Aplikasi Teori Graf Pada *Knight's Tour*

Fahmi Mumtaz [1)]
1) Jurusan Teknik Informatika ITB, Bandung, NIM : 13506045 email: if16045@students.if..itb.ac.id

Abstract *– Makalah ini membahas tentang aplikasi dari teori graf pada permainan catur. Permasalahan menarik yang dibahas disini adalah membuat siklus hamilton dengan menggunakan kuda pada permainan catur (*Knight's Tour*). Suatu* Knight's Tour *pada papan catur adalah rangkaian perjalanan kuda catur pada papan catur sehingga seluruh kotak terlewati oleh kuda catur tepat satu kali.*

Kata Kunci *:teori graf, siklus hamilton,* knight's tour, *papan catur.*

1. PENDAHULUAN

Konsep graf Eulerian yang diawali oleh karya Euler pada problem Jembatan Konigsberg (1735) merupakan awal dari lahirnya teori graf. Meskipun umurnya yang relatif muda, teori graf sebagai cabang dari matematika diskrit telah berkembang sangat pesat akhir-akhir ini, baik dalam pengembangan teori maupun aplikasi di berbagai bidang. Tidak hanya ilmuan dari luar negeri yang tertarik dalam mempelajarinya. Ilmuan dari Indonesia juga memiliki kontribusi dalam perkembangan teori tersebut. Adalah seorang Guru Besar ITB, Prof. Edy Tri Baskoro, yang memiliki kontribusi dalam pengembangan teori graf ini. Di sadari atau tidak, banyak aplikasi teori graf dalam kehidupan kita. Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan bantuan graf, bahkan dalam permainan catur pun ternyata ada aplikasi teori graf.

Secara informal, suatu graf adalah himpunan benda-benda yang disebut verteks (atau *node*) yang terhubung oleh sisi (atau *edge* atau *arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (melambangkan verteks) yang dihubungkan oleh garis-garis (melambangkan sisi).

Secara formal atau dalam bahasa matematika :

Graf $G = (V,E)$, yang dalam hal ini :

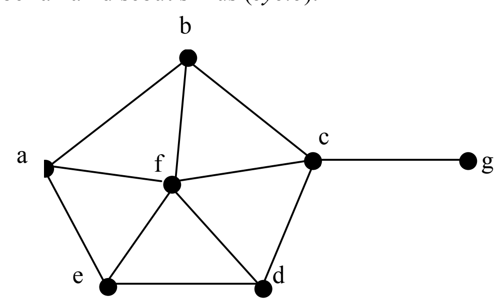
V = himpunan tidak-kosong dan berhingga dari simpul-simpul (*vertices*)
= $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul
= $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Order dari graf G, ditulis dengan notasi |V(G)|, menyatakan banyakya titik (simpul) pada graf G.

Pada graf G, *jalan J* dari titik v_0 ke titik v_n adalah suatu barisan selang-seling dari titik dan sisi $v_0, e_0, v_0, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ yang dimulai dan diakhiri dengan titik, dengan sisi $e_1 = v_iv_{i+1}$ untuk $i = 0,1,2, \ldots, n$ sedemikian sehingga $v_iv_{i+1} \in E(G)$. *Panjang* dari jalan $v_0, e_0, v_0, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah banyaknya sisi pada barisan tersebut. Titik v_0 dan v_n disebut titik-titik ujung dari jalan tersebut. Jika pada jalan J berlaku $v_0 = v_n$ maka J disebut *jalan tertutup* dan dikatakan *jalan terbuka* jika $v_0 \neq v_n$.

Jalan J disebut *lintasan* (*path*) bila semua titiknya berbeda. Sedangkan jika setiap sisinya yang berbeda maka jalan tersebut dinamakan *jejak* (*trail*). Jejak tertutup disebut *sirkit*. Sirkit yang semua titiknya berlainan disebut siklus (*cycle*).



Gambar 1

Pada gambar 1 di atas, afbfcdc merupaka jalan (*walk*), abfcgcfea merupakan jalan tertutup (*close walk*), afcdfb merupakan jejak (*trail*), aefcg merupakan lintasan (*path*), afedcfba merupakan sirkit, dan afbcdea merupakan siklus (*cycle*).

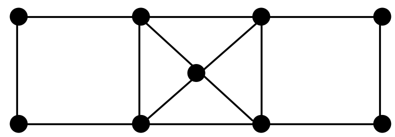
Pembahasan dalam makalah ini difokuskan pada aplikasi teori graf pada permainan catur. Permasalahan yang diangkat pun dikhususkan pada siklus hamiltonian dan langkah kuda (*Knight's Tour*)pada permainan catur.

2. SIKLUS HAMILTON

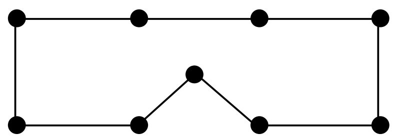
Dalam teori graf, siklus yang menggunakan semua titik dan kembali ke titik semula dikenal dengan siklus Hamilton (*Hamilton Cycle*). Sedangkan jika semua titik dilewati tepat satu kali tetapi tidak kembali ke titik semula disebut Lintasan Hamilton (*Hamilton Path*). Graf yang memiliki lintasan atau siklus

Hamilton disebut Graf Hamilton sebagaimana disampaikan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1856.

Pada Gambar 2 diberikan graf G dengan sembilan titik dan 14 sisi. Kita dapat membuat siklus Hamilton yang dimulai dan diakhiri pada salah satu titik dari graf G tersebut.



Gambar 2



Gambar 3 : Salah satu Siklus Hamilton pada Graf G (9,14)

Pada gambar 3 kita lihat semua titik dilewati tepat satu kali dan kembali ke titik semula.

2.1. Knight's Tour

Siklus Hamilton dapat ditemukan di banyak hal. Pada permainan catur pun ada. Permasalahan menarik yang terkait dengan Siklus Hamilton adalah langkah kuda (*Knight's Tour*). Suatu *Knight's Tour* pada papan catur adalah rangkaian perjalanan kuda catur pada papan catur sehingga seluruh kotak terlewati kuda tepat satu kali. Aturan langkah kuda pada permainan catur adalah sebagai berikut :

- Melangkah dua persegi ke arah horisontal kemudian satu persegi ke arah vertikal, atau
- Melangkah dua persegi ke arah vertikal kemudian satu persegi ke arah horisontal, atau
- Melangkah satu persegi ke arah horisontal kemudian dua persegi ke arah vertikal, atau
- Melangkah satu persegi ke arah vertikal kemudian dua persegi ke arah horisontal.

Jika dalam *Knight's Tour* setiap persegi dari papan catur dapat dilewati tepat satu kali dan kuda kembali pada persegi semula maka disebut langkah kuda tertutup (*Closed Knight's Tour*). Namun, jika semua persegi telah dilewati dan kuda tidak dapat kembali ke posisi semula maka disebut langkah kuda yang terbuka (*Open Knight's Tour*)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN.

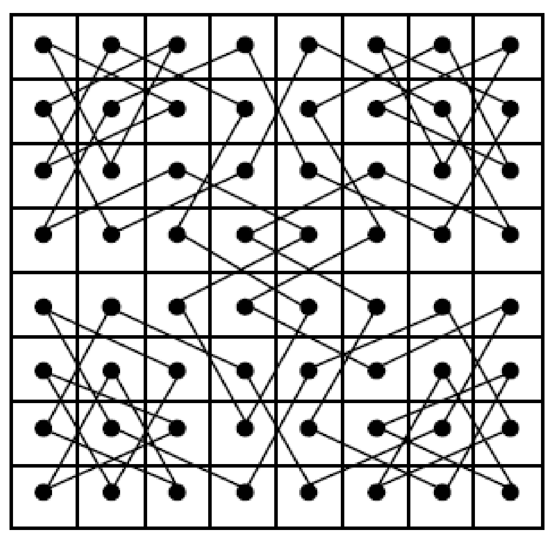
Jika persegi dalam papan catur dianggap sebagai titik dalam graf, dimana setiap dua titik akan dihubungkan oleh suatu sisi dengan syarat membentuk langkah kuda, maka menentukan *Closed Knight's Tour* sama halnya dengan menentukan siklus Hamilton (*Hamilton cycle*). Sedangkan *Open Knight's Tour* merupakan lintasan hamilton (*Hamilton path*).

Dalam papan catur standar, yaitu berukuran 8 x 8, salah satu dari *Closed Knight's Tour* adalah sebagai berikut :

4	1	6	55	10	51	46	49
7	56	3	64	45	48	11	52
2	5	58	9	54	13	50	47
57	8	63	14	59	44	53	12
28	37	60	43	62	15	24	41
31	34	29	38	25	42	21	18
36	27	32	61	16	19	40	23
33	30	35	26	39	22	17	20

Gambar 4 *Closed Knight's Tour* dalam papan catur 8 x 8

Knight's Tour pada papan catur di atas dapat melewati setiap persegi tepat satu kali. Dimulai pada posisi 1 dan seterusnya sehingga berakhir pada posisi 64. Dapat kita lihat bahwa dari posisi 64 ke posisi 1 terdapat satu langkah *Knight*. Sehingga jika dinyatakan dalam graf, *Knight's Tour* di atas membentuk siklus Hamilton sebagai berikut:



Gambar 5 : Siklus Hamilton dalam *Closed Knight's Tour*

Permasalahannya adalah jika diberikan papan catur dengan ukuran selain 8 x 8, apakah siklus Hamilton dapat ditemukan dari *Knight's Tour* ?

Ada dua model papan catur yaitu papan catur bujur sangkar (persegi) berukuran n x n dan papan catur persegi panjang berukuran m x n.

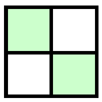
3.1.a. Papan Catur Persegi Berukuran n x n

Papan catur persegi berukuran n x n dapat dibedakan menjadi dua, yaitu untuk n genap dan n ganjil.

- Untuk n genap

  Menurut Sloane's A001230; Wegener 2000, p.369, untuk n genap yaitu 2,4,6,8, ... , banyaknya *Closed Knight's Tour* adalah 0, 0, 9862, 13267364410532, ...

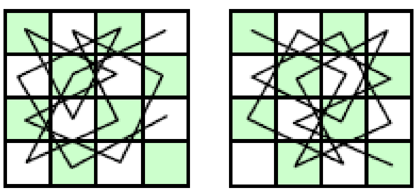
  - Papan catur 2 x 2

    Terlihat jelas bahwa dimanapun posisi awal, kuda sudah tidak dapat melangkah, sehingga tidak ada *Knight's Tour* untuk papan catur ini.

  - Papan catur 4 x 4

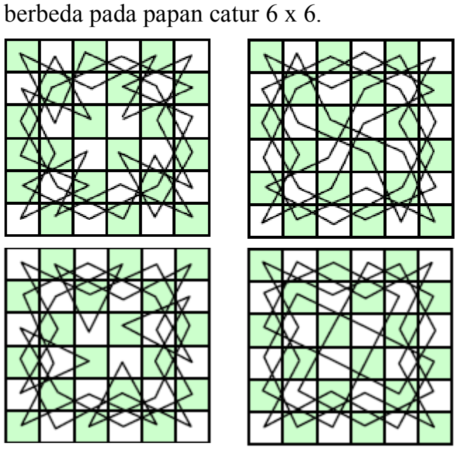
    Untuk papan berukuran 4 x 4, menurut Euler dan Sainte-Marie tidak mungkin terjadi *Closed Knight's Tour*.

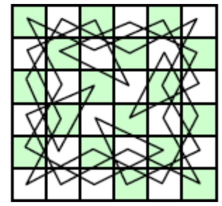
    

    Pada kedua gambar di atas tampak bahwa selalu ada persegi yang tidak terlewati. Hal ini mengakibatkan *Closed Knight's Tour* juga tidak pernah terjadi. Pada graf papan catur 4 x 4 terdapat satu titik yang berderajat nol.

  - Papan catur 6 x 6

    Paul de Hijo (Philipe Jolivald) 1882 menemukan ada 5 *Closed Knight's Tour* berbeda pada papan catur 6 x 6.

    M. Kraitchik (1972) menunjukkan pada papan catur 6 x 6 ada 17 *Closed Knight's Tour* dengan simetri berjumlah dua dan 1223 asimetri

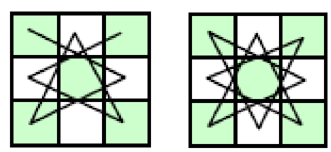
    Mark R. Keen telah menemukan bahwa papan berukuran 10 x 10 dan 12 x 12 juga terdapat *Closed Knight's Tour*. Secara umum, papan catur berukuran n x n dengan n genap dan n > 4 dapat ditemukan *Closed Knight's Tour*.

- Untuk n ganjil

  Pada papan catur n x n dengan n = 1, 3, 5, 7, ... tidak ditemukan *Closed Knight's Tour*.

  - Papan 1 x1 jelas sekali.
  - Papan catur 3 x 3

    Dari dua contoh *Knight's Tour* di bawah, terlihat bahwa dari manapun kita memulai, persegi yang di tengah tidak akan dilalui *knight*. Namun jika kita mulai dari tengah, *knight* sudah tidak dapat melangkah kemana-mana.

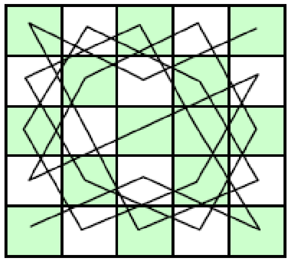
    

    Menurut teori graf, pada papan catur 3 x 3 tidak mungkin terjadi *knight's tour* karena pada grafnya terdapat satu titik yang berderajat nol yaitu titik yang melambangkan persegi yang di tengah.

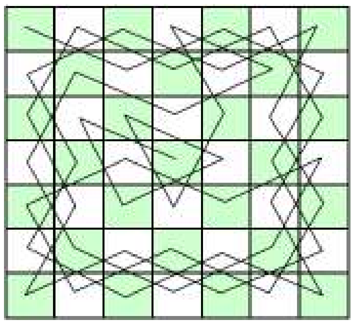
    Hasil eksperimen **Mark R. Keen** menunjukkan bahwa *Open Knight's Tour* terjadi pada papan berukuran 5 x 5, 7 x 7, 9 x 9, 11 x 11.

  - Papan catur 5 x 5

    Knight's Tour pada papan 5 x 5 yang digambarkan oleh Leonhard Euler (1759) seperti yang terlihat di bawah ini dapat melewati semua persegi, tetapi dari posisi akhir tidak dapat kembali ke posisi awal. Dengan demikian yang terjadi adalah *open Knight's Tour*.



- Papan catur 7 x 7

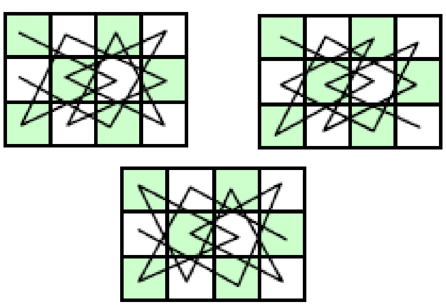


Terlihat bahwa setelah melewati semua persegi tepat satu kali, *knight* tidak dapat kembali ke posisi semula, sehingga terjadi *Open Knight's Tour*.

Karena *knight's* dalam melangkah selalu berpindah dari satu warna ke warna yang lain maka berdasarkan metode pewarnaan pada papan berukuran n x n dengan n ganjil akan diperoleh banyaknya kedua warna berbeda. Akibatnya *Closed Knight's Tour* tidak mungkin terjadi.

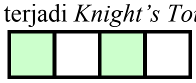
3.1.b. Papan Catur Persegi Berukuran m x n

Menurut Euler, papan persegi panjang terkecil yang memungkinkan adanya *Knight's Tour* adalah papan 3 x 4. Di sana terdapat tiga *Open Knight's Tour*.

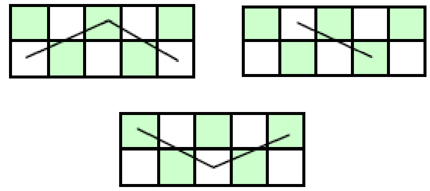


Perhatikan beberapa contoh berikut :

- Papan catur 1 x 4
  Pada gambar tampak bahwa tidak mungkin terjadi *Knight's Tour*.

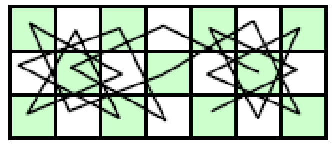


- Papan catur 2 x 5
  Tampak bahwa langkah terbanyak *knight* hanya dapat melewati di tiga titik.

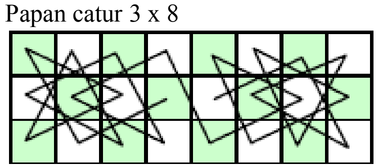


Pada papan 3 x 7 dan 3 x 8 tidak terdapat *Closed Knight's Tour*, karena *knight* tidak dapat kembali ke posisi awal.

- Papan catur 3 x 7



- Papan catur 3 x 8

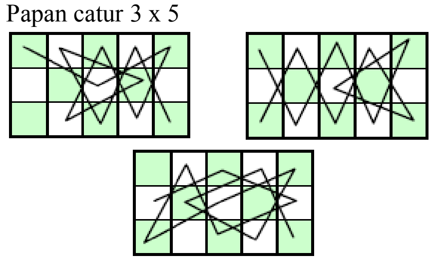


Allen Schwenk telah membuktikan adanya karakterisasi dari papan catur persegi panjang berukuran *m* x *n* sehingga dapat ditemukan *knight's tour*. Papan catur segiempat berukuran *m* x *n* (untuk *m* lebih kecil dari *n*) tidak memiliki *Knight's Tour* jika :

- *m* dan *n* keduanya ganjil
- *m* = 1, 2 atau 4
- *m* = 3 dan *n* = 4, 6 atau 8

Perhatikan beberapa contoh berikut :

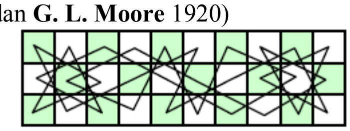
- Papan catur 3 x 5

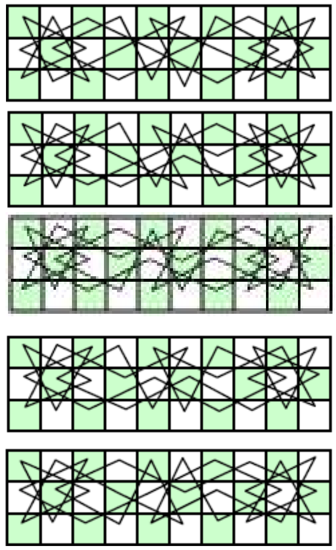


Tampak bahwa lebih dari satu persegi tidak dilewati *knight*, sehingga tidak ada *Knight's Tour*.

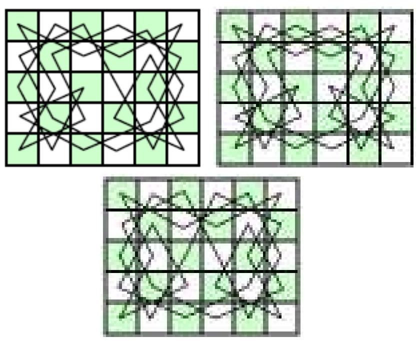
Papan persegi panjang terkecil yang memungkinkan terjadinya *Closed Knight's Tour* adalah papan dengan 30 persegi, yaitu papan 3 x 10 dan 5 x 6. **Ernest Bergholt** (1917) menemukan *Closed Knight's Tour* pada papan catur 3 x 12, 3 x 14, 3 x 18 dan 3 x 20.

- Papan catur 3 x 10
  Ada enam *Closed Knight's Tour* pada papan 3 x 10 (pertama kali ditemukan oleh **E. Bergholt** 1917 dan **G. L. Moore** 1920)





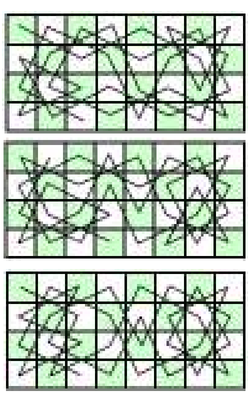
- Papan catur 5 x 6
  Ada tiga *Closed Knight's Tour* papan catur 5 x 6



Menurut **Euler** (1759), **Sainte-Marie** (1877) dan **Louis Posa**, meskipun pada papan berukuran 4 x n tidak mungkin terjadi *Closed Knight's Tour* tapi masih memungkinkan terjadinya *Open Knight's Tour*.

Perhatikan contoh di bawah

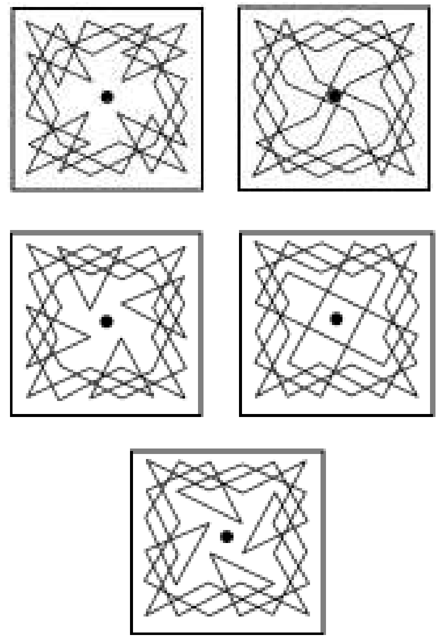
- Papan catur 4 x 8



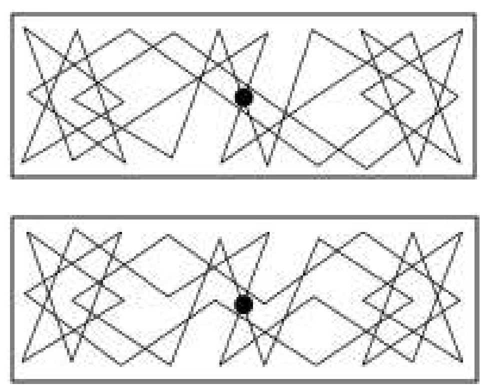
3.2. Symmetry in Tour

Jika kita perhatikan kembali *Closed Knight's Tour* di atas, ada beberapa yang memiliki simetri, baik simetri putar maupun simetri lipat.

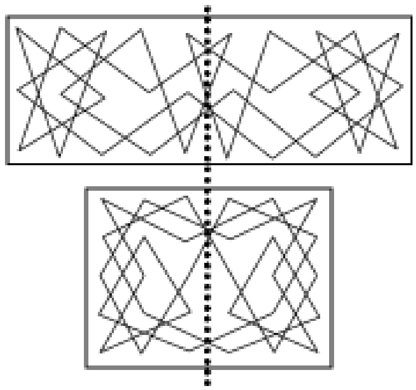
- Simetri Putar 90^o
  Pada papan catur 6 x 6, **Paul de Hijo** (Phillipe Jolivald) 1882 menemukan ada 5 *Closed Knight's Tour* berbeda dengan simetri putar 90^o terhadap titik tengah papan catur.

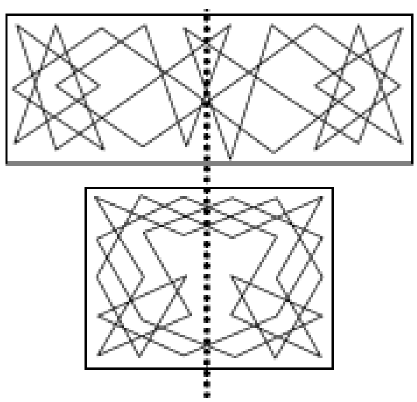


- Simetri Putar 180^o
  Pada papan catur 3 x 10, *Closed Knight's Tour* memiliki simetri putar 180^o terhadap titik tengah (*centrosymmetric*) yang merupakan tipe *bergholtian symmetry*.



- Simetri Lipat
  Pada papan catur 3 x 10 dan 5 x 6, *Closed Knight's Tour* memiliki simetri lipat terhadap sumbu (*axisymmetric*) yang merupakan tipe *sulian symmetry*.





4. KESIMPULAN

Teori Graf yang merupakan salah satu cabang dari ilmu Matematika Diskrit. Teori Graf memiliki banyak sekali aplikasi. Disadari atau tidak, di sekitar kehidupan manusia pun aplikasi dari teori graf dapat dilakukan pada banyak hal. Salah satu contoh yang simple tapi menarik ialah pada *Knight's Tour* pada kuda catur pada permainan catur. Dengan menganggap kotak-kotak pada papan catur sebagai titik-titik pada teori Graf maka kita dapat mencari ada atau tidaknya sebuah *Knight's Tour* dengan menggunakan teori Graf. Permasalahan ini begitu menarik. Bahkan banyak ilmuan yang menaruh perhatiannya pada permasalahan ini.

DAFTAR REFERENSI

[1] Baskoro, Edy T. Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf. *http://www.mgb.itb.ac.id*. Tanggal akses: 27 Desember 2007 pukul 21:15

[2] Munir, Rinaldi. (2006). Diktat Kuliah IF 2153 Matematika Diskrit, edisi keempat. Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika, Institut Teknologi Bandung.

[3] Yuliawanto. *Knight's Tour.pdf*. LIMAS, PPPPTK Matematika Yogyakarta. 2007.