

# Berbagai Solusi Pemecahan Masalah Tower of Hanoi dan Representasi Grafnya

Garibaldy W Mukti  
13506004

Teknik Informatika ITB, Bandung 40132, email: if16004@students.if.itb.ac.id

## Abstrak

Tower of Hanoi. Salah satu puzzle yang unik karena memiliki berbagai macam variasi yang membutuhkan penyelesaian yang berbeda untuk tiap variasinya.

Tower of Hanoi ini memiliki asal muasal yang unik karena berasal dari sebuah legenda di India. Puzzle ini cukup dikenal oleh para mahasiswa Ilmu Komputer karena sering muncul pada pengenalan struktur data dan algoritma.

Tower of Hanoi ini dapat dicari solusinya dengan menggunakan berbagai cara, mulai dari Gray Code, Binary Carry Sequence, representasi graf, dan Induksi Matematik. Tower of Hanoi ini juga isomorfik untuk mendapatkan Jalur Hamilton yang akan diterangkan dalam bentuk graf kemudian.

Makalah ini secara umum akan membahas mengenai solusi dan cara mendapatkan solusi tersebut melalui berbagai macam cara. Selain itu juga ditambahkan dengan beberapa implementasinya pada berbagai hal di dunia ini.

**Kata Kunci:** *Gray Code, Tower of London, Puzzle Reve, biner, isomorfik*

## 1. PENDAHULUAN

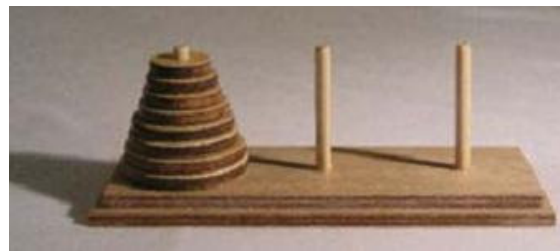
Gray Code merupakan salah satu representasi bilangan yang perbedaannya di antara tiap urutan bilangannya hanya satu. Dalam penerapannya Gray Code dapat dipakai untuk berbagai keperluan di dunia nyata, seperti meminimalisasi efek error dalam konversi sinyal analog ke sinyal digital. Selain itu Gray Code juga dapat digunakan untuk keperluan lainnya seperti Algoritma Genetik, penggunaan alamat memori dalam komputer, dan mendapatkan solusi Tower of Hanoi.

## 2. TOWER OF HANOI

### 2.1. Sejarah Singkat

Tower of Hanoi merupakan sebuah teka-teki yang ditemukan oleh seorang matematikawan Perancis, Edouard Lucas pada tahun 1883. Legenda mengenai Tower of Hanoi ini berasal dari sebuah kuil India,

dimana terdapat sebuah ruangan besar dengan tiga buah tonggak raksasa dengan 64 buah piringan besar yang berbeda satu sama lainnya. Ke 64 buah piringan tersebut tersusun sehingga bentuknya menyerupai sebuah piramid.



Gambar 1: Model Tower of Hanoi (8 piringan)

Dikatakan bahwa seorang pendeta Brahma, yang meyakini sebuah ramalan kuno, telah berusaha memindahkan piringan-piringan tersebut, sesuai dengan aturan pemindahannya. Menurut legenda, pada saat piringan terakhir selesai dipindahkan, dunia akan berakhir.

Apabila legenda ini benar, dan sang pendeta dapat memindahkan piringan tersebut dengan kecepatan 1 piringan per detik, dengan menggunakan jumlah perpindahan terkecil, paling sedikit membutuhkan waktu  $2^64 - 1$  detik atau kurang lebih setara dengan 584.542 juta tahun.

Alam semesta ini kurang lebih telah berumur 13.7 juta tahun. Jadi mungkin saja legenda tersebut benar.

### 2.2. Aturan Puzzle

Aturan Tower of Hanoi ini adalah bagaimana cara memindahkan semua piringan dari satu tonggak ke tonggak lain. Dalam setiap pemindahan hanya dapat memindahkan 1 piringan saja dan tidak boleh menempatkan piringan yang lebih besar di atas piringan yang lebih kecil.

### 2.3. Implementasi Tower of Hanoi

Tower of Hanoi sering digunakan dalam riset psikologi dalam pemecahan masalah. Terdapat pula variasi dari Tower of Hanoi, yaitu Tower of London untuk diagnose neuropsikologi dan pengerjaan fugsi

eksklusif.

Tower of Hanoi juga sering dipakai dalam skema *Backup Rotation* ketika membuat penggandaan data komputer dimana banyak *tape/* media penyimpanan termasuk didalamnya.

Tower of Hanoi dapat dipakai untuk melatih kreativitas anak-anak dalam masa pertumbuhan. Selain itu, Tower of Hanoi juga sering diimplementasikan dalam proses pengajaran algoritma rekursif dasar. Tower of Hanoi juga digunakan untuk tes memory oleh para neuropsikolog untuk mengevaluasi amnesia.

## 2.4. Pemecahan Tower of Hanoi

### 2.4.1 Solusi Rekursif

Dalam dunia matematik, mencari solusi dari sebuah permasalahan lebih mudah dengan cara menyelesaikan masalah yang lebih umum.

Bila didefinisikan  $a$  ( $a$  = asal),  $t$  ( $t$  = tujuan),  $s$  ( $s$  = sementara), dan  $h$  adalah jumlah piringan, dibawah ini merupakan prosedur singkat mengenai cara pemindahan sebuah piringan dari  $a$  ke  $t$  dengan  $s$  untuk membantu.

Langkah 1 :

Bila  $h > 1$ , gunakan prosedur ini untuk memindahkan  $h - 1$  piringan dari  $a$  ke  $s$ .

Langkah 2 :

Sekarang piringan yang lebih besar. Piringan ke  $h - 1$  dipindahkan dari  $a$  ke  $t$ .

Langkah 3 :

Bila  $h > 1$ , gunakan prosedur ini untuk memindahkan  $h - 1$  piringan dari  $s$  ke  $t$ .

Asumsikan terdapat sebuah fungsi untuk mencari solusi Tower of Hanoi dengan 4 argumen, yaitu jumlah piringan ( $n$ ) dan 3 tonggak ( $a$ ,  $t$ , dan  $r$ ). Fungsi algoritmiknya sebagai berikut

```
Solve (n, a, r, t)
  if (n = 0)
    exit
  else
    Solve (n - 1, a, t, r)
    Move from a to t
    Solve (n - 1, r, a, t)
```

Fungsi diatas merupakan fungsi sederhana *Solve*. Fungsi merupakan fungsi rekursif karena memanggil dirinya sendiri dengan nilai  $n$  yang terus berkurang hingga nilai  $n$  mencapai 0. Secara implisit, penulisan fungsi diatas untuk  $n = 3$

1. Move from a to t

2. Move from a to r
3. Move from t to r
4. Move from a to t
5. Move from r to a
6. Move from r to t
7. Move from a to t

Dalam hal ini perintah "Move" merupakan instruksi untuk memindahkan piringan teratas suatu tonggak ke tonggak yang dituju. Untuk  $n = 4$  kita dapatkan

1. Move from a to r
2. Move from a to t
3. Move from r to r
4. Move from a to r
5. Move from t to a
6. Move from t to r
7. Move from a to r
8. Move from a to t
9. Move from r to t
10. Move from r to a
11. Move from t to a
12. Move from r to t
13. Move from a to r
14. Move from a to t
15. Move from r to t

Selanjutnya dalam induksi matematik.

Asumsikan  $n$  adalah jumlah total piringan. Pertama-tama, lihat sekuens  $S_i = \{a_k\}$ , jumlah piringan ( $i = 1 \sim n$ ) yang harus dipindahkan dalam langkah ke- $k$  direpresentasikan dalam sebuah prosedur rekursif sederhana yang dimulai dari list  $S_1 = \{1\}$  untuk tiap piringan, dan secara rekursif menjadi

$$S_n = \{S_{n-1}, n, S_{n-1}\} \quad (1)$$

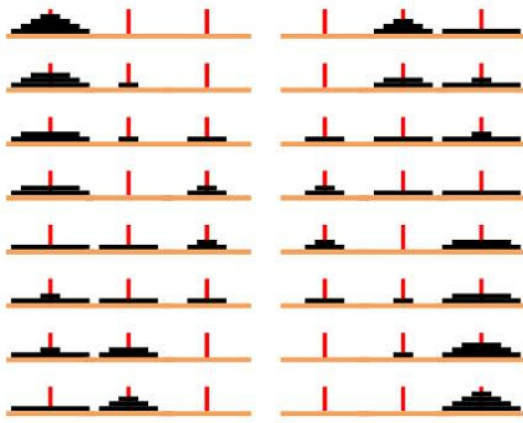
Untuk beberapa nilai awal dari  $n$  akan diperlihatkan pada tabel dibawah ini.

$n$	Urutan perpindahan piringan
1	1
2	1,2,1
3	1,2,1,3,1,2,1
4	1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1

Tabel 1: Urutan Perpindahan Tower of Hanoi

Dari tabel diatas dapat terlihat bahwa proses rekurens terjadi setiap penambahan jumlah piringan. Urutan perpindahan piringan akan terus berulang dengan basis  $n = 1$ .

Untuk ilustrasi perpindahan piringan  $n = 4$  dapat dilihat dibawah ini.



Gambar 2 : Ilustrasi Tower of Hanoi untuk  $n = 4$

Setiap penambahan nilai  $n$ , sebuah penambahan sekuens terjadi. Uniknya, ini merupakan sekuens carry biner ditambah dengan 1. Dan hebatnya, jumlah piringan yang telah dipindahkan setelah perpindahan ke- $k$  sama dengan jumlah elemen yang perlu ditambah atau dikurangi pada addend  $k$  dalam fungsi Ryser.

Sebagai hasil dari prosedur diatas, jumlah perpindahan  $h_n$  yang dibutuhkan untuk menyelesaikan  $n$  buah piringan dengan 3 tonggak didapatkan dari relasi rekurens

$$h_n = 2 h_{n-1} + 1 \quad (2)$$

Kita dapat mendefinisikan jumlah  $h_n$  dengan

$$\begin{aligned} h_0 &= 0 \\ h_n &= 2 h_{n-1} + 1 \quad \text{untuk } n > 0 \end{aligned}$$

Kemudian kita dapatkan  $h_1 = 2 h_0 + 1 = 1$ ,  $h_2 = 2 h_1 + 1 = 3$ ,  $h_3 = 2 h_2 + 1 = 7$ , dan seterusnya.

Fungsi diatas merupakan fungsi rekursif. Bila kita asumsikan  $T_n = h_n + 1$ , maka akan didapatkan  $T_0 = 1$  dan  $T_n = h_n + 1 = (2 h_{n-1} + 1) + 1 = 2 h_{n-1} + 2 = 2 T_{n-1}$ . Sehingga  $T_n$  dapat didefinisikan

$$T_n = 0 \quad (3)$$

$$T_n = 2 T_{n-1} \quad \text{untuk } n > 0 \quad (4)$$

Dari persamaan diatas, didapatkan

$$T_n = 2^n - 1 \quad \text{untuk } n \geq 0 \quad (5)$$

#### 2.4.2 Solusi Biner

Posisi piringan dapat ditentukan langsung dari jumlah pergerakan dengan representasi biner (bilangan basis 2). Pergerakan awal adalah #0, dengan semua digit 0, dan pergerakan akhir  $\#2^n - 1$ , dengan semua digit 1, dengan aturan

1. Terdapat sebuah digit biner (bit) untuk tiap

piringan.

2. Bit paling kiri merepresentasikan piringan terbesar. Nilai 0 mengindikasikan bahwa piringan terbesar terdapat pada tonggak awal, dan 1 mengindikasikan bahwa piringan terbesar terdapat pada tonggak tujuan.
3. Pembacaan bit dibaca dari kiri ke kanan, dan tiap bit dapat digunakan untuk menentukan lokasi dari piringan yang bersangkutan.
4. Bit yang sama dengan bit sebelumnya menunjukkan bahwa piringan yang ukurannya berurutan berada tepat diatas piringan sebelumnya.
5. Bit yang berbeda dengan bit sebelumnya berarti piringan yang ukurannya berurutan berada pada tonggak sebelah kiri atau kanannya. Penentuan kiri atau kanan didapat dari aturan
  - a. asumsikan tonggak awal berada di sebelah kiri dan tonggak tujuan di sebelah kanan.
  - b. asumsikan pula di sebelah tonggak kiri adalah tonggak kanan, begitu pula sebaliknya.
  - c.  $n$  adalah jumlah piringan yang ada pada tonggak yang sama dengan piringan yang lebih besar, dan tambahkan 1 bila piringan terbesar berada pada tonggak kiri. Bila  $n$  genap, piringan berada pada 1 tonggak lebih kiri, dan bila  $n$  ganjil, piringan berada pada 1 tonggak lebih kanan.

#### 2.4.3 Solusi Gray Code

Sistem bilangan bine Gray Code memberikan alternatif lain untuk menyelesaikan Tower of Hanoi. Dalam sistem Gray Code sebuah bilangan diekspresikan dalam kombinasi biner 0 dan 1. Namun, berbeda dengan standar posisi numerik, Gray Code mengoperasikan bahwa setiap nilai dari predesornya hanya berbeda 1 bit. Jumlah bit yang ada dalam Gray Code sangat penting, dan awalan 0 bukan optional, tidak seperti sistem posisi biasa.

Jika setiap bit dalam Gray Code sama dengan jumlah piringan dalam Tower of Hanoi, dimulai dari 0, dan terus bertambah, maka setiap perubahan bit berkorespondensi dengan tiap piringan yang bergerak, dimana *least-significant-bit* merupakan piringan terkecil dan *most-significant-bit* adalah piringan terbesar.

Penambahan dimulai dari 1 dan identitas piringan yang dimulai dari 0, dengan urutan penambahan satu-satu, ordinal piringan yang akan digerakkan pada pergerakan ke- $m$  adalah  $x (x = m \bmod 2)$ .

Teknik ini menghasilkan identitas piringan mana yang harus dipindahkan, namun tidak merepresentasikan harus kemana piringan tersebut dipindahkan. Untuk piringan terkecil, hanya terdapat 2 kemungkinan, dimana untuk piringan yang lebih besar hanya terdapat satu kemungkinan, kecuali pada saat semua piringan terdapat dalam tonggak yang sama, tapi pada kondisi tersebut hanya ada 2 kemungkinan, yaitu apakah piringan terkecil harus dipindahkan atau puzzlenya telah selesai.

Untungnya ada aturan yang menentukan kemana harus kita pindahkan piringan yang paling kecil. Misalnya kita gunakan asumsi pada 2.4.1, dimana didefinisikan  $a$  ( $a$  = asal),  $t$  ( $t$  = tujuan), dan  $s$  ( $s$  = sementara), dan  $h$  adalah jumlah piringan. Jika  $h$  ganjil, siklus perpindahan piringan terkecil adalah  $a,t,s,a,t,s,a,t,s$ , dst, dan piringan selanjutnya diselang  $a,s,t,a,s,t,a,s,t$ , dst tiap satu piringan. Dan jika  $h$  genap, siklus perpindahan piringan terkecil adalah  $a,s,t,a,s,t,a,s,t$ , dst, dan piringan selanjutnya diselang  $a,t,s,a,t,s,a,t,s$ , dst tiap satu piringan.

Tabel perpindahan secara Gray Code sedemikian rupa (untuk  $h = 4$ )

No Piringan	Urutan perpindahan
1	$a,s,t,a,s,t,a,s,t$
2	$a,t,s,a,t,s,a,t$
3	$a,s,t$
4	$a,t$

Tabel 2: Urutan Perpindahan (Gray Code)

$n = 4$	Urutan piringan
-----	1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1

Tabel 3: Urutan Piringan (Gray Code)

#### 2.4.4 Solusi Binary Carry Sequence

Sekuens  $\alpha\{n\}$  didapatkan dari perpangkatan dari nilai tertinggi dari 2 dibagi dengan  $n$ . Sebagai contoh, jumlah 0 yang mengikuti pada representasi biner dari  $n$ , untuk  $n = 1, 2, \dots$ , beberapa bilangan pertamanya adalah 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, ... dst. [2]

Hal ini berkorespondensi tepat beda 1 dengan nomor piringan yang harus digerakkan dalam solusi optimal langkah ke- $k$  dalam Tower of Hanoi, yaitu 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, ... dst.

#### 2.4.5 Solusi Panjang

Ada sebuah modifikasi dari Tower of Hanoi, yaitu pengambilan solusi terpanjang tanpa mengulangi langkah yang sama lebih dari 1 kali. Untuk algoritmanya kita dapat menuliskan

```

Long-Solution (n, a, t, s)
{
    n = jumlah piringan
    a = tonggak asal
    t = tonggak tujuan
    s = tonggak sementara
    Move (n, a, b, c)
    {
        Memindahkan piringan ke n dari
        a ke b tanpa lewat c
    }
}
if (n > -1)
    h = h - 1
    Long-Solution (n, a, t, s)
    Move (n, a, r, t)
    Long-Solution (n, t, a, s)
    Move (n, s, t, a)
    Long-Solution (n, a, t, s)

```

Hasil dari solusi panjang ini adalah  $3^8 - 1$ . Dan bila keseluruhan  $3^8$  buah distribusi di traversalkan, ini disebut Jalur Hamilton. Identitas piringan yang harus dipindahkan ditentukan dari modulo antara nomor perpindahan dengan 3. Selain itu kemana piringan tersebut harus dipindahkan juga dapat ditentukan dengan mudah. Untuk setiap 3 kali perpindahan, pindahkan piringan terkecil 2 kali searah dengan piringan sebelumnya, diikuti dengan 1 piringan yang ukurannya lebih besar (hanya terdapat 1 kemungkinan). Diantara ketiga perpindahan tersebut, balikan arah untuk piringan terkecil. Pergerakan pertama dari piringan terkecil adalah dari tonggak asal ke tonggak tujuan. Pernyataan ini bila dibuat dalam bentuk algoritma sebagai berikut

```

Jalur-Hamilton (n, a, b, c)
{
    Tujuannya adalah memindahkan
    piringan dari tonggak a ke
    tonggak b lalu tonggak c kemudian
    kembali lagi ke tonggak a
    Dalam jalur hamilton, langkah
    yang diambil adalah langkah
    terpanjang tanpa perulangan
    distribusi
    Move (n, a, b, c)
    {
        Memindahkan piringan ke n dari
        a ke b tanpa lewat c
    }
}
if (n > -1)
    h = h - 1
    Hamilton-Start (n, a, c, b)
    Move (n, a, b, c)
    Move (n, c, a, b)
    Move (n, b, c, a)
    Move (n, a, b, c)
    Move (n, c, a, b)
    Hamilton-Finish (n, b, a, c)

```

```

Hamilton-Start (n, a, b, c)
  if (n > -1)
    h = h - 1
    Hamilton-Start (n, a, c, b)
    Move (n, a, b, c)
    Move (n, c, b, a)

Hamilton-Finish (n, a, b, c)
  if (n > -1)
    h = h - 1
    Move (n, a, c, b)
    Move (n, a, b, c)
    Hamilton-Finish (n, c, b, a)

```

#### 2.4.6 Solusi untuk 4 Tonggak Keatas

Walaupun versi 3 tonggak Tower of Hanoi memiliki solusi rekursif yang sederhana, solusi optimal dari untuk versi 4 tonggak atau lebih untuk Tower of Hanoi belum bisa dipastikan. Hal ini merupakan contoh yang bagus bahwa sebuah permasalahan yang sederhana dan mudah untuk diselesaikan dapat berubah drastis menjadi kompleks dan sangat sulit diselesaikan hanya dengan mengubah sedikit pembatasnya.

Fakta bahwa solusi Tower of Hanoi untuk 4 tonggak atau lebih masih belum pasti tidak menyimpulkan bahwa tidak ada solusi algoritmik untuk menemukan solusi optimal.

Masalah Tower of Hanoi untuk 4 tonggak sering disebut sebagai Puzzle Reve. Penyelesaian untuk puzzle ini, yang belum bisa dipastikan sebagai solusi yang optimal, dipaparkan sebagai berikut.

Misalkan  $n$  adalah jumlah piringan yang ada dan  $r$  adalah jumlah tonggak yang disediakan. Caranya adalah membuat fungsi  $T(n,r)$  sebagai jumlah perpindahan yang harus dilakukan untuk memindahkan  $n$  buah piringan menggunakan  $r$  buah tonggak.

Algoritma diatas dapat dijelaskan secara rekursif :

Langkah 1:  
Untuk sebuah nilai  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , pindahkan  $k$  buah piringan teratas ke sebuah tonggak, dengan menggunakan  $T(k,r)$  buah perpindahan.

Langkah 2 :  
Tanpa mengubah apapun pada tonggak yang telah berisi  $k$  buah piringan teratas tadi, pindahkan sisa  $n - k$  piringan ke tonggak tujuan, hanya dengan menggunakan  $r - 1$  tonggak, dengan menggunakan  $T(n - k, r - 1)$  perpindahan.

Langkah 3 :  
Terakhir, pindahkan  $k$  buah piringan ke tonggak tujuan dengan menggunakan  $T(k, r)$

perpindahan.

Seluruh proses tersebut akan menggunakan perpindahan sejumlah  $2T(k, r) + T(n - k, r - 1)$ . Maka, nilai  $k$  harus ditentukan sehingga nilainya minimum.

Solusi tersingkat untuk menyelesaikan Tower of Hanoi yang memiliki 4 tonggak dimana jumlah piringannya,  $n = 1, 2, \dots$  adalah 1, 3, 5, 9, 13, 17, 25, 33, ... Hal ini didapat dari

$$S_n = S_{n-1} + 2^x \quad (6)$$

dimana  $S_1 = 1$  dan  $x$  adalah integer positif untuk

$$n - 1 = 1 / 2 ( x ( x + 1 ) ) \quad (7)$$

Hal ini akan menjadikan sebuah fungsi

$$S_n = 1 + [n - (1 / 2 ( x ( x - 1 ) ) ) - 1] 2^x \quad (8)$$

Untuk sementara hasil fungsi diatas diyakini sebagai solusi optimal dari Tower of Hanoi dengan 4 tonggak.

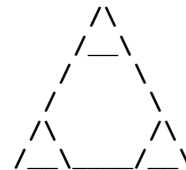
#### 2.4.7 Representasi Graf Tower of Hanoi

Tower of Hanoi ini dapat di representasikan dalam bentuk graf tak berarah. Tiap node merepresentasikan distribusi piringan dan tiap sisi merepresentasikan perpindahan. Untuk graf-graf yang akan dijelaskan dibawah ini hanya menjelaskan Tower of Hanoi dengan 3 tonggak.



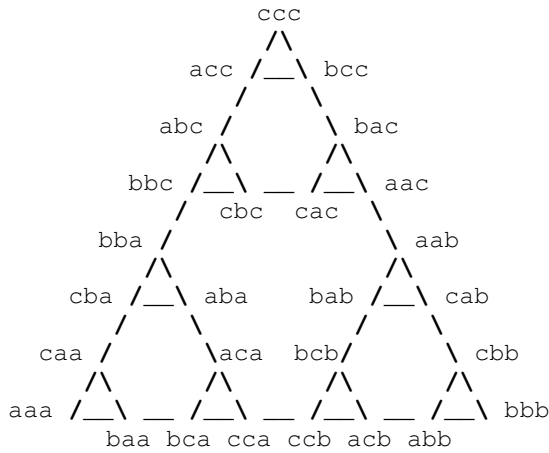
Gambar 3 : Graf Tower of Hanoi dengan  $n = 1$

Untuk  $n + 1$  jumlah piringan, ambil graf  $n$  piringan, kemudian ganti tiap graf terkecilnya dengan



Gambar 4 : Graf Tower of Hanoi dengan  $n = 2$

Penjelasan graf untuk Tower of Hanoi dengan  $n = 3$  dapat dilihat dibawah ini

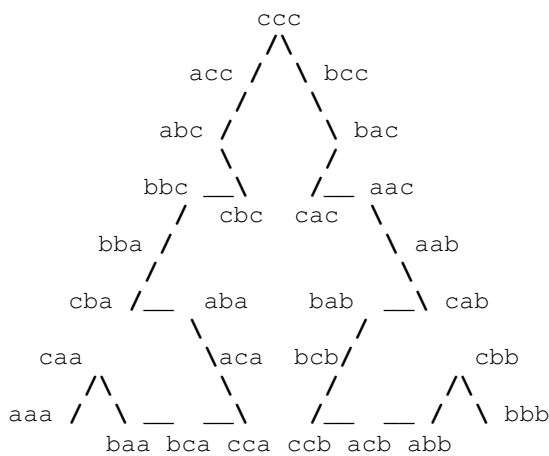


ket : a, b, c merepresentasikan nama tiap tonggak

Gambar 4 : Graf Tower of Hanoi dengan  $n = 3$

Setiap sisi terluar dari graf segitiga diatas menunjukkan jalan tersingkat atau cara tercepat untuk mendapatkan solusi Tower of Hanoi. Cabang yang ada diantara sisi setigaga yang lebih kecil merepresentasikan pergerakan piringan terbesar. Tiap sisi dari segitiga terkecil merepresentasikan pergerakan piringan terkecil.

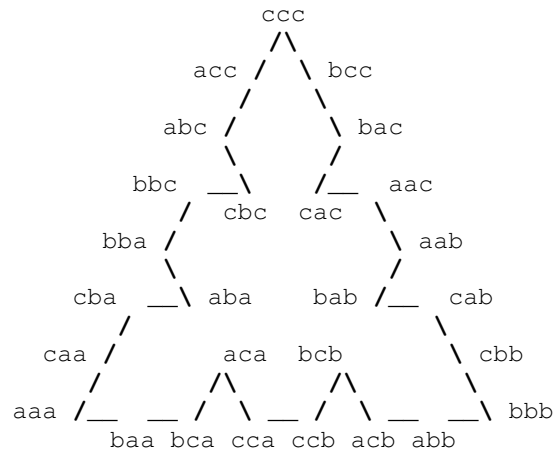
Jalan terpanjang tanpa perulangan dapat diraih dengan menghilangkan cabang yang tidak terpakai



ket : a, b, c merepresentasikan nama tiap tonggak

Gambar 5 : Graf Tower of Hanoi dengan jalur terpanjang

Siklus sirkuler Jalur Hamilton



ket : a, b, c merepresentasikan nama tiap tonggak

Gambar 5 : Graf Sirkuler Jalur Hamilton dari Tower of Hanoi

### 3. KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya, kita dapatkan bahwa untuk mendapatkan solusi dari Tower of Hanoi kita dapat menerapkan berbagai macam teori. Teori-teori tersebut menghasilkan solusi yang sama, sehingga terbukti bahwa solusi optimal untuk Tower of Hanoi sudah ada.

Ada pula bentuk solusi panjang maupun sirkuler. Solusi panjang ini membentuk jalur terpanjang tanpa ada distribusi yang sama. Untuk sirkuler berarti membentuk jalur yang melingkar, semua piringan berpindah dari satu tonggak ke tonggak lain hingga tumpukan piringan kembali lagi ke tonggak yang sama tanpa ada distribusi yang diulang.

Namun lain halnya dengan versi lain Tower of Hanoi. Misalnya Puzzle Reve. Puzzle ini mirip seperti Tower of Hanoi namun memiliki jumlah tonggak yang berbeda. Solusi optimal dari Puzzle Reve ini belum dapat dipastikan sebagai solusi yang optimal karena belum ada pembuktian menggunakan teori lain.

Kembali pada versi umum Tower of Hanoi, puzzle ini dapat diaplikasikan dalam berbagai hal yang bermanfaat seperti penyimpanan *Backup Data* pada komputer maupun analisis psikologi.

Ada beberapa hal yang dapat kita ambil dari representasi graf Tower of Hanoi.

1. Dari tiap distribusi piringan, terdapat tepat 1 jalur terpendek untuk memindahkan tumpukan piringan dari satu tonggak ke tonggak lain.
2. Diantara pasangan distribusi, terdapat 1

- atau 2 perbedaan jalur terpendek.
3. Dalam tiap distribusi piringan, terdapat satu atau dua jalur terpanjang tanpa perpotongan jalur untuk memindahkan semua piringan dari satu tonggak ke tonggak lain.
  4. Diantara tiap pasangan distribusi piringan, terdapat satu atau dua jalur terpanjang tanpa perpotongan.
  5. Apabila  $N_h$  adalah jumlah jalur tanpa perpotongan untuk perpindahan piringan, maka
    - a.  $N_1 = 2$
    - b.  $N_{h+1} = (N_h)^2 + (N_h)^3$
    - c. Sebagai contoh  $N_8 \approx 1.5456 \times 10^{795}$

#### DAFTAR REFERENSI

- [1][http://ocawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbo oks/miller2\\_awl/chapter4/essay1/deluxe-content.html#tower](http://ocawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbo oks/miller2_awl/chapter4/essay1/deluxe-content.html#tower) (27 Desember 2007 : 11.30 pm)
- [2][http://en.wikipedia.org/wiki/Gray\\_code](http://en.wikipedia.org/wiki/Gray_code) (27 Desember 2007 : 11.30 pm)
- [3]<http://mathworld.wolfram.com/BinaryCarrySequence.html> (28 Desember 2007 : 10.30 pm)
- [4]<http://www.cut-the-not.org/recurrence/hanoi.shtml> (28 Desember 2007 : 10.30 pm)
- [5]<http://mathworld.wolfram.com/TowerofHanoi.html> (28 Desember 2007 : 10.30 pm)
- [6][http://en.wikipedia.org/wiki/Tower\\_of\\_Hanoi](http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi) (28 Desember 2007 : 10.30 pm)
- [7]<http://mathworld.wolfram.com/GrayCode.html> (28 Desember 2007 : 10.30 pm)