dan membentuk graf isomorfik lengkap kepada $K_{n^\wedge 2}$. Bilangan kromatik dari $K_{n^\wedge 2}$ adalah n^2 dan X_n akan membutuhkan sekurang-kurangnya n^2 warna untuk pewarnaan secara benar. Akan ditunjukkan bahwa adalah mungkin untuk melakukan pewarnaan menggunakan n^2 warna. Seperti yang telah dikemukakan seelumnya, lebih mudah untuk menandai simpul (I, j) dengan $0 \leq i, j \leq n2 - 1$.Pertimbangkan sisa mod n2. Untuk $0 \leq i \leq n^2 - 1$, $i = t_{in}+d_i$ dengan $0 \leq d_i \leq n - 1$ dan $0 \leq t_i \leq n - 1$ dan hal yang sama pada $0 \leq j \leq n^2 - 1$. Akan dimasukkan warna $c_{(I,\,j)} = d_{in} + t_i + nt_j + d_j$, modulo n_2 direduksi hingga posisi ke-(i, j) dalam kisi n^2 x n^2. Ini adalah pewarnaan yang benar. Untuk melihatnya, harus ditunjukkan bahwa setiap dia koordinat yang bertetangga (i, j) dan (i', j') memiliki warna yang berbeda. Jika i = i', maka harus ditunjukkan $c_{(i,\,j)} \neq c_{(i,\,j')}$ kecuali j = j'. Jika $c_{(i,\,j)} = c_{(i,\,j')}$, maka $nt_j + d_j = nt_{j'} + d_{j'}$ yang berarti j = j'. Sama dengan jika j = j', maka $c_{(i,\,j)} \neq c_{(i,\,j')}$ kecuali i = i'. Jika sekarang, [i/n] = [i'/n] dan [j/n] = [j'/n] maka $d_i = d_{i'}$ dan $d_j = d_{j'}$. Jika $c_{(i,\,j)} = c_{(i',\,j')}$, maka

$$t_i + nt_j = t_{i'} + nt_{j'}.$$

Mereduksi mod n menghasilkan $t_i = t_{i'}$. Karenanya, $t_j = t_{j'}$ maka (i, j) = (i', j') dalam kasus ini. Inilah pewarnaan yang benar.

4. MENGHITUNG PENYELESAIAN SUDOKU

Pertanyaan tentang ketunggalan penyelesaian untuk teka-teki Sudoku akan dijawab di sini. Sebuah teka-teki Sudoku belum tentu memiliki penyelesaian. Pada bagian ini, akan diberikan beberapa syarat yang diperlukan sebuah teka-teki Sudoku agar memiliki penyelesaian. Gambar berikut menunjukkan contoh sebuah teka-teki Sudoku yang memiliki tepat dua penyelesaian.

9		6		7		4		3
			4			2		
	7			2	3		1	
5						1		
	4		2		8		6	
		3						5
	3		7				5	
		7			5			
4		5		1		7		8

Gambar 4. Sebuah teka-teki Sudoku dengan tepat dua penyelesaian.

Jika teka-teki di gambar 3 diselesaikan, maka akan tampak hasilnya seperti gambar berikut ini.

9	2	6	5	7	1	4	8	3
3	5	1	4	8	6	2	7	9
8	7	4	9	2	3	5	1	6
5	8	2	3	6	7	1	9	4
1	4	9	2	5	8	3	6	7
7	6	3	1			8	2	5
2	3	8	7			6	5	1
6	1	7	8	3	5	9	4	2
4	9	5	6	1	2	7	3	8

Gambar 5. Penyelesaian teka-teki di Gambar 4.

Pada gambar 5 ini ditunjukkan kedua alternatif susunan untuk menyelesaikannya.

9	4
4	9

4	9
9	4

Gambar 6. Dua cara mengisi kotak kosong di Gambar 5.

Dari pengamatan di atas, bisa dilihat bahwa jika dalam penyelesaian sebuah teka-teki Sudoku, terdapat sebuah pola seperti yang ditunjukkan pada gambar 6 dalam tumpukan sub kisi menurun yang sama (tetapi tumpukan sub kisi mendatar yang berbeda), maka setidaknya satu dari keempat isian ini harus menjadi masukan petunjuk untuk dapat membuat teka-teki Sudoku itu memiliki penyelesaian tunggal. Jika tidak, akan selalu ada dua solusi dengan menukar posisi a dan b.

a	b
b	a

Gambar 7. Pola yang berakibat adanya solusi ganda.

Seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, jika jumlah warna yang digunakan pada teka-teki Sudoku sekurang-kurangnya tujuh, selalu ada dua penyelesaian pada teka-teki itu. Jumlah penyelesaiannya juga bisa dilihat dari polinomial kromatik. Jika d0 adalah jumlah warna yang digunakan, telah diketahui bahwa $p_{X3,C}(\lambda)$ adalah polinomial dalam λ, di mana $\lambda \geq d_0$. Karena bilangan kromatik dari X_3 adalah 9, harus ada $p_{X3,C}(\lambda) = 0$ untuk $\lambda = d_0, d_0 + 1, \ldots, 8$. Karena $p_{X3,C}(\lambda)$ adalah polinomial dengan koefisien utama 1 dan koefisien lainnya integer, maka

$p_{X3,C}(\lambda) = (\lambda - d_0)(\lambda - (d_0 + 1)) \cdot\cdot\cdot (\lambda - 8)q(\lambda)$, untuk beberapa polinomial $q(\lambda)$ dengan koefisien integer, $\lambda = 9$ menghasilkan

$$p_{X3,C}(9) = (9 - d_0)!q(9)$$

Dan sisi kanan lebih besar atau sama dengan 2 jika $d_0 \leq 7$. Ini menegaskan syarat untuk adanya sebuah penyelesaian tunggal, yang adalah anggapan dasar di setiap teka-teki Sudoku.

5. SISTEM REPRESENTASI

Akan ditunjukkan beberapa teorema tentang sistem representasi yang akan digunakan pada enumerasi kotak Sudoku.

Jika A adalah matriks $n \times n$, dengan masukan ke-(i, j) diberikan oleh aij, kekekalan A ditunjukkan oleh definisi

$$\sum a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdot\cdot\cdot a_{n\sigma(n)},$$

di mana $\mathfrak{S}$n menotasikan himpunan simetris dalam simbol n {1, 2, …, n}. Matriks A disebut stokastik ganda jika hasil penjumlahan kolom dan hasil penjumlahan baris adalah 1.

Untuk sebuah latin square berukuran $n \times n$, jumlah cara untuk mengisi baris pertama adalah n! Anggap k baris dalam latin square telah diselesaikan, dan sekarang baris ke-(k+1) ingin diisi. Untuk setiap kotak i pada baris ke-(k+1), anggap Ai adalah himpunan berisi bilangan yang belum dipakai pada kolom ke-i. Ukuran A_i adalah $n - k$. Untuk mengisinya, harus ditemukan himpunan dengan representasi set $A_1, \ldots, A_n$. Karena (n – k)-1 A adalah stokastik ganda, sekurang-kurangnya ada

$$((n - k)^n \, n!)/n^n$$

cara untuk mengisinya. Jika k memiliki range antara 0 sampai n – 1, maka berlaku:

Lemma 4. *Jumlah Latin square berorde n adalah sedikitnya* $n!^{2n}/n^{n\text{^}2}$.

Corollary 5. *Jumlah Latin square berorde n2 adalah sedikitnya*

$$n^{2n\text{^}4}e^{-2n\text{^}4+O(n\text{^}2 \log n)}.$$

Bukti. Menurut Lemma 4, jumlah Latin square berorde n2 adalah sekurang-kurangnya

$$n^2!^{2n\text{^}2}/n^{2n\text{^}4}.$$

Menggunakan rumus Stirling,

$$\log n! = n \log n - n + ½ \log n + O(1),$$

didapatkan batas bawahnya.

6. LATIN SQUARE DAN KOTAK SUDOKU

Sekarang teorema berikut terbukti:

Teorema 6. Jumlah jenis kotak sudoku yang berorde n ditunjukkan oleh

$$n^{2n^4} e^{-2.5n^4+O(n^3 \log n)}$$

untuk n yang cukup besar.

Bukti. Kotak Sudoku berukuran $n^2 \times n^2$ terdiri dari n^2 sub kisi berukuran $n \times n$. Masukan dalam tiap sub kisi bisa dilihat sebagai permutasi dari $\{1, 2, \ldots, n^2\}$. Batas atas dari jumlah jenis kotak sudoku adalah

$$[(n^2)!]^{n^2}$$

Dimulai dengan mengamati ada n "pita" ada kisi Sudoku. ("Pita" didefinisikan sebagai himpunan dari n baris suksesi). Ada $n^2!$ cara untuk mengisi baris pertama. Jumlah cara untuk mengisi baris kedua dihitung dengan melihat kekekalan matriks berikut. Misal ada matriks n^2 x n^2. Untuk setiap kotak, ada $n^2 - n$ peluang karena n warna telah digunakan ke subkisi $n \times n$ yang berhubungan. Jumlah cara mengisi baris kedua adalah jumlah cara memilih sistem representasi dari kemungkinan-kemungkinan yang ada. Lebih tepatnya, isi 1 pada kotak ke-(i, j) jika j adalah nilai yang mungkin untuk kotak tersebut dan 0 jika tidak. Akan dihasilkan matriks (0, 1) yang kekekalannya adalah jumlah cara untuk memilih himpunan reresentasi. Oleh persamaan (2), didapatkan

$$(n^2 - n)!^{n/(n-2)}$$

Secara umum,

$$\prod_{k=0}^{n-1} (n^2 - kn)!^{\frac{n}{n-k}}$$

adalah jumlah cara mengisi pita pertama yang terdiri dari n baris kotak Sudoku berorde n. Sekarang, (i – 1) pada n pita telah selesai. Dihitung jumlah cara untuk menyelesaikan pita ke-i. Jumlah isian yang mungkin untuk kotak pertama pada pita ke-i adalah

$$n^2 - (i - 1)n.$$

Jumlah cara menyelesaikan baris pertama di pita ke-i:

$$(n^2 - (i-1)n)!^{\frac{n^2}{n^2-(i-1)n}},$$

Pola di atas terulang hingga baris ke-i di pita ke-i:

$$(n^2 - ((i-1)n + i))!^{\frac{n^2}{n^2-((i-1)n+i)}}.$$

Untuk baris ke-(i – 1), cara akan diubah dan angka yang telah dimasukkan dalam subkisi yang di dalamnya terkandung kotak-kotak tersebut akan dikeluarkan.

$$(n^2 - in)!^{\frac{n^2}{n^2-in}},$$

untuk jumlah cara mengisi baris ke-i pada pita ke-i. Akhirnya didapatkan bahwa jumlah S_n dari kotak Sudoku berorde n terikat oleh

$$\prod_{i=1}^{n} (n^2 - (i-1)n)!^{\frac{n^2}{n^2-(i-1)n}}$$

$$(n^2 - [(i-1)n + 1])!^{\frac{n^2}{n^2-[(i-1)n+1]}} \cdots$$

$$\cdots (n^2 - [(i-1)n + i])!^{\frac{n^2}{n^2-[(i-1)n+i]}}$$

$$(n^2 - in)!^{\frac{n^2}{n^2-in}} \cdots (n^2 - (n-1)n)!^{\frac{n^2}{n^2-(n-1)n}}.$$

Sehingga,

$$\frac{\log S_n}{n^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \frac{\log(n^2 - [(i-1)n + j])!}{n^2 - (i-1)n + j} + \sum_{k=i}^{n-1} \frac{\log(n^2 - kn)}{(n^2 - kn)} \right).$$

Kita memperkirakan jumlah menggunakan formula Stirling. Yaitu

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \log(n^2 - [(i-1)n + j]) + \sum_{k=i}^{n-1} \log(n^2 - kn) \right) - n^2 + O(\log^2 n).$$

Disederhanakan menjadi

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(i \log(n^2 - (i-1)n) + \sum_{k=i}^{n-1} \log(n^2 - kn) \right) - n^2 + O(\log^2 n).$$

Sehingga, $(\log S_n)/n^2 + n^2 + O(n \log n)$ adalah

$$\leq \frac{1}{2} n^2 \log n +$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(i \log(n - i + 1) + (n - i) \log n + \sum_{k=i}^{n-1} \log(n - k) \right).$$

Hasil penjumlahan dengan k adalah

$$\log(n-i)! = (n-i)\log(n-i) - (n-i) + O(\log n),$$

menggunakan formula Stirling. Penggabungan keseluruh persamaan diatas menghasilkan

$$\frac{\log S_n}{n^2} \leq 2n^2 \log n - 2.5n^2 + O(n \log n),$$

yang mana dari persamaan tersebut dapat dengan mudah diturunkan sebuah teorema.

Kita memiliki corollary seperti di bawah ini:

Corollary 7. *Misal p_n adalah peluang bahwa Latin square yang dipilih berdasar urutan n^2 merupakan kotak Sudoku. Maka*

$$n^{2n^4} e^{-2n^4 + O(n^2 \log n)}.$$

Umumnya, $p_n \rightarrow 0$ karena n mendekati tak hingga.

Bukti. Menurut teorema 6, jumlah kotak Sudoku berorde n paling banyak

$$n^{2n^4} e^{-2.5n^4 + O(n^3 \log n)}.$$

Jumlah *Latin squares* berorde n^2 sesuai dengan Corollary 5, paling sedikit

$$n^{2n^4} e^{-2n^4 + O(n^2 \log n)}.$$

Oleh karena itu, kemungkinan *Latin square* berorde n^2 adalah sama dengan kotak Sudoku karena

$$e^{-0.5n^4 + O(n^3 \log n)},$$

yang mendekati 0 karena n mendekati tak hingga.

7. KESIMPULAN

Teka-teki sudoku terkenal karena beberapa alasan. Pertama, cukup sulit sehingga menantang para penggemar teka-teki untuk menyelesaikannya. Kedua, sangat sederhana, hanya dengan mengamati kolom dan baris, sebenarnya cukup mudah untuk memasukkan "warna yang hilang" dan melakukan analisis dan eliminasi terhadap calon-calon. Ketiga, tidak dibutuhkan pengetahuan apapun termasuk matematika, hanya dibutuhkan logika sehingga siapapun bisa memainkannya. Teka-teki sederhana ini mengundang banyak pertanyaan tentang sifat-sifat matematika. Sebelumnya telah dipertanyakan tentang apakah ada teka-teki Sudoku dengan masukan 16 atau kurang yang memiliki solusi tunggal.

Telah dibuktikan bahwa jika digunakan 7 warna atau kurang, teka-teki Sudoku tidak memiliki solusi tunggal.

							1	2
				3	5			
			6				7	
7						3		
			4			8		
1								
			1	2				
	8						4	
	5					6		

Gambar 8. Teka-teki Sudoku yang menggunakan 8 warna.

Dipertanyakan juga apakah teka-teki Sudoku yang menggunakan 8 warna dengan masukan petunjuk minimum ada, yang digeneralisasi menjadi masalah mencari "Sudoku minimum" untuk teka-teki berorde n. Minimum ini sekurang-kurangnya berjumlah $n^2 - 1$.

Masalah menarik yang lain adalah mencari jumlah kotak Sudoku berorde n. Jika S_n adalah jumlah kotak Sudoku berorde n, dapat diperkirakan bahwa

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log S_n}{2n^4 \log n} = 1.$$

Limit ini, jika ada, sudah jelas kurang atau sama dengan 1.

Ucapan Terima Kasih. Saya mengucapkan terima kasih kepada Bapak Rinaldi Munir dan Ibu Harlili atas bimbingannya dalam mata kuliah Matematika Diskrit sehingga makalah ini dapat diselesaikan.

DAFTAR REFERENSI

[1] Royle, Gordon. http://www.csse.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php, 2007. Tanggal Akses : 31 Desember 2007, pukul 10.00 WIB.

[2] Rehmeyer, Julie J. http://blog.sciencenews.org/mathtrek/2007/07/sudoku_and_graph_theory.html, 2007. Tanggal Akses: 31 Desember 2007, pukul 10.20 WIB.

[3] Suchard, Eytan. Yatom, Raviv. Shapir, Eitan. Sudoku & Graph Theory. http://www.ddj.com/windows/184406436, 2006. Tanggal Akses: 31 Desember 2007, pukul 10.30 WIB.

[4] Davis, Tom. The Mathematics of Sudoku. http://www.geometer.org/mathcircles/sudoku.pdf, Tanggal Akses: 1 Januari 2007, pukul 07.30 WIB

[5] Herzberg, Agnes M. Murty, M Ram. http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf, 2007. Tanggal Akses: 1 Januari 2007, pukul 08.00 WIB.

[6] Frank, Richard. Mathematics in Sudoku. http://people.brandeis.edu/~kleinboc/47a/sudoku.pdf,2005. Tanggal Akses: 1 Januari 2007, pukul . 08.15 WIB.

[7] Felgenhauer, Bertram. Jarvis, Frazer. Enumerating possible Sudoku grids. http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf, 2005. Tanggal Akses: 1 Januari 2007, pukul 08.30 WIB.

[8] Graph Coloring. http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring. Tanggal Akses: 1 Januari 2007, pukul 09.00 WIB

[9] Yato, Takayuki. Complexity and Completeness of Finding Another Solution and Its Application to Puzzles. http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yato/data2/MasterThesis.pdf. Tanggal Akses : 1 Januari 2007, pukul 09.15WIB