

Prinsip *Pigeonhole* dan Aplikasinya

Yoel Krisnanda Sumitro– NIM : 13505078

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesha 10, Bandung

E-mail : if15078@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas mengenai Prinsip *Pigeonhole* dan berbagai macam aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari [Alexander Bogomolny (2006)]. Prinsip *Pigeonhole* pertama kali dinyatakan oleh ahli matematika dari Jerman yang bernama Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet pada tahun 1834. Sehingga di berapa negara sering disebut sebagai prinsip *Dirichlet*.

Secara umum Prinsip *Pigeonhole* dapat dijelaskan dalam berbagai bentuk. Selain itu Prinsip ini juga dapat dinyatakan dalam berbagai macam cara juga. Namun secara formal *Pigeonhole* dapat dijelaskan dalam pernyataan berikut “*Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dimana $n > m$, maka terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati.*”

Dengan prinsip ini banyak persoalan yang bisa dipecahkan. Mulai dari persoalan yang sederhana hingga persoalan yang sedikit lebih rumit. Hal yang paling sulit adalah untuk menentukan objek-objek yang bisa diasumsikan sebagai merpati (*pigeons*) dan objek-objek mana yang diasumsikan sebagai rumah merpati (*pigeon holes*). Langkah selanjutnya adalah menggunakan Prinsip ini untuk memecahkan masalah yang ada atau untuk memperkecil kemungkinan yang ada.

Akan ada berbagai macam aplikasinya yang akan dideskripsikan dalam makalah ini. Diantaranya adalah hubungan antara Prinsip *Pigeonhole* dengan masalah sehari-hari, masalah *numerik*, masalah *geometri*, hingga contoh penggunaan Prinsip *Pigeonhole* dalam aplikasi permainan kartu. Selain menggunakan Prinsip *Pigeonhole* dalam pengaplikasiannya, maka berbagai macam teori dalam matematika diskrit juga dipakai seperti teori permutasi, kombinasi, dan kontradiksi.

Kata kunci: *Pigeonhole*, *Dirichlet*, *pigeons*, *pigeon holes*, *numerik*, *geometri*, *permutasi*, *kombinasi*, *kontradiksi*.

1. Pendahuluan

Dalam perkembangan matematika dapat dilihat bahwa kajian kombinatorial sangat menarik bagi sebagian orang. Kombinatorial sendiri adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek. Solusi yang ingin didapatkan dengan kombinatorial ini kita peroleh dengan pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunanya.

Di dalam bidang kombinatorial ini akan kita dapati sebuah prinsip yang disebut sebagai Prinsip *Pigeonhole*.

”Dalam setiap waktu di kota Bandung akan selalu ada dua orang dengan mempunyai model rambut yang sama”

Pernyataan di atas merupakan konsekuensi dari Prinsip *Pigeonhole* yang akan dideskripsikan lebih lanjut dalam makalah ini.

Prinsip *Pigeonhole* sebenarnya telah berumur cukup lama namun sampai sekarang masih dipakai dalam berbagai macam persoalan di dunia ini. Penggunaannya yang terhitung sederhana bagi sebagian besar orang merupakan kelebihan dari prinsip ini. Dimana kita bisa menggunakan prinsip ini dalam banyak aplikasi yang cukup menarik dalam kehidupan sehari-hari.

2. Deskripsi Prinsip *Pigeonhole*

Prinsip *Pigeonhole* atau Prinsip Rumah Merpati pertama kali dinyatakan oleh ahli matematika dari Jerman yang bernama Johann Peter Gustav

Lejeune Dirichlet pada tahun 1834, sehingga prinsip ini juga dikenal dengan istilah Prinsip Laci Dirichlet atau *Dirichlet's box (or drawer) principle*. Nama yang dipakai pertama kali untuk prinsip ini adalah *Schubfachprinzip* ("drawer principle" or "shelf principle"). Di Italia, nama asli prinsip dalam bahasa Italia, yaitu "principio dei cassetti" masih sering dipakai; di dalam beberapa bahasa (sebagai contoh, Rusia) prinsip ini disebut sebagai prinsip Dirichlet

Prinsip pigeon hole sebuah contoh dari argumen menghitung yang bisa diaplikasikan ke banyak masalah formal, termasuk yang mengandung himpunan tak terhingga yang tidak bisa dinyatakan dalam fungsi korespondensi satu-satu.

Salah satu contoh penggunaan dari prinsip ini adalah bahwa jika terdapat 8 mahasiswa yang akan menempati rumah dengan 7 kamar maka ada kamar yang ditempati oleh paling sedikit 2 mahasiswa. Pernyataan ini tidak menentukan kamar mana yang ditempati oleh paling sedikit 2 mahasiswa, tetapi hanya menjelaskan keberadaan dari kamar tersebut. Secara formal Prinsip Pigeonhole ini dijelaskan dalam pernyataan berikut ini.

2.1 Prinsip Pigeonhole Bentuk Pertama

Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dimana $n > m$, maka terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati.



Contoh ilustrasi 9 rumah merpati (n) dengan 7 merpati (m)

Untuk membuktikan pernyataan Prinsip Pigeonhole bentuk pertama ini, kita gunakan kontradiksi. Misalkan kesimpulan dari

pernyataan tersebut salah, sehingga setiap rumah merpati memuat paling banyak satu merpati. Karena ada m rumah merpati, maka paling banyak m merpati yang bisa dimuat. Padahal ada n merpati yang tersedia dan $n > m$, sehingga kita dapatkan sebuah kontradiksi.

Contoh 2.1.1

Pada saat pembentukan tugas kelompok Struktur Data yang dibagi menjadi dua puluh kelompok, dua puluh satu mahasiswa tidak masuk kuliah sehingga mereka belum terdaftar dalam kelompok yang sudah dibagi. Bagaimana menunjukkan bahwa paling sedikit ada dua mahasiswa yang bergabung dalam satu kelompok?

Kita asumsikan dua puluh satu mahasiswa tersebut dengan merpati dan dua puluh kelompok sebagai rumah merpati. Berdasarkan prinsip pigeonhole bentuk pertama terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati. Dengan demikian terdapat suatu kelompok yang memuat paling sedikit dua mahasiswa.

Contoh 2.1.2

Seorang ahli pembuat nama di sebuah kota terkadang dimintai tolong untuk memberi nama anak-anak yang lahir. Untuk minggu ini ia menyiapkan nama depan Yoel, Ocep, Frans sebagai nama-nama yang bagus dan nama belakang Krisnanda, Attuh Sanger, Adiguna. Pada minggu tersebut terdapat sebelas orangtua bayi yang meminta nama darinya. Bagaimana menunjukkan bahwa paling sedikit ada dua bayi yang mempunyai nama yang sama dengan asumsi bahwa ahli pembuat nama tersebut selalu memberikan nama depan dan belakang?

Terdapat sembilan kombinasi nama depan dan belakang yang mungkin untuk sebelas bayi yang lahir pada bulan tersebut. Kita asumsikan sebelas bayi tersebut dengan merpati dan sembilan nama sebagai rumah merpati. Berdasarkan prinsip pigeonhole bentuk pertama terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati. Dengan demikian terdapat kombinasi nama yang dipakai paling sedikit dua bayi. Prinsip Pigeonhole ini bisa kita nyatakan dalam bentuk lain seperti berikut ini.

2.2 Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan

terhingga Y dan $|X| > |Y|$, maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$.

Untuk membuktikan Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua ini kita bisa menggunakan Prinsip Pigeonhole Bentuk Pertama dengan mengasumsikan X sebagai himpunan merpati dan Y sebagai himpunan rumah merpati. Selanjutnya kita memasang merpati x ke rumah merpati $f(x)$. Karena jumlah merpati lebih banyak dari rumahnya, maka terdapat paling sedikit dua merpati, $x_1, x_2 \in X$ yang dipasangkan ke rumah merpati yang sama, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$.

Contoh 2.2.1

Ketua Program Studi Pendidikan Sastra Informatika akan membuat kode matakuliah untuk matakuliah-matakuliah bidang studi Sastra Informatika dengan cara menambahkan tiga angka pada huruf KTM. Terdapat 51 matakuliah yang harus diberi kode dan tiga angka yang harus ditambahkan pada huruf KTM harus berkisar antara 101 sampai dengan 200. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit dua matakuliah yang diberi kode dengan angka berurutan.

Misalkan angka-angka yang dipilih adalah a_1, a_2, \dots, a_{51} .

Jika angka-angka diatas digunakan bersama-sama dengan

$$a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_{51} + 1$$

maka terdapat 102 nomor yang merentang antara 101 sampai dengan 201. Karena ada 100 nomor yang disediakan (yaitu 101 sampai dengan 200) dan ada 102 nomor yang akan digunakan, maka menurut Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua terdapat paling sedikit dua nomor yang sama.

Nomor

a_1, a_2, \dots, a_{51} dan $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_{51} + 1$ semuanya berbeda. Sehingga kita mempunyai

$$a_i = a_j + 1$$

Dengan demikian kode a_i berurutan dengan kode a_j . Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua ini dapat dinyatakan ke dalam bentuk yang lebih umum seperti pernyataan berikut ini.

2.3 Prinsip Pigeonhole Bentuk Ketiga

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y , dimana $|X| = n$, $|Y| = m$ dan $d \ n \ m = k$, maka terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ sedemikian hingga $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k)$.

Untuk membuktikan pernyataan Prinsip Pigeonhole bentuk ketiga ini, kita gunakan kontradiksi. Misalkan $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Andaikan kesimpulan dari pernyataan tersebut salah, maka terdapat paling banyak $k - 1$ anggota $x \in X$ dengan $f(x) = y_1$; terdapat paling banyak $k - 1$ anggota $x \in X$ dengan $f(x) = y_2$, dan seterusnya sampai dengan terdapat paling banyak $k - 1$ anggota $x \in X$ dengan $f(x) = y_m$. Sehingga terdapat paling banyak $m(k - 1)$ anggota X . Namun demikian

$$m(k - 1) < m \cdot n / m = n$$

yang merupakan sebuah kontradiksi. Oleh karena itu, terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ sedemikian hingga

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k).$$

Contoh 2.3.1

Dalam matakuliah Matematika Diskrit diberikan tugas kelompok yang akan dibagi menjadi enam kelompok. Jika terdapat 62 mahasiswa yang menempuh mata kuliah tersebut, tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit ada 11 mahasiswa yang menjadi anggota suatu kelompok yang sama!

Kita asumsikan mahasiswa tersebut sebagai anggota dari himpunan daerah asal X dan kelompoknya sebagai anggota daerah kawan Y . Karena $|X| = 62$, $|Y| = 6$ dan $d \ 6 \ e = 11$. Maka berdasarkan Prinsip Pigeonhole Bentuk Ketiga, terdapat paling sedikit 11 anggota X yang dipasangkan dengan suatu anggota Y yang sama. Dengan demikian terdapat paling sedikit ada 11 mahasiswa yang menjadi anggota suatu kelompok yang sama.

Prinsip Pigeonhole mungkin tampak sangat sederhana namun penggunaannya dalam berbagai masalah bisa dianggap sebagai poin yang penting. Berikut akan diilustrasikan beberapa aplikasinya yang sangat menarik di kehidupan sehari-hari.

Kita mulainya dengan hal yang sangat sederhana yaitu Prinsip Pigeonhole dan masalah ulang tahun.

3. Prinsip Pigeonhole dan Masalah Ulang Tahun.

Kita sering mendengar bahwa orang-orang berkata bahwa dalam jumlah besar orang maka, bukanlah hal sulit untuk menemukan dua orang

yang mempunyai hari ulang tahun di bulan yang sama. Sebagai contoh, terdapat tigabelas orang yang diikutsertakan dalam survei untuk menentukan bulan ulang tahun mereka. Sebagaimana yang kita ketahui bahwa ada duabelas bulan dalam satu tahun, maka walaupun jika duabelas orang pertama berulang tahun dari bulan Januari hingga Desember, orang ketigabelas pasti berulang tahun diantara bulan Januari sampai Desember. Oleh karena itu, kita diperbolehkan menyatakan bahwa paling sedikit ada dua orang yang mempunyai hari ulang tahun di bulan yang sama.

Secara formal, kita bisa melihat masalah ini dengan cara seperti ini: Ada duabelas rumah merpati (bulan dalam setahun) dengan tigabelas merpati (tigabelas orang). Tentu saja, dengan Prinsip Pigeonhole paling sedikit akan ada rumah merpati dengan dua atau lebih merpati di dalamnya.

4. Prinsip Pigeonhole dan masalah dalam hubungan

Asumsikan bahwa fungsi 'berteman dengan' adalah simetris: Jika Yoel berteman dengan Ilona maka Ilona berteman dengan Yoel. Jika terdapat lima puluh orang dalam sebuah ruangan dan sebagian dari mereka berteman satu dengan yang lain dan sebagian lainnya tidak. Maka kita bisa menunjukkan bahwa paling sedikit pasti ada dua orang yang mempunyai jumlah teman yang sama.

Jika kita asumsikan di awal, bahwa terdapat satu orang di dalam ruangan yang tidak mempunyai teman sama sekali, maka orang-orang lainnya akan memiliki jumlah teman antara 1, 2, 3, 4, ..., 48 atau tidak mempunyai teman sama sekali.

Untuk itu kita mempunyai 49 rumah merpati yang ditandai dengan 0, 1, 2, 3, ..., 48 dan kita akan memasukkan 50 merpati ke dalamnya. Jadi, dengan prinsip Pigeonhole bisa dipastikan paling sedikit ada dua orang yang mempunyai jumlah teman yang sama.

Selanjutnya, jika setiap orang paling sedikit mempunyai satu teman, maka kita masih mendapatkan 49 rumah merpati yang ditandai 1, 2, 3, 4, ..., 49 dan memasukkan 50 merpati yang harus dibagikan.

5. Prinsip Pigeonhole dan Pembagian

Jika terdapat dua belas nilai acak, misalkan saja, 2, 4, 6, 8, 11, 15, 23, 34, 55, 67, 78 and 83. Apakah mungkin untuk memilih dua dari angka-

angka tersebut dimana selisih kedua bilangan tersebut dapat dibagi dengan 11? Bisakah kita mendapatkan jawabannya dengan Prinsip Pigeonhole?

Ada 11 sisa pembagian yang mungkin jika bilangan dibagi dengan 11 yaitu:

$$0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10.$$

Sedangkan kita mempunyai dua belas angka. Jika kita menganggap sisa pembagian sebagai rumah merpati dan bilangan-bilangan yang ada sebagai merpati, maka dengan Prinsip Pigeonhole pasti akan terdapat paling sedikit dua merpati dengan rumah merpati yang sama, atau dua bilangan yang mempunyai sisa yang sama. Tentu saja jika kedua bilangan ini mempunyai sisa bilangan yang sama maka selisih kedua bilangan ini pasti bisa dibagi dengan sebelas.

Dalam kenyataannya, pada contoh di atas ada beberapa jawaban (dua bilangan yang selisihnya bisa dibagi sebelas) yaitu: 4 & 15; 34 & 67 or 6 & 83.

6. Prinsip Pigeonhole dan Perihal Numerik

Prinsip Pigeonhole juga dapat diaplikasikan dalam memecahkan masalah-masalah perhitungan numerik. Sebagai contoh jika misalkan ada sembarang 7 bilangan real. Apakah mungkin untuk memilih secara acak dua dari tujuh bilangan tersebut (misalkan x dan y), yang

sesuai dengan pertidaksamaan $0 < \frac{x - y}{1 + xy} <$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} ?$$

Masalah ini terlihat sulit karena mungkin dibutuhkan teori kalkulus dan metode trigonometri dalam menemukan pembuktiannya. Namun, dalam kenyataan untuk menjawab pertanyaan tersebut dapat digunakan hukum trigonometri sederhana dan pengaplikasian dari Prinsip Pigeonhole.

Sebelum menjawab masalah tersebut, dapat diperhatikan bahwa jika diberikan sembarang nilai x , dapat selalu ditemukan bilangan real α

dimana $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ dan $\tan \alpha = x$.

Sebagai contoh $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$, $-1 = \tan(-\frac{\pi}{4})$.

Jadi , jika diberikan 7 bilangan yang berbeda n_1, n_2, \dots, n_7 , akan didapatkan 7 bilangan yang berbeda juga yaitu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ dimana :

$$n_1 = \tan \alpha_1, n_2 = \tan \alpha_2, \dots, n_7 = \tan \alpha_7$$

Sekarang , Interval $(-\pi, \pi)$ akan dibagi menjadi 6 interval yang sama besarnya , sehingga didapatkan sub-interval berikut :

$$\left(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi\right), \left[-\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi\right), \left[-\frac{1}{6}\pi, 0\right),$$

$$\left[0, \frac{1}{6}\pi\right), \left[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi\right) \text{ dan } \left[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right).$$

Untuk 7 bilangan yang berbeda yaitu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$, dengan Prinsip Pigeonhole dimana ada 6 interval maka akan selalu ada dua bilangan , misalkan, α_i dan α_j dimana $\alpha_i > \alpha_j$ dan α_i & α_j berada di interval yang sama Sehingga dapat disimpulkan , untuk dua nilai ini yaitu α_i dan α_j ,

$$\text{didapatkan pertidaksamaan } 0 < \alpha_i - \alpha_j < \frac{1}{6}\pi.$$

Kemudian digunakan hukum trigonometri yang umum yaitu :

$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}.$$

dimana jika $n_i = \alpha_i$ dan $n_j = \alpha_j$, maka

$$\frac{n_i - n_j}{1 + n_i n_j} = \frac{\tan \alpha_i - \tan \alpha_j}{1 + \tan \alpha_i \tan \alpha_j}$$

$$= \tan (\alpha_i - \alpha_j)$$

$$\text{Dan } 0 < \alpha_i - \alpha_j < \frac{1}{6}\pi,$$

$$\tan 0 < \tan (\alpha_i - \alpha_j) < \tan \frac{1}{6}\pi$$

$$0 < \tan (\alpha_i - \alpha_j) < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

maka,

$$0 < \frac{n_i - n_j}{1 + n_i n_j} < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

Inilah jawaban yang dicari.

Sangat jelas bahwa dengan Prinsip Pigeonhole , persoalan numerik diatas bisa dibuktikan tanpa perlu menggunakan teorema kalkulus yang sulit.

7. Prinsip Pigeonhole dan Geometri

7.1 Aplikasi pada Dartboard

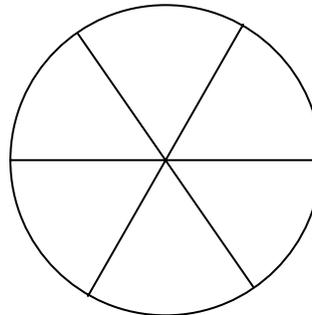
Untuk memudahkan dalam menggunakan Prinsip Pigeonhole dalam bidang Geometri maka bisa digunakan Dartboard sebagai salah satu aplikasinya. Dartboard adlah sebuah permainan yang berupa sebidang papan yang diatasnya tercantum nilai-nilai. Pemain akan melemparkan panah-panah kecil kesasaran-sasaran tertentu untuk mendapatkan poin-poin tertentu

Dengan dartboard ini bisa dikondisikan berbagai macam persoalan geometri , dengan diberikannya jumlah panah-panah kecil serta ukuran umum dan besar dari papan dart itu sendiri. Dengan berbagai macam persoalan , bagian paling sulit adalah menentukan merpati dan rumah merpati.

7.1.1 Contoh 1 :

Tujuh panah akan dilempar ke papan dart yang berbentuk lingkaran dengan radius 10 cm. Bisakah dibuktikan bahwa akan selalu ada dua panah yang mempunyai perbedaan 10 cm?

Untuk membuktikan pernyataan tersebut , pertama papan lingkaran tersebut dibagi menjadi enam bagian yang sama , seperti terlihat ;



Diasumsikan setiap sektor adalah rumah merpati dan setiap panah adalah merpati, akan didapatkan tujuh merpati untuk dimasukkan pada enam rumah merpati. Dengan Prinsip Pigeonhole , maka paling sedikit akan ada satu bagian yang mengandung minimal dua anak panah. Karena jarak paling banyak dari dua poin di dalam sector adalah 10 cm , maka pernyataan di atas bisa dibuktikan.

Kenyataannya , juga mungkin pernyataan tersebut dengan hanya menggunakan enam anak panah. Namun , kali ini papan dart dibagi menjadi lima bagian.

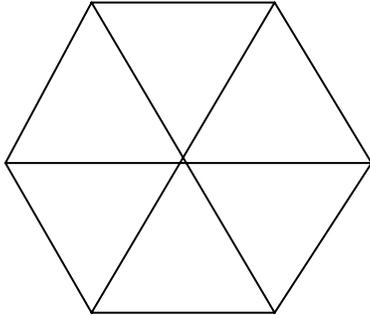
7.1.2 Contoh 2 :

Sembilan anak panah akan dilempar ke atas papan dart yang berbentuk heksagonal beraturan dengan panjang masing-masing sisinya 1 cm. Dapatkah dibuktikan bahwa akan ada dua anak

panah dengan jarak minimal $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm diantaranya

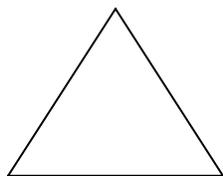
?

Kembali, dibentuk rumah merpati dengan membagi heksagonal menjadi enam segitiga sama sisi yang identik seperti ini.



Dengan menganggap enam segitiga sebagai rumah merpati dan 19 anak panah sebagai merpati, maka dengan Prinsip Pigeonhole bisa dibuktikan bahwa paling sedikit dalam satu segitiga akan ada minimal anak panah di dalamnya.

Sekarang, jika kita menggunakan asumsi terbaik dengan sebuah segitiga sama sisi dengan empat anak panah di dalamnya



Jika kita mencoba untuk menempatkan anak panah dengan jarak terjauh antar satu anak panah dengan anak panah lainnya, pertama kita akan meletakkan tiga anak panah di masing-masing sisinya. Anak panah terakhir akan diletakkan di tengah segitiga. Maka dapat dihitung bahwa jarak anatar titik pusat segitiga sama sisi dengan setiap titik sudut adalah dua pertiga dari tinggi segitiga, yaitu,

$\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm, kita dapat melihat

bahwa sangat mungkin kita akan menemukan

dua anak panah dengan jarak minimal $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

di dalam segitiga sama sisi tersebut.

7.2 Masalah Geometri Umum

Lihat masalah berikut ini :

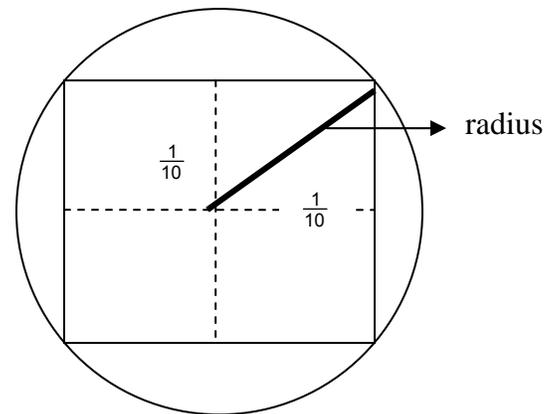
51 batu diletakkan dalam tempat yang acak, ke dalam sebuah tanah berbentuk persegi dengan panjang sisi 1 m. Bisakah dibuktikan bahwa akan ada 3 batu yang terdapat pada lahan

berbentuk lingkaran dengan radius $\frac{1}{7}$ m ?

Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita bisa membagi lahan persegi tersebut menjadi 25 persegi lebih kecil dengan panjang sisi masing-

masing $\frac{1}{5}$ m. Kemudian dengan Prinsip

Pigeonhole, akan bisa dikatakan bahwa paling sedikit akan ada satu persegi kecil (diasumsikan sebagai 'rumah merpati') yang mengandung tiga batu (diasumsikan sebagai 'merpati'). Karena jika persegi kecil ini mengandung 2 batu atau lebih sedikit maka jumlah seluruh batu akan kurang dari 50. Yang berkontradiksi dengan jumlah batu yaitu 51 buah.



Sekarang dengan persegi seperti gambar diatas dengan tiga batu di dalamnya akan mempunyai

$$\text{radius} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{100}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{50}} < \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7} \text{ m}$$

Teknik penghitungan diatas sering juga digunakan dalam menganalisis akurasi dari senjata dalam latihan menembak.

8. Aplikasi Prinsip Pigeonhole dalam Permainan Kartu

Prinsip Pigeonhole bisa diterapkan dalam berbagai permainan kartu, sebagai contoh dengan dua trik permainan kartu berikut ini.

a. Trik Kartu Kombinatorial :

Triknnya adalah sebagai berikut :

Pesulap akan menanyakan kepada salah satu pengunjung untuk memilih secara acak lima kartu dari satu dek kartu permainan. Pengunjung tidak menunjukkan kelima kartu ini pada pesulap, tapi menunjukkannya pada khalayak ramai lainnya. Pengunjung-pengunjung yang lain akan memilih empat kartu dan menunjukkannya pada sang pesulap. Maka pesulap akan dengan cepat bisa menentukan kartu kelima.

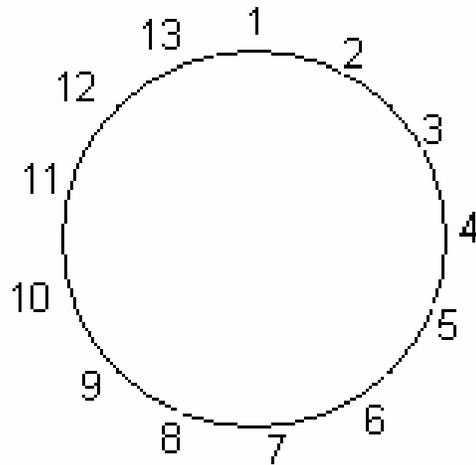
Bagaimana trik ini bekerja?

Di bawah ini adalah penjelasan dari trik kartu ini.

(1) Pertama, perhatikan bahwa di tangan pengunjung tersebut akan selalu ada dua kartu dengan lambang yang sama (Aplikasi dari Prinsip Pigeonhole). Kartu pertama yang ditunjukkan ke pesulap adalah satu dari dua kartu yang sama ini. Kartu-kartu yang lain dengan lambang yang sama – yaitu kartu misteri tersebut – yang harus ditebak oleh sang pesulap.

Lalu, pengunjung-pengunjung lainnya menunjukkan bahwa kartu yang disembunyikan tersebut mempunyai lambang yang sama dengan kartu pertama yang ditunjukkan. Sedangkan nilai dari kartu misteri tersebut akan bisa didapatkan dengan sedikit trik yaitu dengan ‘perhitungan lingkaran’ kecil yang akan dijelaskan berikut ini.

Kartu-kartu akan dinomori secara melingkar dari satu(ace) sampai 11 (jack), 12 (queen) dan 13 (king) sehingga 1 akan terurut sampai 13, himpunan bilangan ini disusun dalam urutan putaran searah jarum jam.



Sekarang, diberikan dua kartu yaitu A dan B, didefinisikan bahwa jarak (A,B) sebagai jarak sesuai arum jam diatas dari A ke B.

Dapat dilihat dengan mudah bahwa jarak dari (A,B) atau jarak (B,A) akan selalu lebih kecil atau sama dengan 6.

Maka dengan Prinsip Pigeonhole, dapat disimpulkan bahwa jika kedua kartu tersebut bernilai tujuh atau lebih, maka akan ada paling sedikit $2 \times 7 = 14$ kartu di dalam kartu standar

Contoh

Kartu: 3 dan Jack (11)

$$\text{jarak}(\text{Jack}, 3) = 5;$$

$$\text{jarak}(3, \text{Jack}) = 8$$

Kartu: Ace(1) dan 7

$$\text{jarak}(\text{Ace}, 7) = 6;$$

$$\text{jarak}(7, \text{Ace}) = 7$$

(2) Kemudian kita lakukan prosedur berikut ini :

Dari dua kartu yang mempunyai lambang yang sama tersebut, A dan B, pengunjung lainnya menunjukkan pada pesulap kartu yang mempunyai jarak antara A dan B yang kurang atau sama dengan 6.

Sebagai contoh, jika kedua kartu tersebut adalah tiga keriting dan Jack keriting, maka para pengunjung akan menunjukkan Jack daripada kartu tiga karena jarak (Jack,3) = 5 dibandingkan jarak (3,Jack) = 8. Kartu 3 keriting selanjutnya akan menjadi kartu misteri.

Contoh lain jika dua kartu yang sama tersebut adalah kartu lima dan enam hati, maka para pengunjung akan menunjukkan kartu lima karena jarak (5,6) = 1 dibandingkan jarak (6,5) = 1.

Dan akhirnya meninggalkan kartu enam hati sebagai kartu misteri.

(3) Akhirnya para pengunjung harus menyusun ketiga kartu terakhir untuk mengetahui jarak antara 1 smapi enam – yaitu jarak nilai antara kartu pertama ke kartu misteri.

Perhitungan yang cepat akan membuat pesulap dapat dengan mudah menemukan nilai dari kartu misteri tersebut. Dapat dilihat bahwa sang pesulap hanya perlu mencari dari enam kemungkinan jarak , tentu saja ini tidak menjadi masalah yang serius.

Untuk memperjelas langkah terakhir dari langkah terakhir ini , maka kita akan menomori masing-masing kartu dalam satu set kartu permainan dengan aturan berikut ini Sebagai contoh,

As Waru dapat dinomori dengan 1 (nilai tertinggi kartu),
 As hati dinomori 2,
 As keriting dinomori 3,
 As ubin dinomori 4,
 King waru 5,

.....
 Ratu waru 9,

 Jack waru 13,

 10 waru 17,

2 ubin dinomori 52 (kartu dengan rank terakhir).

Sekarang kita menuju pada tahap terakhir dari trik ini:

Contoh:

Anggap lima kartu yang dipilih adalah kartu-kartu berikut :

- (i) 3 hati (dinomori 46)
- (ii) 5 waru (dinomori 37)
- (iii) 6 keriting (dinomori 35)
- (iv) 7 hati (dinomori 30)
- (v) 2 ubin (dinomori 52)

Para pengunjung akan melihat bahwa 3 dab 7 mempunyai lambang yang sama . Karena jarak(3,7) = 4 dan jarak (7,3) = 9 , maka para

pengunjung akan memilih 3 sebagai kartu pertama yang akan ditunjukkan pada pesulap dan meninggalkan kartu 7 hati sebagai kartu misteri. Pada tahap ini pesulapa akan mengethau bahwa lambang dari kartu misteri tersebut adalah kartu hati. Langkah selanjutnya para pengunjung akan menunjukkan bahwa ia harus menambahkan nilai 4 ke angka 3 sehingga kita akan mendapatkan nilai 7 yaitu kartu misteri tersebut.

Bagaimana bisa didapatkan angka 4 ini? Secara umum kita bisa menyusun tiga kartu lainnya dalam $3! = 6$ cara. Sesuai dengan penomoran yang dijelaskan di atas maka akan disusun kartu pertama , kedua ,d an ketiga. Dalam contoh ini , 6 keriting (35) akan menjadi kartu pertama , 5 (37) waru akan menjadi kartu kedua , dan 2 ubin (52) akan menjadi kartu ketiga. Kemudian para pengunjung akan memberitahu pesulap tentang bagaimana urutan kartu tersebut disusun yang nantinya menunjukkan jumlah selisih kartu pertama dan kartu misteri. Tabel dapat dilihat dalam tabel berikut ini :

<u>Urutan 3 kartu terakhir</u>	<u>Selisih nilai kartu yang dimaksud</u>
1, 2, 3	1
1, 3, 2	2
2, 1, 3	3
2, 3, 1	4
3, 1, 2	5
3, 2, 1	6

Dalam contoh diatas para pengunjung menyusun dengan aturan seperti ini : pertama 5 waru , 2 hati , kemudian 6 keriting yaitu susunan rank 2, 3, 1 yang menghasilkan nilai 4 .

b. Trik Kartu Permutasi:

Sang Pesulap akan meminta seorang pengunjung untuk secara acak memilih 10 kartu dan menandainya mulai dari 1 sampai 10 dan meletakkannya dalam urutan menutup. Pengunjung ini tidak akan menunjukkan urutan dari kartu-kartu itu tapi akan menunjukkannya pada para penonton. Penonton akan melihat kesepuluh kartu tersebut dan membuka enam kartu dalam aturan tertentu dan memberikan nilainya pada paar penonton. Kemudian sang pesulap akan dapat menunjukan nilai dari sisa empat kartu misteri lainnya .

Bagaimana trik ini bekerja?

Pertama dengan Prinsip Pigeonhole maka kita dapat menunjukkan bahwa diantara 10 bilangan yang berbeda akan selalu ada paling sedikit empat bilangan dengan urutan naik atau urutan menurun. Angka-angka inilah yang masih disembunyikan . Sang pesulap akan tahu jika urutan kartu tersebut menaik jika para penonton membuka keenam kartu dari kiri ke kanan , sebaliknya urutan menurun akan ditunjukkan jika kartu dibuka dari kanan ke kiri.

Trik dibelakang permainan ini :

Diberikan rangkaian dari $mn+1$ bilangan real, rangkaian $(m+1)$ bilangan adalah menaik atau rangkaian $(n+1)$ bilangan adalah menurun.

Kita akan membuktikan pernyataan di atas dengan metode kontradiksi.

Anggap bahwa hasil dari pernyataan tersebut salah. Untuk setiap angka x dalam rangkaian , kiat mempunyai dua nilai (I, j) dimana i adalah selisih terpanjang dari urutan menari dari x dan j adalah jarak terpanjang urutan menurun dengan akhir angka x . Dan karena , pernyataan tersebut salah, $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq j \leq n$. Maka kita temui $mn+1$ sebagai pasangan, dimana mn dalah berbeda. . Dengan **Prinsip Pigeonhole** , dua anggota dari rangkaian , misalkan a dan b dengan 2 nilai jarak (s, t) . Kita asumsikan bahwa a sebelum b dalam rangkaian.

Jika $a < b$, maka a , bersama dengan jarak menaik paling panjang dimulai dengan b , adalah urutan menaik dengan panjang $(s+1)$, Kontradiksi dengan fakta bahwa s adalah jarak terpanjang dalam urutan menaik dimulai dari a . Maka $a \geq b$. namun kemudian , b bersama dengan rangkain terpanjang menurun berakhir dengan a mempunyai panjang $(t+1)$, kontradiksi dengan rangkaian menurun terpanjang yang berakhir di b yang mempunyai panjang t . Ini jelas berkontradiksi dengan asumsi kita jadi pernyataan tersebut pasti benar

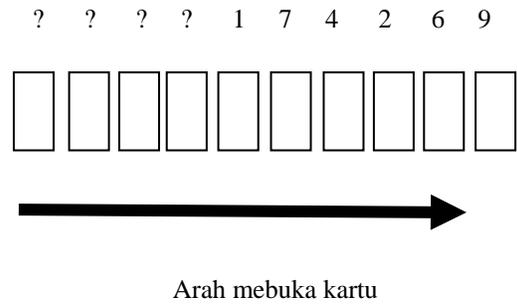
Sebagai contoh kita akan menggunakan beberapa kasus berikut

Contoh

Anggap pengunjung tersebut menandai kesepuluh kartu dengan urutan berikut (nilai ditulis dalam kartu yang terbalik dari kiri ke kanan) : 3, 5, 8, 10, 1, 7, 4, 2, 6, 9.

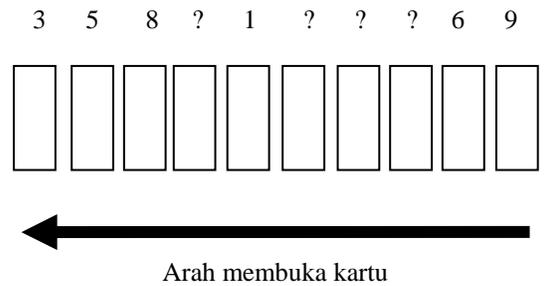
Pengunjung akan menyadari bahwa di dalam urutan tersebut ada urutan menaik yaitu 3, 5, 8, 10 dan rangkaian urutan menurun yaitu 10, 7, 4, 2.

Jika si pengunjung memutuskan untuk menggunakan urutan menaik , maka ia akan membiarkan kartu-kartu dengan urutan menaik tersebut yaitu (3,5,8,10) tidak tersentuh dan membuka enam kartu lainnya dari kiri ke kanan seperti gambar di bawah ini.



Sang pesulap akan mengetahui bahwa keempat angka yang hilang adalah 3, 5, 8 dan 10 dari arah membuka kartu yaitu dari kiri ke kanan , maka dapat disimpulkan bahwa keempat angka misteri tersebut adalah 3,5,8,10 dengan urutan menaik dari kiri.

Sebaliknya jika pengunjung memutuskan untuk menggunakan rangkaian menurun maka ia membiarkan kartu 10, 7, 4, 2 tidak tersentuh dan membalik enam kartu lainnya daroi urutan kanan seperti pada contoh dibawah ini.



Seperti pada masalah sebelumnya sang pesulap akan menyadari bahwa keempat angka yang

tidak ada adalah 2, 4, 7 dan 10 dan melalui arah membuka kartu, bisa disimpulkan bahwa keempat nilai kartu tersembunyi tersebut dari kiri kanan adalah 10, 7, 4, 2

9. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari Prinsip Pigeonhole dan aplikasinya adalah :

- Prinsip Pigeonhole adalah bagian dari kajian teori matematika kombinatorial
- Prinsip Pigeonhole atau Prinsip Rumah Merpati pertama kali dinyatakan oleh ahli matematika dari Jerman yang bernama Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet pada tahun 1834, sehingga prinsip ini juga dikenal dengan istilah Prinsip Laci Dirichlet atau Dirichlet's box (or drawer) principle.
- Prinsip Pigeonhole yang pertama dapat dinyatakan dengan pernyataan berikut : *"Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dimana $n > m$, maka terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati."*
- Prinsip Pigeonhole yang kedua dapat dinyatakan dengan pernyataan berikut : *"Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y dan $|X| > |Y|$, maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$."*
- Prinsip Pigeonhole yang pertama dapat dinyatakan dengan pernyataan berikut : *"Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y , dimana $|X| = n$, $|Y| = m$ dan $d \mid n - me = k$, maka terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ sedemikian hingga $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k)$."*
- Prinsip Pigeonhole dapat dipakai dalam berbagai macam aplikasi dan permasalahan diantaranya masalah sehari-hari, masalah numerik, masalah geometri, hingga contoh penggunaan Prinsip Pigeonhole dalam aplikasi permainan kartu
- Prinsip Pigeonhole dapat digunakan untuk memecahkan banyak masalah langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan objek-objek yang diasumsikan sebagai merpati dan objek-objek lain yang diasumsikan sebagai rumah merpati.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wikipedia, the free encyclopedia (2006) http://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle. Tanggal akses: 29 Desember 2005 pukul 10.00.
- [2] Dijkstra, Edsger "The strange case of The Pigeon - hole Principle"; <http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD09xx/EWD980.html> Tanggal akses: 29 Desember 2006 pukul 10.00.
- [3] Munir, Rinaldi. (2006). Bahan Kuliah IF2153 Kombinatorial. Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.
- [4] Alexander Bogomolny (2006). Pigeonhole problems. <http://www.cut-the-knot.org/pigeonhole/sums.shtml> akses: 29 Desember 2006 pukul 10.00.
- [5] Alexander Bogomolny (2006). Pigeonhole Principle. http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/pigeon.shtml akses: 29 Desember 2006 pukul 10.00.
- [6] Pigeonhole Principle (2006), <http://www.mathpages.com/home/kmath389.htm>. Tanggal akses: 3 Januari 2007 pukul 08:00.
- [7] Zaki, Prinsip Pigeon Hole http://zaki.web.ugm.ac.id/web/zax_files/kuliah/matematika_diskrit/Prinsip_Pigeonhole.pdf. Tanggal akses: 3 Januari 2007 pukul 08:00.