Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :………………………….
NIM/Kelas :………………………….
T.tangan :………………………….

Kuis ke-2 IF2153 Matematika Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika dan Teori Bilangan
Dosen: Rinaldi Munir & Harlili
Kamis, 4 Oktober 2007
Waktu: 50 menit

---

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa $n < 2^n$ untuk setiap bilangan bulat positif n. (15)
2. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap n bilangan asli berlaku: $15 \mid 2^{4n} - 1$ (15)
3. Buktikan untuk setiap bilangan bulat positif n dan a, PBB(a, $a + n$) habis membagi n. (15)
4. Sebuah buku teks kuliah memiliki ISBN 0-135-0***Y***-1***X***1-0. Diketahui $2Y \equiv 5 \pmod 7$. Tentukan nilai X dan Y ! (20)
5. Tentukan (dengan menggunakan cara kombinasi lanjar atau aritmetika modular) salah satu pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $56x + 72y = 8$. (15)
6. Tentukan semua solusi x bilangan bulat dari sistem kekongruenan: $2x \equiv 3 \pmod 5$ dan $4x \equiv 2 \pmod 6$ (20)

Solusi:

1. Misalkan P(n): proposisi "$n < 2^n$."
   1. Langkah basis:
      P(1) benar, karena $1 < 2^1 = 2$.
   2. Langkah induktif:
      Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu $k < 2^k$.
      Kita perlu menunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu $k + 1 < 2^{k+1}$
      Kita mulai dari $k < 2^k$
      $k + 1 < 2^k + 1 \le 2^k + 2^k = 2^{k+1}$
      Jadi, jika $k < 2^k$ maka $k + 1 < 2^{k+1}$
   3. Konklusi:

   Jadi, $n < 2^n$ benar untuk setiap n bilangan bulat positif.

2. Karena 15 = 3 x 5 dan fpb(3, 5) = 1, maka cukup ditunjukkan bahwa $3 \mid 2^{4n} - 1$ dan $5 \mid 2^{4n} - 1$.
   Untuk $3 \mid 2^{4n} - 1$:
   $$2^{4n} \equiv (-1)^{4n} \equiv 1 \bmod 3$$
   $$\Rightarrow \quad 2^{4n} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \bmod 3$$
   Untuk $5 \mid 2^{4n} - 1$:
   $$2^{4n} \equiv (4)^{2n} \equiv (-1)^{2n} \equiv (1)^n \equiv 1 \bmod 5$$
   $$\Rightarrow \quad 2^{4n} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \bmod 5.$$
   (terbukti)

   Solusi 2
   Gunakan prinsip induksi matematika.
   Basis : Untuk n = 1, $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$. $15 \mid 15$. (benar)
   Induksi : Anggap benar untuk n = 1, 2, .., k. Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$.
   $2^{4(k+1)} - 1 = 2^{4k}.2^4 - 1 = 16.2^{4k} - 1 = 2^{4k} + 15.\ 2^{4k} - 1$.
   $15 \mid 2^{4k} - 1$ dan $15 \mid 15.\ 2^{4k}$ yang berarti $15 \mid 2^{4k} - 1 + 15.\ 2^{4k} = 2^{4(k+1)} - 1$. (terbukti)

3. Misalkan PBB(a, $a + n$) = d.
   Maka $d \mid a$ dan $d \mid a + n$
   Dengan demikian $d \mid a + n - a \Rightarrow d \mid n$ (terbukti)

4. $2Y \equiv 5 \pmod 7$ → $Y = ½\,(5 + 7k)$, untuk k sembarang bilangan bulat
   Untuk nilai k =

0 $\rightarrow$ Y = 2,5 (Y bukan bilangan bulat)
1 $\rightarrow$ Y = 6
2 $\rightarrow$ Y = 9,5 (Y bukan bilangan bulat)
3 $\rightarrow$ Y = 13 ($Y > 10$)

Dengan demikian, didapatkan nilai $Y = 6$

Kemudian pada kode ISBN berlaku:

$$\left(\sum_{i=1}^{9} iXi\right) \bmod 11 = \text{Karakter uji} = 0$$

$$((1.0) + (2.1) + (3.3) + (4.5) + (5.0) + (6.Y) + (7.1) + (8.X) + (9.1)) \bmod 11 = 0$$

$$(83 + 8X) \bmod 11 = 0$$

Karena $0 < X < 10$, maka nilai X yang memenuhi adalah $X = 2$.

$$(83 + 8.2) \bmod 11 = 0$$

$$99 \bmod 11 = 0$$

Solusinya adalah $X = 2$ dan $Y = 6$

5. **<u>Solusi 1</u>**

$56x + 72y = 8$
$7x + 9y = 1$
$9y = 1 – 7x$

$$y = \frac{1-7x}{9}$$

karena y bulat maka haruslah $1\text{-}7x \equiv 0 \bmod 9$
$7x \equiv 1 \bmod 9$
$-2x \equiv 10 \bmod 9$
$x \equiv -5 \bmod 9$
$x \equiv 4 \bmod 9$

Maka salah satu solusi adalah $x = 4$ dan dengan demikian $y = \frac{1-7.4}{9} = -3$

Jadi $(x, y) = (4, -3)$

<u>Solusi 2</u>

Fpb(9, 7) = 1
Maka $7x + 9y$ = fpb(9, 7) = 1 memiliki solusi bulat x, y. (Bezout's identity)
Dengan menggunakan algoritma Euclid diperoleh :
9 = 7. 1 + 2
7 = 2.3 + 1
2 = 1. 2

Dengan demikian kita dapat menuliskan fpb(9, 7) sebagai kombinasi linier dari 9 dan 7 sebagai berikut :
1 = 7 – 2.3
1 = 7 – (9 – 7.1) . 3
1 = 4.7 – 3.9
1 = 4.7 + (-3).9
Sehingga diperoleh x = 7 dan y = -3 sebagai salah satu solusi dari 56x + 72y = 40.

6. (1) $2x \equiv 3 \pmod 5$
$2x \equiv 8 \pmod 5$
$x \equiv 4 \pmod 5$

Maka misalkan $x = 5k + 4$ untuk k bilangan bulat

$$
\begin{aligned}
(2)\ 2x &\equiv 1 \pmod 3\\
2(5k+4) &\equiv 1 \pmod 3\\
10k+8 &\equiv 1 \pmod 3\\
k+2 &\equiv 1 \pmod 3\\
k &\equiv -1 \pmod 3\\
k &\equiv 2 \pmod 3
\end{aligned}
$$

Maka misalkan $k = 3m + 2$ untuk m bilangan bulat sehingga $x = 5(3m + 2) + 4 = 15m+14$