

TEORI BILANGAN DALAM PERSAMAAN DIOPHANTINE

Ginan Ginanjar Pramadita – NIM: 13506014

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung
2008
E-mail: if16014@students.if.itb.ac.id

Abstrak – Makalah ini membahas tentang dasar dari persamaan Diophantine dengan menggunakan konsep teori bilangan diantaranya algoritma Euclidean. Persamaan Diophantine yang akan dibahas hanya untuk persamaan linear. Dengan Persamaan Diophantine dan algoritma Euclidean, kita dapat menyelesaikan suatu sistem persamaan linear yang banyaknya kurang dari jumlah peubah yang diketahui.

Kata Kunci: Teori Bilangan, Persamaan Diophantine, Algoritma Euclidean.

1. PENDAHULUAN

Dalam teori bilangan, kita biasanya tertarik pada bilangan bulat $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Sekarang mari kita mulai dengan masalah sederhana yang sudah tidak asing bagi siapa saja yang telah mempelajari aljabar linear elementer.

Misalnya diberikan persoalan:

Sebuah boneka dijual seharga 7 dolar dan mainan kereta api seharga 18 dolar. Sebuah toko mainan menjual 25 boneka dan mainan kereta dengan total harga 208 dolar. Berapa banya boneka dan mainan kereta yang dijual?

Solusi:

misalnya x adalah banyaknya boneka dan y banyaknya mainan kereta api. Maka kita memiliki dua persamaan dengan dua peubah yang belum diketahui nilainya.

$$\begin{aligned}x + y &= 25 & (1) \\7x + 18y &= 208 & (2)\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat diselesaikan dengan berbagai cara, tapi mungkin adan lebih mudah dengan mengubah persamaan pertama menjadi: $x = 25 - y$ lalu kita sulihkan nilai x ke persamaan kedua:

$$\begin{aligned}7(25 - y) + 18y &= 208 \\175 - 7y + 18y &= 208 \\- 7y + 18y &= 208 - 175 \\11y &= 33 \\y &= 3\end{aligned}$$

Lalu kita sulihkan $y = 3$ ke dalam salah satu persamaan semula dan didapat $x = 22$. Dengan mudah kita dapat memeriksa kebenaran nilai tersebut dalam kedua persamaan di atas.

Dalam soal tersebut terdapat dua pernyataan sehingga menghasilkan dua persamaan linear. Tapi, bagaimana jika pernyataan yang pertama: $x + y = 25$ kita hilangkan. Apakah solusinya dapat dicari?

2. SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Sekarang kita lihat persoalan yang lebih menarik:

Misalnya sebuah boneka dijual seharga 7 dolar dan mainan kereta api seharga 18 dolar. Sebuah toko menerima 208 dolar dari hasil penjualan tersebut. Berapa banyaknya boneka dan mainan kereta api yang dijual?

Persoalan ini mirip dengan sebelumnya, namun kali ini kita hanya diberikan sebuah persamaan:

$$7x + 18y = 208 \quad (3)$$

Dalam aljabar linear kita tahu bahwa untuk menyelesaikan persamaan linear, kita membutuhkan persamaan paling sedikit sebanyak jumlah peubah. Pada soal di atas terdapat dua peubah: x dan y dengan hanya sebuah persamaan. Tapi, ada satu tambahan kunci dalam soal di atas, yaitu banyaknya boneka dan mainan kereta api tidak mungkin negatif.

Sekarang kita mulai dengan mengubah bentuk persamaan (3):

$$7x = 208 - 18y$$

$$x = \frac{208 - 18y}{7}$$

$$x = 29 - 2y + \frac{5 - 4y}{7}$$

Kelihatannya kita belum menyelesaikan apapun, tapi karena y adalah sebuah bilangan bulat, jadi pastilah nilai $(29 - 2y)$ dan $(5 - 4y)/7$ juga adalah bilangan bulat. Misalnya kita sebut $(5 - 4y)/7$ dengan a sehingga menghasilkan persamaan:

$$a = \frac{5 - 4y}{7}$$

$$7a = 5 - 4y$$

$$4y = 5 - 7a$$

$$y = \frac{5 - 7a}{4}$$

$$y = 1 - a + \frac{1 - 3a}{4}$$

Seperti sebelumnya, di sini kita belum menemukan solusi persamaan, tapi sekarang persamaan terlihat menjadi lebih sederhana karena pembagi menjadi lebih kecil. Pembagi semula 4 dan kini menjadi 7.

Seperti sebelumnya, kita tahu bahwa a adalah bilangan bulat dan $1 - a$ pastilah juga bilangan bulat. Sehingga $(1 - 3a)/4$ juga bilangan bulat dan kita sebut dengan b . Sekarang kita ulangi langkah di atas untuk b :

$$b = \frac{1 - 3a}{4}$$

$$4b = 1 - 3a$$

$$3a = 1 - 4b$$

$$a = \frac{1 - 4b}{3}$$

$$a = -b + \frac{1 - b}{3}$$

Dengan alasan yang sama dengan sebelumnya, $(1 - b)/3$ pasti adalah bilangan bulat dan kita sebut c .

$$c = \frac{1 - b}{3}$$

$$3c = 1 - b$$

$$b = 1 - 3c$$

Sekarang dapat dilihat bahwa berapapun bilangan bulat c , b akan menjadi bilangan bulat. Dengan menyulihkan b ke persamaan sebelumnya dan didapat:

$$a = \frac{1 - 4b}{3} = \frac{1 - 4(1 - 3c)}{3} = \frac{-3 + 12c}{3} = -1 + 4c \quad (4)$$

Sekarang kita sulihkan a untuk mendapatkan y :

$$y = \frac{5 - 7a}{4} = \frac{5 - 7(-1 + 4c)}{4} = \frac{12 - 28c}{4} = 3 - 7c \quad (5)$$

Akhirnya kita dapat menyulihkan y pada persamaan (5) ke dalam persamaan (3) untuk mendapatkan x sehingga:

$$x = 22 + 18c$$

$$y = 3 - 7c$$

Jika $c = 0$ kita memperoleh solusi yang sama dengan persoalan sebelumnya yaitu $x = 22$ dan $y = 3$. Akan tetapi, untuk bilangan bulat c yang berbeda akan menghasilkan hasil yang berbeda terhadap x dan y . Kita dapat lihat bahwa nilai positif c akan mengakibatkan nilai negatif bagi y . Tapi jika $c = -1$, maka $x = 4$ dan $y = 10$. Akan mudah diperiksa kebenaran nilai x dan y dengan menyulihkan kembali ke persamaan semula. Jika bilangan c menjadi lebih kecil dari -1 maka x menjadi negatif. Jadi, untuk menghasilkan nilai positif bagi x dan y , hanya mungkin jika $c = 0$ atau $c = -1$. Dengan menyulihkan c maka untuk jawaban yang benar, c haruslah bernilai 0.

3. PERSAMAAN DIOPHANTINE LINEAR

Apa yang baru saja kita lakukan untuk menyelesaikan persamaan dikenal dengan *persamaan Diophantine* – sebuah persamaan yang akar-akarnya haruslah bilangan bulat.

Ada banyak bentuk persamaan Diophantine. Persamaan yang baru saja kita selesaikan disebut dengan *persamaan Diophantine linear* yaitu semua koefisien paubahnya adalah bilangan bulat.

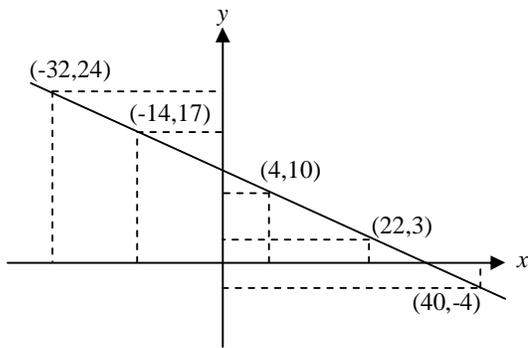
Pada persamaan $7x + 18y = 208$, jika hanya dibutuhkan akar-akar yang merupakan bilangan bulat (boleh positif atau negatif), maka persamaan

$$x = 22 + 18c \text{ dan } y = 3 - 7c$$

akan menghasilkan solusi yang tak berhingga, dimana setiap bilangan bulat berbeda untuk c menghasilkan solusi yang berbeda pula.

Pandangan yang lebih geometrik mengenai hal ini: jika kita memiliki sebuah grafik $7x + 18y = 208$, solusinya adalah setiap titik yang dilalui garis tersebut yang merupakan bilangan bulat.

Dapat dilihat dalam gambar 1 pada halaman selanjutnya.



Gambar 1: grafik $7x + 18y = 208$

Misalnya kita mulai dengan titik sembarang (x_1, y_1) dan menjumlahkan 18 dengan koordinat x dan pada saat yang sama dikurangi koordinat y dikurangi 7.

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + 18 \\y_2 &= y_1 - 7\end{aligned}$$

Kita dapat menjumpai titik lain dalam grafik yang juga memiliki koordinat bulangan bulat. Dengan memperhatikan persamaan (3):

$$7x + 18y = 208$$

Jika kita menjumlahkan 18 dengan x , kita mengurangkan ruas kiri dengan $7 \cdot 18$. Jika kita kurangi y dengan 7, kita menjumlahkan ruas kiri dengan nilai yang sama: $18 \cdot 7$. Perubahan berikutnya adalah untuk membuat ruas kiri tidak berubah.

$$\begin{aligned}7(x - 18) + 18(y + 7) &= 208 \\7x - (7 \cdot 18) + 18y + (18 \cdot 7) &= 208\end{aligned}$$

Garis pada gambar 1 memiliki gradien yang negatif dan memotong kuadran I serta melalui beberapa titik di kuadran itu. Garis yang memiliki gradien positif, dapat memiliki solusi yang tak berhingga jika keduanya positif. Dengan fakta tersebut, suatu persamaan dapat dibentuk:

$$ax + by = c \quad (6)$$

Dimana a , b , dan c adalah bilangan bulat dan memiliki solusi (x, y) . Tapi, apakah x dan y juga adalah bilangan bulat? Jawabannya tidak. Sebagai contoh, bagaimana jika a dan b adalah genap dan c ganjil? Ruas kiri pastilah genap dan jika ruas kanan ganjil, tidak ada kemungkinan untuk menghasilkan solusi bilangan bulat. Sama halnya jika a dan b keduanya adalah kelipatan 3 dan c tidak. Ruas kiri akan menjadi kelipatan 3 dan ruas kanan tidak. Persamaan ini pun tidak akan menghasilkan solusi bilangan bulat.

Jadi, jika Pembagi Bersama Terbesar (PBB) dari a dan b tidak dapat membagi c maka tidak ada solusi bilangan bulat. Hal yang menarik adalah jika PBB dari

a dan b juga dapat membagi c , maka tidak ada batas solusi bulangan bulat.

Pengamatan lebih lanjut tentang permasalahan tersebut juga diterapkan pada persamaan Diophantine linear umum:

Jika (x, y) adalah solusi bilangan bulat untuk

$$ax + by = c$$

maka akan terdapat $(x + bk, y - ak)$ dimana k adalah bilangan bulat. Jika kita menyulihkan $x + bk$ untuk x dan $y - ak$ untuk y , kita dapatkan:

$$\begin{aligned}a(x - bk) + b(y - ak) &= c \\ax + abk + by - abk &= c \\ax + by &= c\end{aligned}$$

Jadi jika (x, y) adalah solusi, maka $(x + bk, y - ak)$ juga adalah solusi. Contoh dari hal ini sudah kita terapkan pada pembahasan sebelumnya.

4. PENYEDERHANAAN PECAHAN

Sekarang kita lompat dahulu ke persoalan yang sekilas tidak ada kaitannya dengan persamaan Diophantine linear, tapi sebenarnya sangatlah berkaitan.

Misalnya kita akan menyederhanakan bentuk:

$$\frac{179703941}{215237573}$$

Untuk menyederhanakan pecahan tersebut, kita membutuhkan PBB dari pembilang dan penyebut yang akan membagi pembilang dan penyebut.

$$215237579 = 17970941 \cdot 1 + 3553362$$

Jika ada suatu bilangan yang dapat membagi 215237573 dan 179703941 maka bilangan itu haruslah juga dapat membagi 35533632, sehingga:

$$\text{PBB}(215237573, 179703941) = \text{PBB}(179703941, 35533632)$$

Jika kita lanjutkan, maka:

$$\begin{aligned}179703941 &= 35533632 \cdot 5 + 2035781 \\35533632 &= 2035781 \cdot 17 + 925355 \\2035781 &= 925355 \cdot 2 + 185071 \\925355 &= 185071 \cdot 5 + 0\end{aligned}$$

Di dalam setiap kasus, setiap bilangan yang dapat membagi ruas kiri pada persamaan di atas, juga dapat membagi ruas kanan. Pada baris terakhir, 185071

pastilah PBB dari bilangan-bilangan itu. Dengan membagi pembilang dan penyebut dengan 185071 akan kita dapatkan pecahan yang sudah disederhanakan.

$$\frac{179703941}{215237573} = \frac{185071 \cdot 971}{185071 \cdot 1163} = \frac{971}{1163}$$

Metoda yang baru saja kita lakukan disebut *algoritma Euclidean*.

5. ALGORITMA EUCLIDEAN DAN PERSAMAAN DIOPHANTINE

Sekarang kita gunakan algoritma Euclidean pada persamaan Diophantine yang telah diselesaikan pada awal pembahasan: $7x + 18y = 208$ untuk mencari PBB (7, 18).

$$\begin{aligned} 18 &= 7 \cdot 2 + 4 \\ 7 &= 4 \cdot 1 + 3 \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Pada contoh ini, bilangan akhir adalah 1 jadi PBB dari 18 dan 7 adalah 1 (18 dan 7 adalah relatif prima). Tapi, hal yang menarik adalah anggota bilangan PBB dari perhitungan di atas: 18, 7, 4, 3, dan 1 adalah bilangan yang sama yang didapatkan sebagai penyebut dari bagian pecahan dan koefisien bagi a , b , dan c di bagian pembilang pecahan. Ketika kita menyelesaikan persamaan Diophantine untuk persamaan (3).

Kita tidak pernah menggunakan bilangan 208 ketika menggunakan algoritma Euclidean untuk mencari PBB 18 dan 7. Jika kita periksa kembali kalkulasi aritmatika yang telah diselesaikan di tiap kasus di atas, akan jelas mengapa bilangan yang dihasilkan di kedua contoh harus sama. Andaikan persamaan awal Diophantine 208 diganti dengan 1:

$$\begin{aligned} 7x + 8y &= 1 \\ x &= \frac{1 - 8y}{7} = -2y + \frac{1 - 4y}{7} \\ a &= \frac{1 - 4y}{7} \\ y &= \frac{1 - 7a}{4} = -a + \frac{1 - 3a}{4} \\ b &= \frac{1 - 3a}{4} \\ a &= \frac{1 - 4b}{3} = -b + \frac{1 - b}{3} \\ c &= \frac{1 - b}{3} \\ b &= 1 - 3c \end{aligned}$$

Hal yang menarik dari penempatan 1 untuk menggantikan 208 adalah untuk tetap konstan., mengingat 208 telah disederhanakan menjadi berbagai penyebut yang membaginya dengan bulat pembilangnya. Dalam perhitungan ini semua koefisien memiliki nilai yang sama dengan yang dihasilkan pada perhitungan untuk menghitung PBB dari 7 dan 18.

Untuk mendapatkan solusi, kita harus kembali menyulihkan $b = 1 - 3c$. Setelah beberapa langkah, kita dapatkan $x = -5 + 18c$ dan $y = 2 - 7c$ dimana c adalah bilangan bulat sembarang. Persamaan tersebut tidak memiliki solusi jika x dan y positif. Oleh karena itu, ketika melakukan perhitungan PBB dari a dan b dan PBB menghasilkan 1, kita telah melakukan banyak perhitungan terhadap penyelesaian persamaan Diophantine

$$ax + by = 1$$

Jadi, jika kita dapat melakukan algoritma Euclidean, kita hampir tidak melakukan perhitungan melainkan hanya melakukan sedikit aritmatika pada koefisien yang dibutuhkan untuk menyelesaikan persamaan dimana 1 digantikan dengan bilangan bulat sembarang c .

Sebagai contoh, untuk mencari solusi $7x + 18y = 208$ asumsikan kita telah menyelesaikan $7x + 18y = 1$. Persamaan lebih lanjut adalah

$$x = -5 + 18c \text{ dan } y = 2 - 7c$$

dimana c bilangan bulat sembarang. Solusi yang mudah adalah dengan membuat $c = 0$ sehingga didapatkan mendapatkan $x = -5$ dan $y = 2$ sebagai solusi parsial. Akan tetapi, jika kita mengalikan x dan y dengan 208, lalu ruas kiri dinaikan dengan faktor dari 208 maka jika kita naikan ruas kanan dengan faktor yang sama, kita mendapatkan sepasang (x, y) yang memenuhi persamaan awal $7x + 18y = 208$. Jadi solusinya adalah:

$$x = -5 \cdot 208 = -1040 \text{ dan } y = 2 \cdot 208 = 416.$$

Kita juga dapat melihat bahwa dengan menambah kelipatan 18 terhadap x dan menambah kelipatan 7 terhadap y akan membawa kepada solusi yang lain. Jadi solusi umumnya adalah:

$$x = -1040 + 18k \text{ dan } y = 416 - 7k$$

Jika $k = 58$ sebagai contoh, akan menghasilkan $x = 4$ dan $y = 10$.

Jika kita memiliki solusi untuk 1 dari persamaan Diophantine linear, kita akan mendapatkan yang lainnya dengan menambah konstanta dengan kelipatan dari koefisien lawannya dan yang kita butuhkan hanya sebuah solusi.

Pada contoh sebelumnya, setelah kita sampai pada

$$b = 1 - 3c$$

kita kembali menuliskannya dan secara hati-hati mencatat jejak dari koefisien c dalam perhitungan. Tapi, karena setiap solusi akan menghasilkan solusi yang lain mengapa tidak dibuat saja $c = 0$? Lalu kita hanya perlu untuk mencari bilangan tunggal.

6. MENGGABUNGKAN SEMUANYA

Dengan menggabungkan teknik di atas namun dengan bentuk yang sudah paling sederhana, akan diselesaikan persamaan Diophantine yang lain.

Misalnya pada suatu pet shop, harga tikus 5 dolar, kumbang 3 dolar dan jangkerik 10 sen. Jika 100 hewan telah terjual dan total penerimaan adalah 100 dolar, ada berapa tikus, kumbang, dan cricket yang dijual?

Jika r , g , dan c adalah banyaknya tikus, kumbang, dan jangkerik, sehingga kita memiliki dua persamaan:

$$\begin{aligned} r + g + c &= 100 \\ 5r + 3g + 0.1c &= 100 \end{aligned}$$

Untuk mengubah persamaan di atas agar semua koefisien menjadi bilangan bulat, kita dapat mengalikan persamaan kedua dengan 10:

$$\begin{aligned} r + g + c &= 100 \\ 10r + 30g + c &= 1000 \end{aligned}$$

Jika kita kurangkan persamaan pertama dengan kedua, didapatkan:

$$49r + 29g = 900$$

Karena PBB 49 dan 29 adalah 1 yang dapat membagi 900 jadi akan ada solusi untuk kedua persamaan di atas.

Dengan algoritma Euclidean:

$$\begin{aligned} 49 &= 29 \cdot 1 + 20 \\ 29 &= 20 \cdot 1 + 9 \\ 20 &= 9 \cdot 2 + 2 \\ 9 &= 2 \cdot 4 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Kita akan gunakan i , j , k , .. sebagai bilangan bulat untuk menggantikan pecahan yang didapat dari persamaan Diophantine. Kita akan secara parsial selesaikan persamaan sederhana:

$$49r + 29g = 1$$

Lalu mengalikan r dan g dengan 900 untuk menghasilkan solusi dari persamaan awal.

Tanpa melakukan kalkulasi, tapi hanya dengan membaca nilai yang didapatkan dari algoritma Euclidean untuk menghitung PBB 49 dan 29 dengan peubah i , j , k , dan l sebagai bilangan bulat dari pecahan, kita hanya menuliskan hubungan diantara peubah-peubah tersebut. Untuk mencari solusi dari persamaan, hanya ekspresi di sebelah kanan yang penting. Sebagai catatan, bagaimana bilangan-bilangan dalam pecahan (selain 1) adalah nilai yang sama dengan bilangan di sebelah kiri dari perhitungan algoritma Euclidean untuk mencari PBB 49 dan 29.

$$\begin{aligned} r &= \frac{1 - 29g}{49} & g &= \frac{1 - 49r}{29} \\ i &= \frac{1 - 20r}{29} & r &= \frac{1 - 29i}{20} \\ j &= \frac{1 - 9i}{20} & i &= \frac{1 - 20j}{9} \\ k &= \frac{1 - 2j}{9} & j &= \frac{1 - 9k}{2} \\ l &= \frac{1 - k}{2} & k &= 1 - 2l \end{aligned}$$

Dari baris terakhir, $k = 1 - 2l$ untuk bilangan bulat sembarang l . Jadi jika $l = 0$, kita dapatkan solusi parsial. Jika $l = 0$ maka $k = 1$. Jika $k = 1$ maka $j = -4$. Jika $j = -4$, maka $i = 9$. Jika $i = 9$, maka $r = -13$. Dan jika $r = -13$, maka $g = 22$.

Jadi $r = -13$ dan $g = 22$ adalah solusi untuk

$$49r + 29g = 1$$

Untuk mendapatkan solusi parsial dari persamaan awal, kalikan dengan 900 sehingga

$$r = -11700 \text{ dan } g = 19800.$$

Dari kasus sebelumnya, kita tahu bahwa solusi umum untuk persamaan awal menjadi:

$$\begin{aligned} r &= -11700 + 29k \\ g &= 19800 - 49k \end{aligned}$$

Kita mencari nilai tak negatif untuk r dan g . Jika 11700 dibagi 29 maka dihasilkan bilangan diantara 403 dan 404. Jika $k = 404$ maka nilai $r = 16$ dan $g = 4$. Bilangan 404 didapat dari. Jika $k = 403$ atau $k = 405$ maka r dan g negatif.

Karena ada 100 hewan maka, $c = 80$, $r = 16$, $g = 4$.

7. KESIMPULAN

Suatu sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan beragam cara yang berbeda. Jika kita hanya tertarik pada solusi yang merupakan bilangan bulat, dapat digunakan persamaan Diophantine. Dengan persamaan Diophantine, jika hanya diinginkan hasil yang tak negatif, banyaknya persamaan dapat kurang dari banyaknya peubah.

Untuk lebih menyederhanakan persamaan Diophantine, dapat kita manfaatkan algoritma Euclidean. Dengan ini, kita akan membutuhkan peubah tambahan sebagai parameter. Selanjutnya dengan melakukan perhitungan terhadap peubah tersebut akan didapat bilangan bulat yang sesuai. Dengan persamaan Diophantine semula.

Satu hal yang harus diingat ketika melakukan persamaan Diophantine adalah kita harus berhati-hati dalam mencatat “jejak” dari parameter yang digunakan. Karena diakhir proses, kita harus menyulihkan kembali setiap “jejak” ke dalam “jejak” sebelumnya.

DAFTAR REFERENSI

- [1] Chen, Willian. “A Simple Diophantine Equation”. <http://rutherglen.ics.mq.edu.au/>
Tanggal akses: 31 Desember 2007 pukul 19.30.
- [2] Davis, Tom. “Introduction to Diophantine Equation”. <http://www.springerlink.com/>, 2005.
Tanggal akses: 2 Januari 2008 pukul 20.00.
- [3] Jarden, M. Diophantine Properties of Subfield of \mathbb{Q} . 1978.
- [4] Mulders, T. and Storjohann A. Certified dense linear system solving. *J. Symbolic Computation*, 2004.
- [5] Munir, Rinaldi. *Diktat Kuliah IF2153 Matematika Diskrit*. Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika, Institut Teknologi Bandung. 2006.