Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf Sederhana

M. Faisal Baehaki
Jurusan Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung, Bandung 40135
e-mail: faisal.baihaki@comlabs.itb.ac.id

Intisari

Metode untuk menghitung kelas-kelas kongruensi dikenal dengan teori enumerasi Burnside-Polya. Metode ini merupakan teknik yang penting, karena dapat juga digunakan untuk menghitung kelas-kelas isomorfisma graf. Tulisan ini akan menyajikan proses pembuktian Teorema Polya dan aplikasinya pada enumerasi graf sederhana.
Kata kunci : *enumerasi, kelas-kelas isomorfisma graf, Teorema Polya*

Abstract

Method for counting the congruence classes, is known as Burnside-Polya enumeration theory. This method is an extremely important counting technique, since it can also be used to count graph isomorphism classes. This paper describes about proving Polya theorem and also gives an application this method for counting simple graph enumeration.
Keywords : *enumeration, graph isomorphism classes, Polya theorem*

1. PENDAHULUAN

Teori Graf adalah ilmu yang berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan ilmu Aljabar yang lebih dahulu berkembang. Ilmu Aljabar (abstrak) yang merupakan bagian dari ilmu Matematika, pada dasarnya berkembang pesat karena dia berhubungan dengan himpunan, operasi, dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

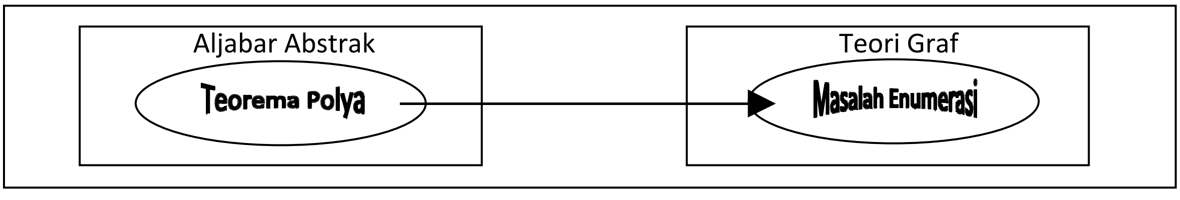
Keunikan Teori Graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (verteks) dan garis (edge). Meskipun pokok bahasan dari topic-topik Teori Graf sangat sederhana tetapi isi di dalamnya belumlah tentu sesederhana itu. Kerumitan demi kerumitan masalah-masalah selalu pasti ada dan bahkan sampai saat ini masih ada masalah ada masalah yang belum terpecahkan.

Secara garis besar, menurut R.J Wilson dan J. J Watkins [5] ada empat masalah pokok dalam Teori Graf yaitu:
1. Masalah *Eksistensi*: Masalah yang berhubungan dengan pertanyaan, apakah ada suatu graf yang…? Apakah mungkin dibuat atau dibangun suatu…?
2. Masalah *Konstruksi*: Masalah yang berhubungan dengan pembentukan atau pengkonstruksian atau pengadaan. Jika suatu graf ada, apakah mungkin kita mengkonstruksinya? Bagaimana kita dapat membangunnya?
3. Masalah *Enumerasi*: masalah yang berhubungan dengan perhitungan atau pencacahan. Berapa banyak graf seperti itu? Bagaimana cara kita menghitungnya?
4. Masalah *Optimasi*: Masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, terdekat, terkecil atau paling…. Jika ada banyak kemungkinan, bagaimana kita mendapatkan yang terbaik? Mana yang paling baik?

Masalah enumerasi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah masalah enumerasi yang berhubungan dengan perhitungan banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfis satu dengan yang lainnya. Graf sederhana di sini mengandung arti sebagai graf yang paling banyak ada satu garis pada setiap pasang titiknya dan tidak memuat untai diri (*self loop*).

Pada dasarnya tulisan ini merupakan penggabungan dua ilmu, yaitu antara bidang Aljabar (Abstrak) dan bidang Teori Graf. Artinya Aljabar Abstrak melalui Teorema Polya-nya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi graf sederhana.

Gambar 1: Garis besar konsep tulisan



2. DEFINISI DAN TEOREMA ALJABAR YANG MENDUKUNG TEOREMA POLYA

Pada bagian berikut ini akan dibahas beberapa definisi dan beberapa teorema yang mendukung keberadaan Teorema Polya [1].

Definisi 2.1 :
Himpunan $G \neq \emptyset$ dengan operasi o yang didefinisikan padanya disebut Group (G,o) , bila 4 sifat dibawah ini dipenuhi :
(1) $\forall x, y \in G$, $x \circ y \in G$ (sifat tertutup terhadap operasi o)
(2) $\exists e \in G$, $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$ (ada elemen identitas e)
(3) $\forall x \in G$, $\exists x^{-1} \in G$ sehingga $x \circ x = x \circ x = e$ (ada elemen invers)
(4) $\forall x,y,z \in G$, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (sifat asosiatif)
Himpunan H (himpunan bagian dari G), disebut group bagian (G,o) jika (H,o) adalah juga group.

Definisi 2.2 :
Misalkan X adalah himpunan berhingga yang banyak anggotanya n . Group Simetri himpunan berhingga Sn adalah kumpulan semua permutasi dari himpunan X .

Definisi 2.3 :
Apabila G adalah group bagian dari group Simetri Sn dan untuk $x \in X$, maka :
(a) $Gx \equiv \{g(x) : g \in G\}$, yaitu himpunan semua bayangan elemen $x \in X$ oleh permutasi di G. Gx sering disebut juga orbit x terhadap G.
(b) $Gx \equiv \{g \in G : g(x) = x\}$, adalah himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap. Himpunan Gx disebut sebagai penstabil x di G.
(c) $F(g) \equiv \{z \in X : g(z) = z\}$, yaitu F(g) adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $g \in G$. Himpunan F(g) disebut sebagai karakter permutasi g di himpunan X.

Definisi 2.4 :
Group G disebut group berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam group G disebut order G dan disimbolkan dengan $|G|$.

Definisi 2.5 :
Jika H adalah group bagian dari group G dan g adalah anggota G, maka :
$gH = \{gh : h \in G\}$ disebut koset kiri H terhadap g dan $Hg = \{hg : h \in G\}$ disebut koset kanan H terhadap g.

Definisi 2.6 :
Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan) H yang berbeda dari group G akan membentuk partisi group G, yaitu :
1. Setiap anggota G akan berada pada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan)H.
2. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.
Kumpulan yang mempunyai sifat seperti ini disebut kelas.

Teorema 2.1 :
Jika H adalah group bagian dari group G dan $|H| = k$ maka setiap koset kiri (kanan) H memiliki kardinalitas k.

Teorema 2.2 (Lagrange) :
Order group berhingga dapat dibagi oleh order sembarang group bagiannya.

Teorema 2.3 :
Apabila himpunan berhingga X memiliki k orbit terhadap group G yang beda, maka berlaku :
(a) $\forall x \in X, |G|_x |G|_x = G$ (Teorema Orbit-Penstabil)
(b) $\sum_{x \in X} |Gx| = k|G|$
(c) $\sum_{x \in X} |Gx| = \sum_{g \in G} |F(g)|$
Untuk membuktikan Teorema 2.3 (a)-(c) dapat digunakan definisi dan teorema sebelumnya.

Teorema 2.4 (Burnside-Frobenius) :
$\sum_{x \in X} |Gx| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

Definisi 2.7 :
Diberikan penyajian untai (cycle) dari f (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggotanya n) yang memuat sebanyak a1 untai dengan panjang 1, sebanyak a2 untai dengan panjang 2, sebanyak a3 untai dengan panjang 3 , ..., sebanyak a_i untai dengan panjang i dan i = 1,2,3,4, ..n , maka : tipe untai f disimbolkan dengan vektor [a1, a2, a3, ..., a_n] dan bobot f adalah bilangan bulat positif $W = 1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \ldots n^{a_n}$.
Contoh : X ={1,2,3,...8}, f = (1354)(2)(687), dalam hal ini $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$, dan lainnya nol. Jadi tipe untai f = [10110000], dan bobot f = $1^1 3^1 4^1$.

Definisi 2.8 :
Diberikan G adalah group permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ bertipe untai [a_1, a_2, a_3, ..., a_n]. Indeks siklik g didefinisikan sebagai $Z(g; x_1, x_2, x_3, .., x_n) \equiv x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} .. x_n^{a_n}$ dan indeks siklik group G didefinisikan sebagai:

$Z(G;x_1,x_2, x_3,..,x_n) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} Z(G; x1, x2, x3, \ldots, xn)$

Definisi 2.9 :
Fungsi *f* dari himpunan berhingga X ke himpunan berhingga Y disebut pewarnaan X. Himpunan berhingga Y disebut warna, sedangkan himpunan semua pewarnaan X terhadap warna Y disebut himpunan C. Dua pewarnaan f, g∈C disebut tak dapat dibedakan terhadap group G yang beraksi pada X jika $\exists\pi \in G$ sehingga *f(x)=g(*$\pi(x)$*)* untuk ∀x ∈X. Jelas bahwa relasi tak dapat dibedakan merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan.

Definisi 2.10 :
Kelas-kelas kongruensi dalam himpunan C dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di C terhadap group G.

Definisi 2.11 :
Fungsi bobot w memetakan Y ke himpunan r { $w(y_1)$, $w(y_2)$, $w(y_3)$,…,$w(y_r)$}. Persediaan pola C terhadap group G adalah:
$PP(G;w(y_1),w(y_2),w(y_3),\ldots,w(y_r)) = \sum_{n1+n2+..+nr=n} K(n1, n2, \ldots, nr)[w(y1)]^{n_1}[w(y2)]^{n_2}\ldots[w(yr)]^{n_r}$
$K(n_1,n_2,n_3..,n_r)$ adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan (banyak pola) yang dapat dibedakan sehingga warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 anggota, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 anggota, … dan $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r anggota.

Teorema 2.5 :
Diberikan C = { *f* | *f:X→Y*} dan X, Y adalah himpunan berhingga; juga diketahui bahwa G adalah group permutasi yang beraksi pada X. Untuk tiap π∈ G didefinisikan pemetaan π' dari C ke C dengan sifat: π'(*f*(*x*))=*f*(π(x)) untuk ∀x∈X dan ∀*f* ∈C, maka berlakulah bahwa:
(a) π' adalah permutasi di C.
(b) G' = { π ' : π∈G} adalah group.

Teorema 2.6 :
Jika Y memuat paling sedikit 2 anggota maka pemetaan dari G ke G' yang didefinisikan dengan φ : π→ π' adalah isomorfisma (group).

Teorema 2.7 :
Misalkan G adalah group permutasi yang beraksi pada himpunan X = $\{x_1,x_2,x_3,..x_n\}$ dan C adalah himpunan semua fungsi dari X ke Y = $\{y_1, y_2, y_3,..,y_r\}$ Jika w(y) adalah fungsi bobot pada Y, dan didefinisikan ω(*f*)∈C dengan bentuk: ω(*f*) = [w(*f*(x_1))] [w(*f*(x_2))] .. [w(*f*(x_n))] maka:

(1) Jika f,∅ ∈C mempunyai sifat tak dapat dibedakan terhadap G, maka ω(*f*) = ω(∅).
(2) Jika pola-pola yang berbeda di C dinyatakan dengan C_1, C_2, C_3, … C_k ; $\omega(C_i)$(*i* = 1,2,3,..,k) adalah nilai konstan atas C_i , maka pola persediaan C dapat dinyatakan sebagai:

$PP(G;w(y_1),w(y_2),w(y_3),\ldots,w(y_r)) = \sum_{i=1}^{k} ύ\ (C_i)$

Teorema 2.8 (Burnside-Frobenius dengan bobot):
Jika X_1, X_2, X_3, .. X_k adalah orbit yang berbeda dalam himpunan X=$\{x_1, x_2, x_3,..x_n\}$ terhadap permutasi G $\{g_1, g_2, g_3,.. ,g_m\}$, kemudian pada X didefinisikan fungsi bobot $\omega(x)$ yang merupakan simbol abstrak dengan sifat bila x_r dan X_s berada pada orbit yang sama, maka $\omega(x_r) = \omega(x_s)$ dan terdapatlah fungsi bobot pada G, yaitu $W(g_1) = \sum_{x\in F(g)} ύ\ (x)$.

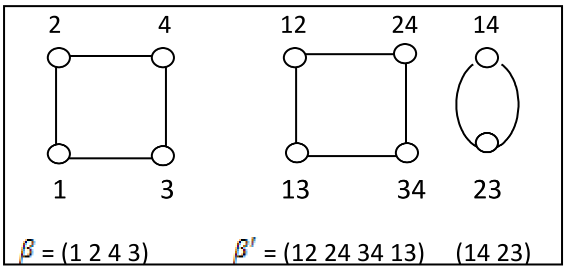
3. **APLIKASI PADA GRAF SEDERHANA**

Apabila *n* titik pada graf *G* dikenai permutasi, maka n(n-1)/2 pasangan titik tak berurut (artinya ij = ji) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan titik tak berurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai garis, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut. Sebagai contoh kongkretnya diberikan himpunan titik X = {1, 2, 3, 4} yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan n=4 buah. Seluruh kemungkinan garis tak berarah yang ada pada 4 titik tersebut adalah (4)(3)/(2)=6 buah. Suatu permutasi β = (1 2 3 4) pada himpunan titik tersebut, akan membangkitkan permutasi 6 elemen tak berurut sebagai berikut :

1 2 3 4
â = akan membangkitkan
2 4 1 3

12 13 14 23 24 34
â' =
24 21 23 41 43 13

Gambaran kongkretnya adalah seperti pada gambar di bawah ini :



Gambar 2: Permutasi β dan permutasi β' yang dibangkitkan oleh β

Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu graf membentuk group simetri penuh (sebut saja S_n), maka permutasi dari pasangan titik itu (garis) itu juga membentuk group Simetri (sebut R_n). Jadi, group S_n (permutasi titik pada graf) akan membangkitkan group R_n (permutasi garis pada graf). Seluruh bentuk group S_4 ada 24, yaitu :

$g_1 = (1)(2)(3)(4)$,	$g_7 = (142)(3)$
$g_2 = (14)(2)(3)$,	$g_8 = (12)(34)$
$g_3 = (1)(24)(3)$,	$g_9 = (13)(2)(4)$
$g_4 = (1)(2)(34)$,	$g_{10} = (143)(2)$
$g_5 = (12)(3)(4)$,	$g_{11}=(134)(2)$
$g_6 = (124)(3)$,	$g_{12}=(13)(24)$
$g_{13} = (1)(23)(4)$	$g_{19} = (1243)$
$g_{14} = (14)(23)$	$g_{20} = (1234)$
$g_{15} = (1)(234)$	$g_{21} = (132)(4)$
$g_{16} = (1)(243)$	$g_{22} = (1432)$
$g_{17} = (123)(4)$	$g_{23} = (1342)$
$g_{18} = (1423)$	$g_{24} = (1324)$

Tipe untai dari S_4 ada 5, yaitu :

1. Bentuk [4,0,0,0] ada 1 buah dan indeks sikliknya : x_1^4
2. Bentuk [2,1,0,0] ada 6 buah dan indeks sikliknya : $x_1^2x_2$
3. Bentuk [1,0,1,0] ada 8 buah dan indeks sikliknya : x_1x_3
4. Bentuk [0,0,0,6] ada 6 buah dan indeks sikliknya : x_4

Seperti pada gambar 2, indeks siklik x_4 pada group S_4 akan membangkitkan indeks siklik x_2x_4 pada group R_4. Maka indeks siklik $x_1^2x^2$ pada S_4 akan membangkitkan indeks siklik x_1 x_2^2. Contoh kongkretnya pada permutasi α = (1)(24)(3) pada S_4, perubahannya adalah sebagai berikut :

$$\hat{a} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix} \quad \text{akan membangkitkan}$$

$$\hat{a}' = \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 14 & 13 & 12 & 43 & 42 & 32 \end{matrix}$$

Atau α' = (12 14)(23 24)(24)(13) yang bertipe $x_1^2x_2^2$. Keseluruhan perubahan indeks siklik dari group S_4 menjadi indeks siklik R_4, adalah sebagai berikut : $x_1^4 \rightarrow x_1^6$; $x_1^2\, x_2^2 \rightarrow x_1^2\, x_2^2$; $x_1x_3 \rightarrow x_3^2$;
$x_2^2 \rightarrow x_1^2\, x_2^2$; $x_4 \rightarrow x_2x_4$,
sedangkan banyaknya tiap jenis tidak mengalami perubahan. Dari Definisi 2.8 maka didapat :

$$Z(R_4; x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{24}[x_1^6+6x_1^2x_2^2+8x_3^2+3x_1^2x_2^2+6x_2x_4]^*$$

Aplikasi Teorema Polya I :

Ada 2 keadaan untuk himpunan Y, yaitu adanya garis pada pasangan titik dan tidak adanya garis pada pasangan titik, sehingga r = 2. Dari persamaan (*) ambillah $x_1=x_2=x_3=x_4=r=2$, maka didapat:

$$Z(R_4;2,2,2,2)=\frac{1}{24}[2^6+6.2^2.2^2+8.2^2+3.2^2.2^2+6.2.2]=11$$

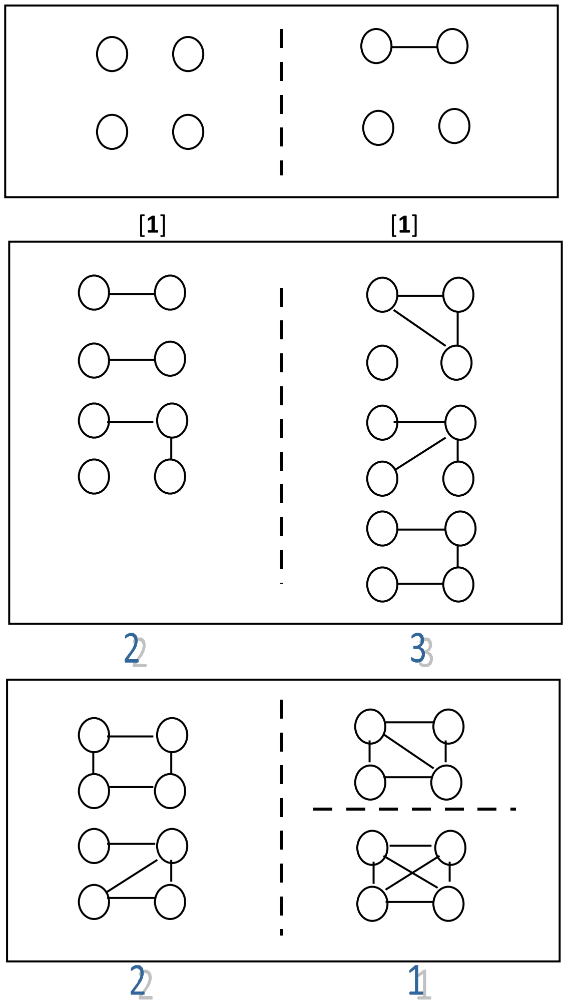
atau untuk graf yang memuat 4 titik, maka akan terdapat 11 graf yang tidak isomorfis.

Aplikasi Teorema Polya II :

Ambil dua bobot pada himpunan Y, yaitu $w(y_1)$ = tak ada garis = T dan $w(y2)$ = ada garis = A. Kemudian subsitusikan $x_1 = T + A$, $x_2 = T^2 + A^2$, $x^3 = T^3 + A^3$ dan $x^4 = T^4 + A^4$ pada persamaan (*), sehingga didapat :

$$Z(R_{4;}\, x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{24}\,[T+A]^6 + 9(T+A)^2(T^2+A^2)^2 + 8(T^3+A^3)^2 + 6(T^2+A^2)(T^{4+}A^4)] \text{ atau}$$

$Z(R_4;x_1,x_2,x_3,x_4)=1T^6+1T^5A+2T^4A^2+3T^3A^3+2T^2A^4+1TA^5+1A^6$. Dengan kata lain untuk graf yang terdiri dari 4 titik aka nada sebanyak 1 graf yang tanda garis, aka nada sebanyak 1 graf dengan 1 garis, akan ada sebanyak 2 graf dengan 2 garis, akan ada sebanyak 3 graf dengan 3 garis, aka nada sebanyak 2 graf dengan 4 garis, aka nada sebanyak 1 graf dengan 5 garis, dan akan ada sebanyak 1 graf dengan 6 garis.



4. KESIMPULAN

Beberapa kesimpulan yang didapat dari tulisan ini :

1. Dalam tulisan ini kita telah menyajikan teknik untuk menghitung banyak (jumlah) graf sederhana yang tidak isomorfis dengan menggunakan Teorema Polya yang dimulai dengan membangkitkan group permutasi titik terlebih dahulu.
2. Penggunaan Teorema Polya I berhubungan dengan banyaknya graf sederhana yang terdiri dari n titik dan tidak isomorfis antara satu graf dengan yang lainnya.
3. Penggunaan Teorema Polya II berhubungan dengan banyaknya graf sederhana yang memuat n titik dan k garis serta tidak isomorfis antara satu graf dengan yang lainnya.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Balakrishnan V.K., "*Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics*", McGraw Hill Inc. , 1995

[2] Deo N., "*Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*", Prentice Hall of India Private Limited, 1987.

[3] Deo N., Nievergelt J. & Reingold E.M., "*Combinatorial Algorithms*" : Theory and Practice, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, 1977.

[4] Herstein I.N., "*Abstract Algebra*", Macmillan Publishing Company, 1986

[5] Wilson R.J & Watkins J.J., "*Graphs An Introductory Approach*", John Wiley & Sons Inc, 1990.