Aplikasi Graf dalam Permasalahan Knight's Tour

Rizka Irawan Ardiyanto - 13506012
Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10, Bandung
Email: if16012@students.if.itb.ac.id

Abstract *– Makalah ini membahas aplikasi Graf dalam penyelesaian masalah Knight's Tour dimana dalam sebuah papan catur Knight diminta untuk melewati semua kotak tepat satu kali. Pembahasan masalah ini diperluas dengan mengkaji papan catur tidak lazim yang berukuran bukan 8x8. Dengan menganalogikan papan catur tidak lazim tersebut sebagai papan catur berukuran n x n dan m x n, dibahas bagaimana knight's tour dapat atau tidak dapat ditemukan dalam papan-papan catur tersebut.*

Kata Kunci*: Knight's Tour, graf, siklus Hamilton, Closed Knight's Tour, Open Knight's Tour*

1. PENDAHULUAN

Ilmu matematika adalah ilmu yang sangat erat berkaitan dengan kehidupan manusia. Aplikasinya sangat banyak ditemukan di kehidupan sehari-hari kita. Salah satu cabang ilmu matematika, yaitu matematika diskrit, dalam salah satu pokok bahasannya tentang teori graf memiliki banyak aplikasi yang sangat menarik yang dapat kita temukan dalam kehidupan kita.

Salah satu aplikasi menarik teori graf ini ada dalam permainan catur. Sebuah permainan yang tampak tidak membutuhkan perhitungan matematika ini ternyata menyimpan berbagai teka-teki yang dapat diselesaikan dengan teori graf.

Dari sekian banyak teka-teki dalam permainan catur ini, penulis telah memilih suatu teka-teki menarik tentang langkah knight dimana diinginkan knigtt tersebut dapat melewati seluruh kotak pada papan catur tepat satu kali. Permasalahan ini dinamakan *Knight's Tour*.

1.1. Pengenalan Graf

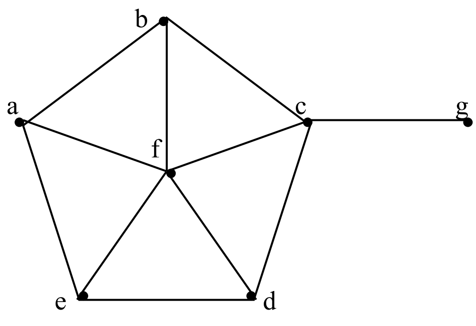
Secara informal, suatu graf adalah himpunan benda-benda yang disebut verteks (*node*) yang terhubung oleh sisi (*edge* atau *arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (verteks) yang dihubungkan oleh garis-garis (sisi).

Secara formal, suatu graf $G = (V,E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan V (yang tak kosong dan berhingga) dan himpunan E dari pasangan tak terurut $\{v_i,v_j\}$ dengan $v_i,\ v_j \in V$. Himpunan V disebut *himpunan titik* dari graf G dan anggotanya disebut *titik*, sedangkan himpunan E disebut *himpunan sisi* dari graf G dan anggotanya disebut *sisi*. Sisi $\{v_i,v_j\}$ sering ditulis dengan v_iv_j. *Order* dari graf G, ditulis dengan notasi $|V(G)|$, menyatakan banyaknya titik pada graf G.

Bila titik $v_i,\ v_j \in V(G)$ dengan $v_iv_j \in E(G)$ maka titik v_i dan v_j dikatakan *bertetangga*. Atau dengan kata lain apabila ada sisi yang mengaitkan titik v_i dan v_j maka titik *vi* dan *vj* dikatakan *bertetangga*. Untuk setiap titik v_i pada graf G, *derajat* titik v_i, dinotasikan sebagai δv_i, adalah banyaknya tetangga dari titik *vi*.

Pada graf G, *jalan J* dari titik v_0 ke titik v_n adalah suatu barisan selang-seling dari titik dan sisi $v_0,\ e_0,\ v_1,\dots\ v_{n-1},\ e_{n-1},\ v_n$ yang dimulai dan diakhiri dengan titik, dengan sisi $e_i=v_i\ v_{i+1}$ untuk $i = 0,1,\ 2,\dots,\ n$ sedemikian sehingga $v_i\ v_{i+1} \in E(G)$. *Panjang* dari jalan $v_0,\ e_0,\ v_1,\dots\ v_{n-1},\ e_{n-1},\ v_n$ adalah banyaknya sisi pada barisan tersebut. Titik v_0 dan v_n disebut titik-titik ujung dari jalan tersebut. Jika pada jalan J berlaku $v_0 = v_n$ maka J disebut *jalan tertutup* dan dikatakan *jalan terbuka* jika $v_0 \neq v_n$.

Jalan J disebut *lintasan* (*path*) bila semua titiknya berbeda. Sedangkan jika setiap sisinya yang berbeda maka jalan tersebut dinamakan *jejak* (*trail*). Jejak tertutup disebut *sirkit*. Sirkit yang semua titiknya berlainan disebut *siklus* (*cycle*).



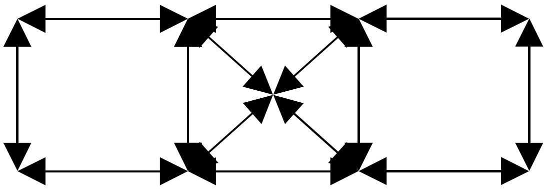
Gambar 1.1

Pada gambar 1.1 di atas, a-f-b-f-c-d-c merupakan jalan (*walk*), a-b-f-c-g-c-f-e-a merupakan jalan tertutup (*close walk*), a-f-c-d-f-b merupakan jejak (*trail*), a-e-f-c-g merupakan lintasan (path), a-f-e-d-c-f-b-a merupakan sirkit, dan a-f-b-c-d-e-a merupakan siklus (*cycle*).

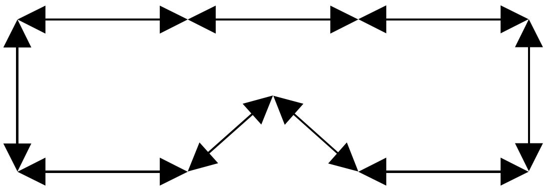
1.2. Siklus Hamilton

Dalam teori graf, siklus yang menggunakan semua titik dan kembali ke titik semula dikenal dengan siklus Hamilton (*Hamilton cycle*). Sedangkan jika semua titik dilewati tepat satu kali tetapi tidak kembali ke titik semula disebut Lintasan Hamilton (*Hamilton path*). Graf yang memiliki lintasan atau siklus Hamilton disebut Graf Hamilton sebagaimana yang disampaikan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1856.

Perhatikan Gambar 1.2 berikut! Diberikan graf *G* dengan sembilan titik dan 14 sisi. Kita dapat membuat siklus Hamilton yang dimulai dan diakhiri pada salah titik dari graf *G* tersebut.



Gambar 1.2 Graf G = (9,14)



Gambar 1.3 Salah Satu Siklus Hamilton pada Graf G = (9,14)

Pada gambar 1.3 kita lihat semua titik dilewati tepat satu kali dan kembali ke titik semula.

2. KNIGHT'S TOUR

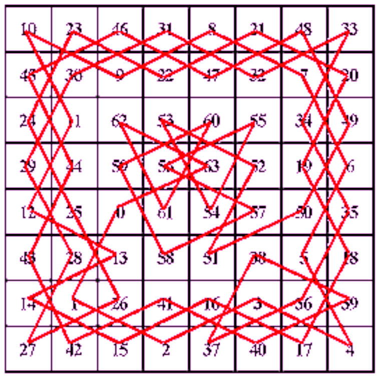
Permasalahan menarik yang terkait dengan Siklus Hamilton adalah langkah kuda (*Knight's Tour*) pada permainan catur. Suatu *Knight's Tour* pada papan catur adalah rangkaian perjalanan kuda catur pada papan catur sehingga seluruh kotak terlewati kuda tepat satu kali. Aturan langkah kuda pada permainan catur adalah sebagai berikut :

- Melangkah dua persegi ke arah horisontal kemudian satu persegi ke arah vertikal, atau
- Melangkah dua persegi ke arah vertikal kemudian satu persegi ke arah horizontal, atau
- Melangkah satu persegi ke arah horisontal kemudian dua persegi ke arah vertikal, atau
- Melangkah satu persegi ke arah vertikal kemudian dua persegi ke arah horisontal.

Jika dalam *knight's tour* setiap persegi dari papan catur dapat dilewati tepat satu kali dan kuda kembali pada persegi semula maka disebut langkah kuda yang tertutup (*closed knight's tour*). Namun, jika semua persegi telah dilewati dan kuda tidak dapat kembali ke posisi semula maka disebut langkah kuda yang terbuka (*open knight's tour*).

Jika persegi dalam papan catur dianggap sebagai titik dalam graf, dimana setiap dua titik akan dihubungkan oleh satu sisi dengan syarat membentuk langkah kuda, maka menentukan *closed knight's tour* sama halnya dengan menentukan siklus Hamilton (*Hamilton cycle*). Sedangkan *open knight's tour* merupakan lintasan Hamilton (*Hamilton path*).

Dalam papan catur standar, yaitu berukuran 8x8, salah satu dari *closed knight's tour* adalah sebagai berikut :



Gambar 2.1
Closed Knight's Tour pada papan catur 8x8

Knight's tour pada papan catur diatas dapat melewati setiap persegi tepat satu kali. Dimulai pada posisi 0 dan seterusnya sehingga berakhir pada posisi 63. Dapat kita lihat bahwa dari posisi 63 ke posisi 0 terdapat satu langkah *knight*. Sehingga *knight's tour* diatas membentuk siklus Hamilton.

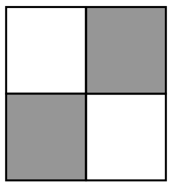
Permasalahannya adalah jika diberikan papan catur dengan ukuran selain 8x8, apakah siklus Hamilton dapat ditemukan dari *knight's tour* ?

2.1 Knight's Tour Papan Catur Persegi

Papan catur persegi berukuran n x n dapat dibedakan menjadi 2 macam:

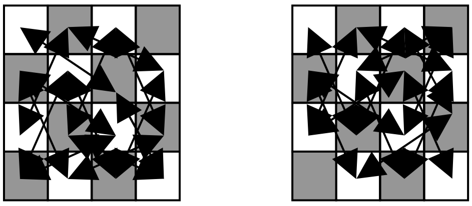
2.1.1 Papan catur berukuran n x n dengan n genap

Perhatikan beberapa papan catur berikut:



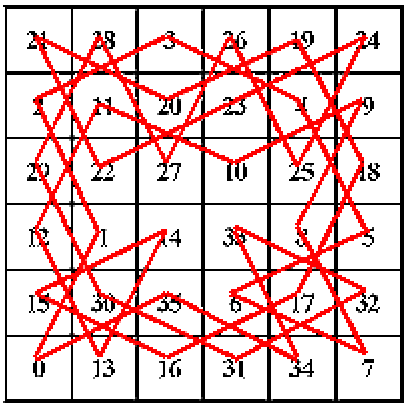
Gambar 2.2 Papan catur 2x2

Terlihat pada gambar di atas, knight tidak akan dapat melangkah kemanapun dimulai dari posisi manapun. Oleh karena itu, pada papan catur 2x2 tidak dapat ditemukan *Knight's Tour*.



Gambar 2.3 Papan catur 4x4

Pada kedua gambar di atas tampak bahwa selalu ada persegi yang tidak dilewati. Hal ini mengakibatkan *knight's tour* juga tidak pernah terjadi. Pada graf papan catur 4x4 terdapat satu titik yang berderajat nol.



Gambar 2.4 Closed Knight's Tour
Pada Papan Catur 6x6

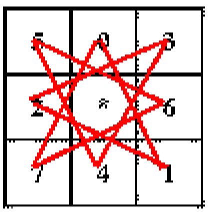
Paul de Hijo (Phillipe Jolivald) 1882 menemukan ada 5 *closed knight's tour* berbeda pada papan catur 6x6.

M. Kraitchik (1972) menunjukkan pada papan catur 6x6 ada 17 *closed knight's tour* dengan simetri berjumlah dua dan 1223 asimetri.

Mark R. Keen telah menemukan bahwa pada papan berukuran 10x10 dan 12x12 juga terdapat *closed knight's tour*. Secara umum, papan catur berukuran nxn dengan n genap dan n > 4 dapat ditemukan *closed knight's tour.*

2.1.2 Papan catur berukuran n x n dengan n ganjil

Pada papan catur n x n dengan n ganjil tidak ditemukan *closed knight's tour*. Namun pada beberapa papan catur dengan n ganjil masih dapat ditemukan *open knight's tour.*

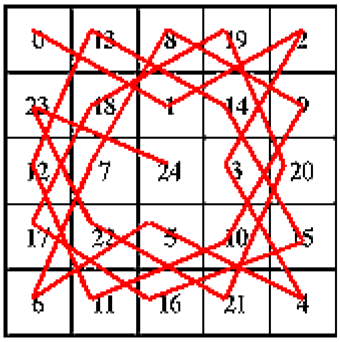


Gambar 2.5 Papan Catur 3x3

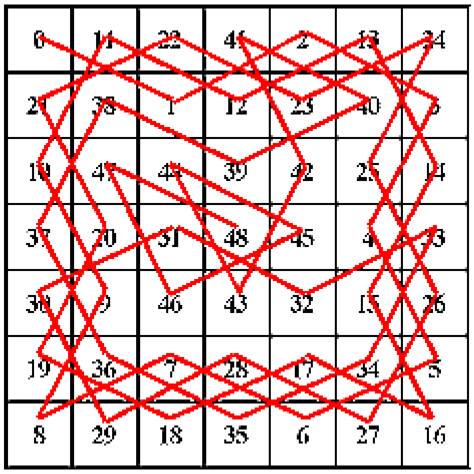
Pada papan catur 1x1 dengan sangat jelasnya tidak dapat ditemukan *knight's tour*. Pada papan catur 3x3, tidak dapat ditemukan *knight's tour* karena selalu terdapat 1 persegi (persegi di tengah) yang tidak dapat dilewati knight.

Menurut teori graf, pada papan catur 3x3 tidak mungkin terjadi *knight's tour* karena pada grafnya terdapat satu titik yang berderajat nol yaitu titik yang melambangkan persegi yang di tengah.

Hasil eksperimen **Mark R. Keen** menunjukkan bahwa *open knight's tour* terjadi pada papan berukuran 5x5, 7x7, 9x9, 11x11.



Gambar 2.6 *Open Knight's Tour*
Pada Papan Catur 5x5

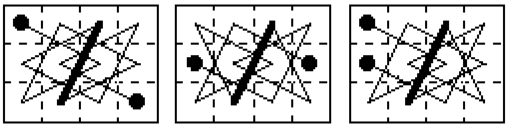


Gambar 2.7 *Open Knight's Tour*
Pada Papan Catur 7x7

Karena *knight* dalam melangkah selalu berpindah dari satu warna ke warna yang lain, maka berdasarkan metode pewarnaan pada papan berukuran n x n dengan n ganjil akan diperoleh banyaknya kedua warna berbeda. Akibatnya *closed knight's tour* tidak mungkin terjadi.

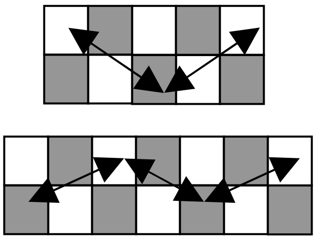
2.2 Knight's Tour Papan Catur Persegi Panjang

Menurut Euler, papan persegi panjang terkecil yang memungkinkan adanya *knight's tour* adalah papan 3x4. Di sana terdapat tiga *open knight's tour*.

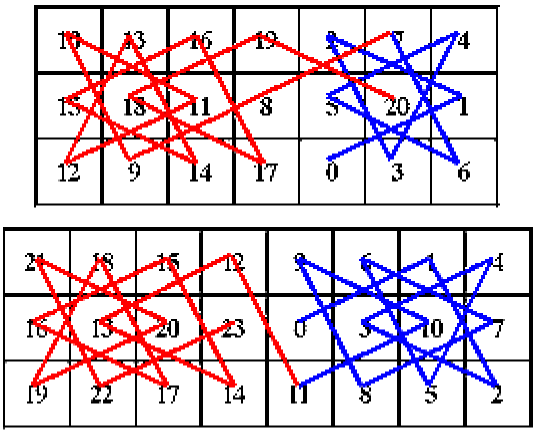


Gambar 2.8 *Open Knight's Tour*
Pada Papan Catur 3x4

- Pada papan catur berukuran 1 x n tidak mungkin terdapat *knight's tour* karena knight tidak dapat melangkah.
- Pada papan catur berukuran 2 x n tidak mungkin terdapat *knight's tour* karena knight tidak dapat menemukan alternatif jalan kembali ke kotak pertama.
- Pada papan catur berukuran 3 x n memungkinkan adanya *knight's tour.*



Gambar 2.9 Papan Catur berukuran 2 x n

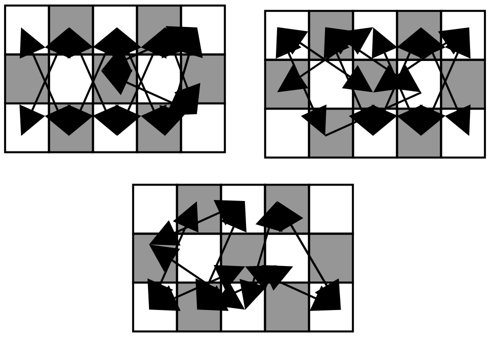


Gambar 2.10 Open Knight's Tour
Pada Papan Catur 3x7 dan 3x8

Allen Schwenk telah membuktikan adanya karakterisasi dari papan catur persegi panjang berukuran $m \cdot n$ sehingga dapat ditemukan *knight's tour*. Papan catur segiempat berukuran $m \cdot n$ (untuk m lebih kecil dari n) tidak memiliki *knight's tour* jika :

- m dan n keduanya ganjil
- m = 1, 2 atau 4
- m = 3 dan n = 4, 6 atau 8.

Perhatikan contoh berikut:



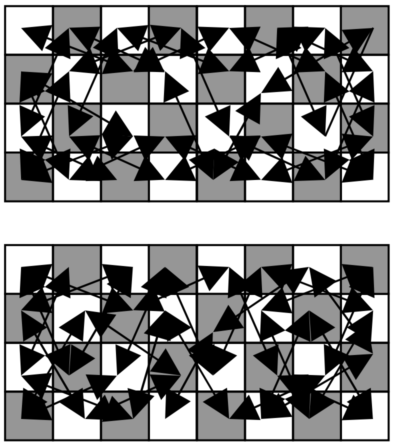
Gambar 2.11 Papan Catur 3x5

Tampak pada contoh di atas bahwa terdapat lebih dari 1 persegi tidak dilewati oleh Knight. Hal ini menunjukkan bahwa pada papan catur 3x5 tidak terdapat *knight's tour*.

Papan persegi panjang terkecil yang memungkinkan terjadinya *closed knight's tour* adalah papan dengan 30 persegi, yaitu papan 3x10 dan 5x6. **Ernest Bergholt** (1917) menemukan *closed knight's tour* pada papan catur 3x12, 3x14, 3x18 dan 3x20.

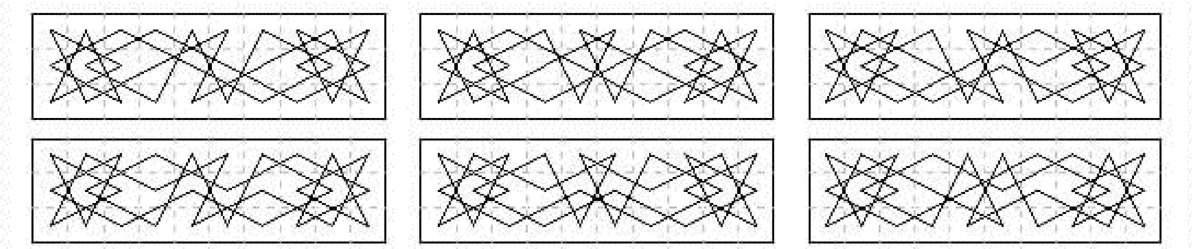
Terdapat enam *closed knight's tour* pada papan 3x10 (pertama kali ditemukan oleh **E. Bergholt** 1917 dan **G.L. Moore** 1920) dan terdapat tiga *closed knight's tour* papan catur 5x6.

Menurut **Euler** (1759), **Sainte-Marie** (1877) dan **Louis Posa**, meskipun pada papan berukuran 4 x n tidak mungkin terjadi *closed knight's tour* tapi masih memungkinkan terjadinya *open knight's tour*.



Gambar 2.12 *Open Knight's Tour*
Pada Papan Catur 4x8

Tampak di atas pada gambar 2.12 adalah 2 *open knight's tour* pada papan catur berukuran 4x8.



Gambar 2.13 *Closed Knight's Tour* Pada Papan Catur 3x10

3. KESIMPULAN

Aplikasi teori graf dalam permasalahan *Knight's Tour* ini telah banyak membantu para pemikir dalam menyelesaikan teka-teki *Knight's Tour* lebih lanjut. Sampai saat ini, *Knight's Tour* masih terus dibahas dan diteliti. Penemuan-penemuan baru pun terus bermunculan terutama dalam kaitan papan catur tidak umum yang berbentuk persegi panjang. Teori-teori dan metoda tingkat lanjut dalam menemukan *Knight's Tour* pada papan catur berbentuk persegi panjang tersebut masih terus dikembangkan.

Adapun untuk papan catur berbentuk persegi berukuran n x n dengan n genap umumnya memiliki *closed Knight's Tour* dengan n > 4, sementara untuk n ganjil tidak dapat ditemukan *closed Knight's Tour*, namun masih mungkin memiliki *open Knight's Tour*.

Pada papan catur berbentuk persegi panjang, umumnya penemuan *Knight's Tour* dapat dijelaskan oleh karakterisasi yang ditemukan Allen Schwenk. Pada papan catur lain yang berukuran relatif besar, umumnya *Knight's Tour* dapat ditemukan dengan menggabungkan *Knight's Tour* yang ada pada papan berukuran lebih kecil yang menyusunnya.

DAFTAR REFERENSI

1[1] Munir, Rinaldi. 2006. *Matematika Diskrit*. Program Studi Informatika, Institut Teknologi Bandung

2[2] Jong Jek Siang, Drs., M.Sc., *Matematika Diskret dan Aplikasinya*, Andi Offset, 2006

[3] George Jelliss. *Knight's Tours Notes*. http://www.ktn.freeuk.com. Tanggal Akses: 30 Desember 2007

[4] Mark R. Keen. *The Knight's Tour*. http://www.markkeen.com/knight/index.html. Tanggal Akses: 30 Desember 2007

[5] --. *Knight's Tour.* http://mathworld.wolfram.com/KnightsTour.html. Tanggal Akses: 31 Desember 2007

[6] Wikipedia 2006 http://en.wikipedia.org/wiki/Knight's_tour Tanggal Akses: 1 Januari 2008