Teorema Cayley pada Pohon Berlabel dan Pembuktiannya

Fakhri – NIM : 13506102

Program Studi Teknik Informatik ITB, Bandung, *e*-mail : if16102@students.if.itb.ac.id

Abstrak – *Makalah ini membahas tentang teorema Cayley pada pohon berlabel dan beberapa metode untuk membuktikannya. Teorema cayley ini dikemukakan oleh seorang matematikawan inggris bernama Arthur Cayley. Pada teorema cayley ini dikatakan bahwa bila n merupakan bilangan bulat lebih dari satu, maka jumlah pohon yang memiliki n simpul berlabel adalah* n^{n-2}.

Teorema ini begitu simpel, akan tetapi banyak ilmuwan yang menganggap teorema ini sangat elegan. Sampai saat ini sudah banyak terdapat metode pembuktian teorema ini. Diantara yang paling umum adalah melalui korespondensi 1-1 antara pohon berlabel dengan barisan dan melalui Teori Kombinatorial.

Kata kunci: *Teori Graf, Teorema Cayley, Teori Kombinatorial, korespondensi 1-1, pohon berlabel.*

1. PENDAHULUAN

Akhir-akhir ini, teori graf telah memantapkan dirinya sebagai alat matematika yang sangat penting dan berguna. Hal ini terutama berhubungan dengan struktur diskret yang ada pada sistem. Banyak ilmu yang memanfaatkan Teori Graf (*Graph Theory*), mulai dari proses komputasi sampai dengan Kimia dan Genetika.

Graf secara praktisnya terdiri dari dua bagian , yaitu himpunan titik yang sering disebut dengan himpunan titik (V = Verteks) dan himpunan garis atau himpunan sisi (E = Edge). Secara simbol dapat dituliskan dengan bentuk G(V,E) . Dalam makalah ini akan dibahas tentang graf yang mempunyai sifat khusus, yaitu pohon (*tree*), sebab *Teorema Cayley* berhubungan dengan pohon berlabel.

Teorema Cayley sendiri merupakan salah satu teorema yang paling simple dan elegan pada teori graf. Meskipun teorema ini kurang dikenal, namun teorema ini mempunyai daya tarik sendiri bagi para ilmuwan untuk membuktikannya. Bahkan sampai saat ini-pun, para ilmuwan masih berusaha mencari metode pembuktian yang baru dari teorema Cayley ini.

2. POHON

Di antara sekian banyak konsep dalam teori graf, konsep pohon (*tree*) mungkin merupakan konsep yang paling penting, khususnya bagi orang yang tertarik dengan penerapan graf. Banyak terapan, baik dalam bidang ilmu computer maupun di luar bidang ilmu computer, yang telah mengkaji pohon secara intensif sebagai obyek matematika. Dalam kehidupan sehari-hari, orang telah lama menggunakan pohon untuk menggambarkan hierarki. Misalnya adalah pohon silsilah keluarga.

Pohon sudah lama digunakan sejak 1857, ketika natematikawan inggris Arthur Cayley menggunakan pohon untuk menghitung jumlah senyawa kimia.

Berikut ini adalah beberapa definisi yang berkaitan dengan teori pohon (*tree*) :

Definisi 2.1 :

Pohon (tree) adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit

Definisi 2.2 :

Pohon bentangan (spanning tree) dari graf terhubung adalah Upagraf merentang yang berupa pohon.

Definisi 2.3 :

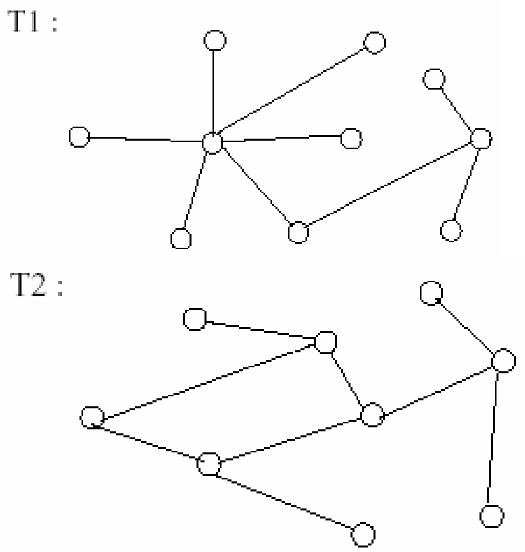
Derajat (degree) sebuah simpul adalah jumlah upapohon (jumlah anak) pada simpul tersebut

Definisi 2.4 :

Jembatan (bridge) adalah sisi dalam suatu graf yang penghapusannya akan membuat graf terpecah menjadi dua komponen.

Definisi 2.5 :

Pohon berlabel(labeled tree) adalah Pohon yang disetiap simpul mempunyai keterangan yang digunakan untuk mengindikasikan bahwa diagram tersebut digunakan untuk tujuan tertentu.



Gambar 1. Pohon dan bukan pohon

Pohon mempunyai beberapa sifat yang kemudian menghasilkan beberapa teorema. Berikut ini adalah beberapa teorema dan buktinya yang merupakan hasil dan sifat-sifat yang dimiliki pohon.

Teorema 2.1 :

Jika T adalah pohon maka T memiliki (n-1) sisi.

Bukti :

Untuk # V = n = 1 maka jelas T merupakan sebuah titik saja yaitu graf tanpa sisi (n - 1) = 0 sisi. Untuk # V = n > 1 , maka T memiliki (n-1) sisi. Apabila sebuah sisi sembarang e di T dihapus, maka akan diperoleh 2 graf bagian yang masingmasing merupakan pohon , sebutlah T_1 dan T_2 dengan # $V_1 = n_1$, # $V_2 = n_2$, # $E_1 = k_1$ dan # $E_2 = k_2$. Akan diperoleh hubungan sebagai berikut :

$$n_1 + n_2 = n$$
$$k_1 + k_2 = (n_1 – 1) + (n_2 – 1) = n_1 + n_2 – 2 = n –2$$

(sebab sebuah sisi sembarang e telah dihapus dari T)

jadi # $k_1 = n_1 –1$ dan # $k_2 = n_2 – 1$.

Teorema 2.2 :

T tidak mengandung sirkuit, terhubung dan memiliki (n-1) sisi.

Bukti :

Andaikan T tak bersambung dan memiliki (n-1) sisi, maka T tidak mengandung sirkuit dan jumlah titiknya lebih satu daripada jumlah sisinya. Oleh karena itu jumlah total titik di T melebihi sisinya dengan paling sedikit 2, yang kontradiksi dengan kenyataan bahwa T memiliki (n-1) sisi.

Teorema 2.3 :

Jika T adalah graf terhubung dan memiliki (n-1) sisi maka T terhubung dan setiap sisinya adalah jembatan (jembatan adalah sisi yang bila dihapus menyebabkan graf terpecah menjadi dua komponen).

Bukti :

Akan dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan T bersambung dan ada sisinya yang bukan jembatan, maka dengan menghilangkan sebuah sisi tertentu, akan diperoleh graf dengan n titik dan (n-2) sisi. Graf ini pastilah tidak bersambung, sehingga di dapat kontradiksi.

Teorema 2.4 :

Jika T merupakan graf terhubung dan setiap sisinya merupakan jembatan, maka 2 titik sembarang di T dihubungkan dengan tepat satu lintasan.

Bukti :

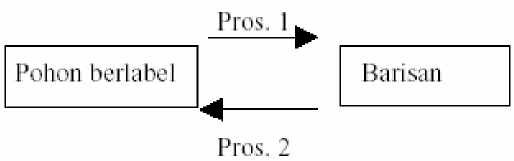
Akan dibuktikan dengan kontradiksi. Apabila dua titik sembarang di T dihubungkan dengan lebih dari satu lintasan (katakanlah 2 lintasan), maka dua titik tersebut membentuk untai. Dengan adanya untai maka setiap sisi pada untai tersebut bukan jembatan. dengan kata lain ada sisi yang bukan jembatan di T. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa setiap sisi di T adalah jembatan. Teorema-teorema di atas merupakan teorema penting yang berhubungan dengan pohon. Teorema Cayley berhubungan dengan jumlah total (non isomorfis) pohon berlabel.

Teorema 2.5 (Teorema Cayley) :

Ada sebanyak n^{n-2} pohon berlabel dengan n titik yang beda. Dalam bagian berikutnya, akan dibahas tentang konstruksi pembuktian Teorema
Cayley dengan dua pendekatan. Pendekatan itu adalah dengan melakukan korespondensi 1-1 antara pohon berlabel dengan barisan bilangan bulat positif dan yang kedua dengan melakukan
penghitungan melalui Teori Kombinatorial. Dalam hal ini pohon berlabel adalah pohon yang titiknya dilabelkan dengan bilangan bulat positif.

3. Korespondensi 1-1 antara pohon berlabel dengan barisan

Inti pembuktian teorema Cayley dengan korespondensi adalah melakukan korespondensi 1-1 antara pohon berlabel dengan barisan (a_1, a_2, a_3, a_4, …a_{n-2}) . Pembuktian ini telah dilakukan oleh Pruefer.



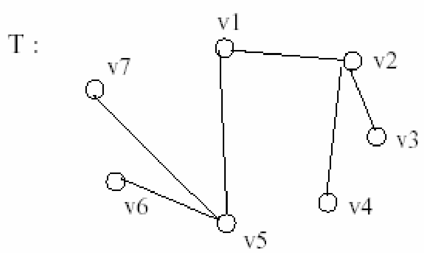
Gambar 2. Konstruksi dasar pembuktian dengan korespondensi 1-1

Proses 1:
konstruksi dari pohon berlabel menjadi barisan.
Proses 2:
konstruksi dari barisan menjadi pohon berlabel.

Langkah-langkah pada proses 1 (diketahuinya pohon berlabel) :

a. Cari titik dengan derajat satu dan pilih dengan label indeks terkecil.
b. Cari titik yang langsung berhubungan dengan titik yang telah dipilih dan tempatkanlah indeks itu pada posisi pertama barisan.
c. Hilangkan titik yang dipilih pada langkah a. dan sisi yang berhubungan dengannya, sehingga diperoleh pohon yang lebih kecil jumlah titiknya.
d. Ulangi langkah a. sampai dengan c, sehingga diperoleh hanya dua titik yang tinggal.

Sebagai contoh :



No	: 1	2	3	4	5
Pilih	: v3	v4	v2	v1	v6
Berhub.	: v2	v2	v1	v5	v5
→ Indeks	: **2**	**2**	**1**	**5**	**5**
Hilang	: v3	v4	v2	v1	v6

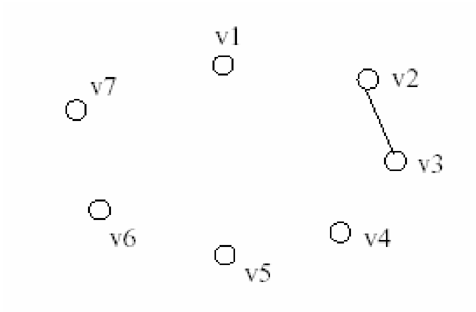
Gambar 3. Pohon berlabel T dan barisan (2 , 2 , 1 , 5 , 5) sebagai pasangannya

Langkah-langkah pada proses 2 (diketahuinya barisan (a_1, a_2, a_3, …, a_{n-2})) :

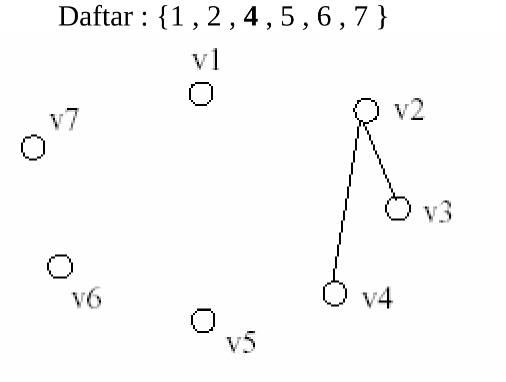
a. Gambarlah n titik, labelkan mereka dari v_1, v_2, v_3, …, v_n dan buatlah daftar bilangan dari 1 sampai dengan n.
b. Tentukan bilangan terkecil yang ada di dalam daftar tersebut, tapi tidak berada di barisan dan juga tentukan bilangan pertama dalam barisan; kemudian tambahkan sisi yang menggabungkan titik-titik tersebut dalam gambar.
c. Hilangkan bilangan pada langkah b. dari daftar bilangan dan bilangan pertama dari barisan, sehingga didapat daftar bilangan dan barisan bilangan yang lebih sedikit.
d. Ulangi langkah b. dan c. untuk daftar bilangan dan barisan bilangan sisanya, sampai hanya ada dua label yang tinggal dalam daftar. Kemudian gabungkan titik-titik pada gambar sesuai dengan dua label sisanya.

Sebagai contoh : diketahui barisan (2, 2, 1, 5, 5) , akan dicari pohon berlabel yang bersesuaian dengannya. Sediakan lebih dahulu daftar {1 , 2 , 3 ,4 , 5 , 6 , 7 } , sebab 7 – 2 = 5.

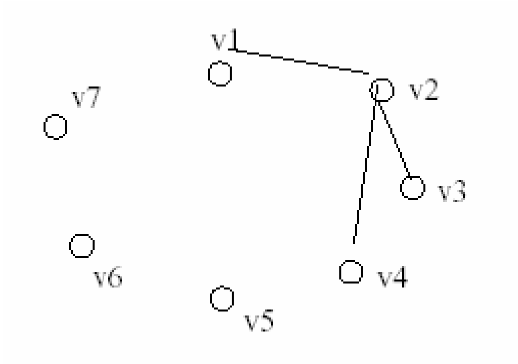
1. Barisan : (**2** , 2 , 1 , 5 , 5)
   Daftar : {1 , 2 , **3** ,4 , 5 , 6 , 7 }



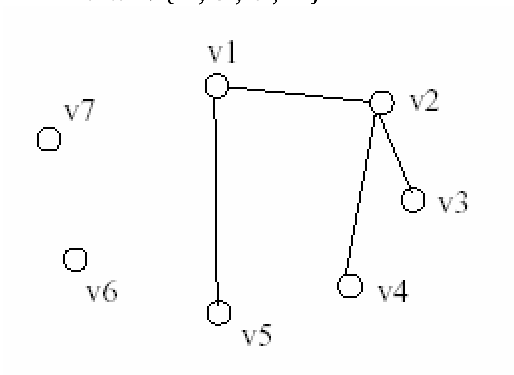
2. Barisan : (**2** , 1 , 5 , 5)
   Daftar : {1 , 2 , **4** , 5 , 6 , 7 }



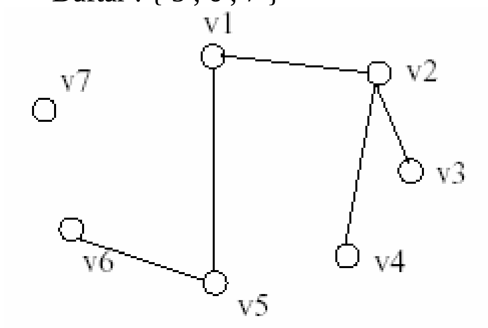
3. Barisan : (**1** , 5 , 5)
   Daftar : {1 , **2** , 5 , 6 , 7 }



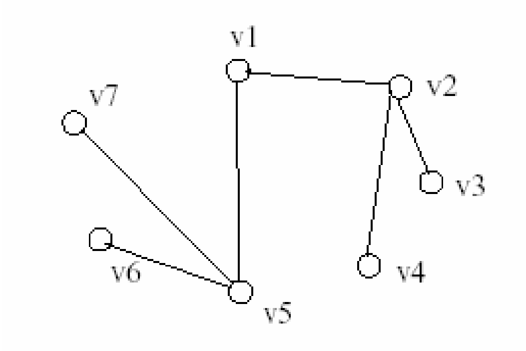
4. Barisan : (**5** , 5)
   Daftar : {**1** , 5 , 6 , 7 }



5. Barisan : (**5**)
   Daftar : { 5 , **6** , 7 }



6. Barisan : (**-**)
   Daftar : { **5** , **7** }



Gambar 4. Langkah-langkah proses 2

Dengan adanya konstruksi korespondensi 1- 1 tersebut, langsung dapat dilihat bahwa, bila dipunyai pohon berlabel maka dapat dibentuk barisannya. Dan apabila dipunyai barisan (a_1, a_2, a_3, …, a_{n-2}) maka dapatlah dibentuk pohon berlabelnya. Buktinya langsung diperoleh dari barisan. Barisan (a_1, a_2, a_3,

…, a $_{n-2}$) memuat (n-2) suku dan tiap-tiap suku mempunyai kemungkinan untuk mengambil nilai 1, 2, 3, 4, 5, …., n. Sehingga jumlah total kemungkinan pohon berlabelnya ada n $_{n-2}$ buah . Selesailah bukti dengan metode pertama.

Akibat 3.1 :

Jumlah pohon bentangan untuk graf K_n ada n $^{n-2}$ buah .

Bukti :

K_n adalah graf yang terdiri dari n titik dimana setiap pasang titiknya dihubungkan dengan tepat satu sisi. Buktinya dengan menggunakan korespondensi 1-1 seperti di atas. Korespondensi itu dilakukan antara semua pohon bentangan K_n yang terdiri titik - titik { v_1 , v_2, v_3, …, v_n } dengan himpunan barisan (a_1, a_2, a_3, …, a_{n-2}) , dimana a_i adalah bilangan bulat yang memenuhi $1 \le a_i \le n$. Jumlah semua kemungkinan yang diperoleh dari korespondensi itu adalah n_{n-2} , karena ada n cara untuk memilih setiap a_i .

Akibat 3.2 :

Jumlah pohon bentangan dari graf K_{n-e} adalah (n-2)n $^{n-3}$.

Bukti :

K_{n-e} adalah graf K_n yang sembarang sisi e dihapus. Misalkan sisi e tersebut adalah { v_{n-1} , v_n }, maka dapat dibentuk korespondensi 1-1 seperti pada pembuktian Teorema Cayley. Korespondensi itu antara titik { v_1, v_2, v_3, …, v_n } di K_{n-e} dengan himpunan barisan (a_1, a_2, a_3, …, a_{n-2}). Tiap a_i adalah bilangan bulat $1 \le a_i \le n$ untuk i = 1, 2, 3, …, (n-3) dan $1 \le a_{n-2} \le n-2$. Sehingga ada n cara untuk memilih setiap a_I , i = 1, 2, 3, …(n - 3) dan ada (n - 2) cara untuk memilih a_{n-2}. Dengan kata lain ada (n - 2)n^{n-3} pohon bentangan.

4. TEORI KOMBINATORIAL

Proses pembuktian dengan Teori Kombinatorial merupakan bukti langsung. Dengan teori ini, diadakan penghitungan langsung dengan melakukan pemecahan dan penggabungan pohon. Teoremateorema penting yang digunakan dalam pembuktian akan diberikan dibawah ini.

Teorema 4.1 (Binomial) :

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Untuk sembarang bilangan positif n.

Bukti :

Akan dibuktikan dengan matematika , sebagai berikut

Ambil n = 1, maka

$$(x+y)^1 = \sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} x^{1-r} y^r = x + y \text{ (benar).}$$

Ambil n = k, maka

$$(x+y)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r \text{ (benar).}$$

Akan ditunjukkan bahwa persamaan tersebut juga benar untuk n = k + 1

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k = (x+y)\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r$$

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r = x\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r + y\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r$$

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r = x\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r + y\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r$$

$$\sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1}$$

Koefisien sebelah kiri persamaan tersebut pada suku x $^{k+1-r}$ y^r adalah :

$$\binom{k+1}{r}$$

Koefisien sebelah kiri persamaan tersebut pada suku x $^{k+1-r}$ y^r adalah:

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1}$$

Sekarang tinggal dibuktikan bahwa koefisien sebelah kiri sama dengan koefisien sebelah kanan, sebagai berikut :

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \frac{k!}{(k-r)!r!} + \frac{k!}{(k-r+1)!(r-1)!}$$

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \frac{k!(k-r+1)}{(k-r+1).(k-r)!r!} + \frac{k!r}{(k-r+1)!(r-1)!r}$$

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \frac{k!\{(k-r+1)+r\}}{(k-r+1)!r!} = \frac{k!(k+1)}{(k+1-r)!r!} = \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!} = \binom{k+1}{r}$$

Teorema 4.2 :

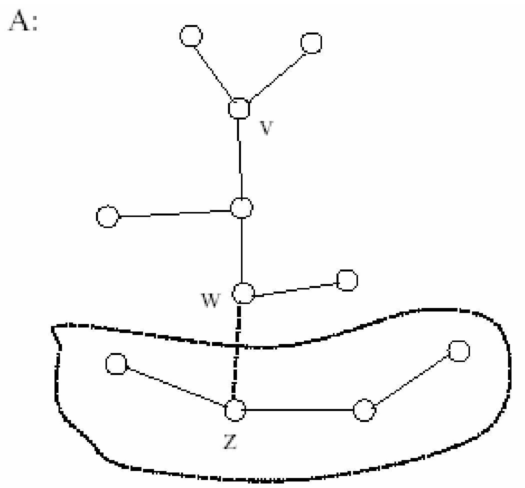
$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r}$$

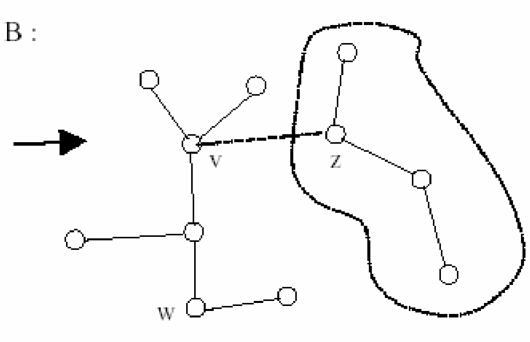
Benar untuk sembarang bilangan bulat positif n.

Bukti :

Ambil y=1 pada Teorema 4.1 di atas. Konstruksi pembuktian metode kedua adalah sebagai berikut: pertama dibentuk T(n,k) yaitu menunjukkan banyak pohon berlabel dengan n titik dimana suatu titik tertentu (sebut v) memiliki derajat k. Dari T(n,k) ini akan dijumlahkan dari k = 1 sampai dengan k = (n-1) sehingga di dapat Tn , yaitu banyak pohon berlabel dengan n titik. Misalkan A adalah pohon berlabel dengan deg(v) = k-1. *Penghapusan* sembarang sisi e = wz dari A yang tidak berhubungan dengan titik v akan menghasilkan dua pohon-bagian salah satu darinya akan memuat v dan yang lain akan memuat v dan w atau z (katakanlah w) dan yang lainnya akan memuat titik z. Jika titik v dan z *digabungkan* dengan menambahkan satu sisi, maka diperoleh pohon berlabel B dengan deg(v) = k. Pasangan pohon berlabel (A,B) disebut *link* , jika B dapat diperoleh dari A dengan konstruksi seperti diatas (konstruksi : *penghapusan* dan *penggabungan*).

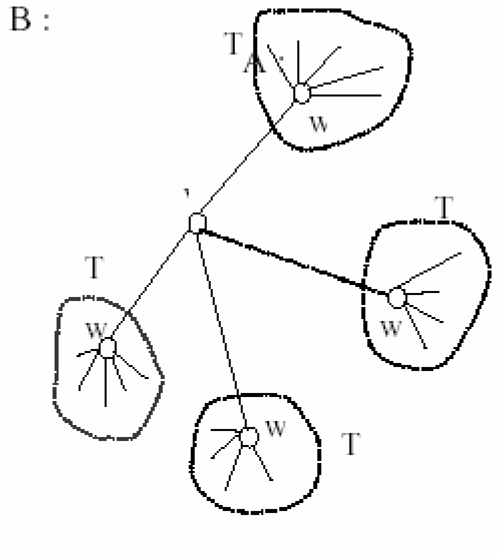
Sebagai contoh :

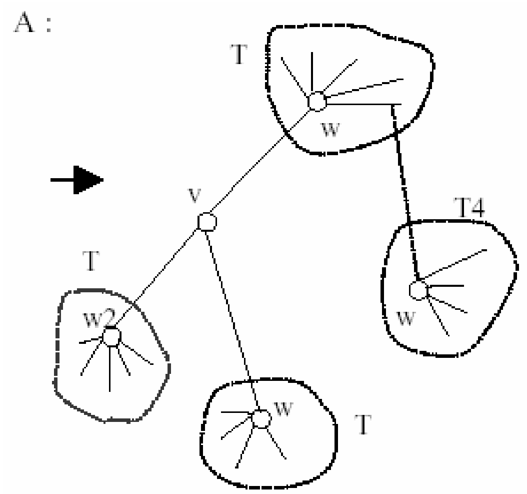




Gambar 5. Link(A,B) dengan deg(v) = pada A dan deg(v) = 4 pada B

Graf A dapat dipilih dengan salah satu T(n, k-1) cara dan B secara tunggal didapat dari sisi wz (yang dapat dipilih dengan (n- 1) – (k-1) = n-k cara). Jelas bahwa link(A,B) mempunyai jumlah total (nk) T(n,k-1). Demikian pula proses dari pohon berlabel B menjadi pohon berlabel A.





Gambar 6. Link(A,B) dengan deg(v) = 4 pada B dan deg(v) = 3 pada A

B adalah pohon berlabel dengan deg(v) = k. Dan tentu saja T1, T2, T3, T4, …Tk adalah pohon-bagian yang didapat dari B dengan menghilangkan titik v beserta dengan k sisi yang berhubungan dengannya. Misalkan dihilangkan satu sisi (sebut vw4) dan menghubungkan pohon-bagian T4 dengan salah satu dari k pohon-bagian (sebut T1) sehingga ditemukan link(A,B). B dapat dipilih dengan T(n,k) cara dan banyaknya cara untuk menghubungkan w4 ke titik lain di pohon-bagian yang lain adalah (n-1) – ni { ni adalah jumlah titik Ti , dalam hal gambar di atas adalah n4}. Oleh karena itu link(A,B) adalah :

$$T(n,k)\{(n-1-n1)+(n-1-n2)+(n-1-n3)+\ldots+(n-1-nk)\}=$$

$$T(n,k)\ \{\ kn - k - \sum_{i=1}^{k} n_i\ \} =$$

$$\{\ kn - k - n + 1\ \}\ T(n,k)=\ (n-1)(k-1)\ T(n,k),$$

Karena

$$\sum_{t=1}^{k} n_t = n - 1$$

Sehingga akhirnya didapat persamaan

(n - k)T (n, k -1) = (n-1) (k -1) T(n, k)

Ambil T(n, 1) = 1 dan lakukan proses iterasi, maka diperoleh :

$$T(n,2) = \frac{(n-2)}{(n-1)(1)} T(n,1) = \frac{(n-2)}{(n-1)(1)}$$

$$T(n,3) = \frac{(n-3)}{(n-1)(2)} T(n,2) = \frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)(2)(n-1)(1)}$$

$$T(n,4) = \frac{(n-4)}{(n-1)(3)} T(n,3) = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{(n-1)(3)(n-1)(2)(n-1)(1)}$$

….dst…

$$T(n,k) = \frac{(n-k)}{(n-1)(k-1)} \cdots\cdots \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{(n-1)(3)(n-1)(2)(n-1)(1)}$$

Ada sebanyak (n – k – 1) untuk bentuk (n - 1), sehingga :

$$T(n,k) = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)....(n-k)}{(k-1)(k-2)(k-3)....(3)(2)(1)} (n-1)^{(n-k-1)}$$

$$T(n,k) = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)....(n-k).(n-k-1)!}{(k-1)(k-2)(k-3)....(3)(2)(1).(n-k-1)!} (n-1)^{(n-k-1)}$$

$$T(n,k) = \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} (n-1)^{(n-k-1)} = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{(n-k-1)}$$

Dalam mencari semua pohon berlabel dengan n titik maka k harus dijumlahkan dari 1 sampai dengan (n-1), prosesnya sebagai berikut :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} = \sum_{k-1=0}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{(n-2)-(k-1)} = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (n-1)^{(n-2)-j}$$

persamaan di atas diperoleh dengan substitusi k-1 = j. Akhirnya dengan menerapkan Teorema 4.2, substitusi r = j dan x = (n-1) maka diperoleh bentuk :

$T_n = \{1 + (n - 1)\}^{n-2} = n^{n-2}$

, seperti yang diinginkan.

Akhirnya di dapat hasil yang sama seperti pada metode korespondensi 1-1 antara pohon berlabel dan barisan. Selesailah bukti dengan metode kedua.

5. KESIMPULAN

Suatu teorema dalam ilmu matematika perlu memiliki lebih dari satu pembuktian agar dapat diterima secara luas. Salah satunya adalah teorema Cayley yang memiliki beberapa metode pembuktian. Dari pembahasan dalam makalah ini dapat dilihat bahwa kedua metode yang digunakan untuk pembuktian menghasilkan bentuk akhir yang sama. Sehingga metode yang satu dapat membenarkan dan menguatkan hasil yang sudah ada.

Pada metode Korespondensi 1-1, dibutuhkan konstruksi aturan-aturan yang dapat diterima untuk memetakan dari satu sistem ke sistem yang lain dan sebaliknya tanpa menghilangkan struktur baku sistem tersebut. Metode seperti ini juga digunakan dalam penyelesaian persamaan differensial secara tidak langsung, yaitu melalui Transformasi Laplace.

Sedangkan pada metode dengan menggunakan Teori Kombinatorial dibutuhkan penghitungan dan pencarian secara rekursif-iteratif, dan setelah itu dikembalikan pada bentuk Teorema Binomial untuk penyelesaian akhirnya.

Selain kedua metode diatas, masih banyak metode-metode lain yang dapat digunakan untuk pembuktian Teorema Cayley. Bahkan, sampai saat inipun masih bermunculan berbagai metode lain yang semakin menguatkan Teorema Cayley ini.

DAFTAR REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi. (2006). *Matematika Diskrit*. Teknik Informatika ITB.

[2] Rosen, Kenneth H. (1999). *Discrete Mathematics and Its Application*. McGraw Hill.

[3] Cayley`s formula –wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley_formula.htm
Tanggal akses: 26 Desember 2007 pukul 10.07 WIB.

[3] Multinomial theorem –wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_theorem.htm
Tanggal akses: 27 Desember 2007 pukul 9.47 WIB.

[4] Moon J. (1967).*Various Proofs of Cayley's Formula for Counting Tree, A Seminar on Graph Theor*. Holt Rinehart & Winston. New York.