Menghitung Jumlah Graf Sederhana dengan Teorema Polya

Hafni Syaeful Sulun – NIM : 13505058

Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10, Bandung
E-mail : if15058@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Menurut R.J. Wilson dan J.J. Watkins terdapat empat buah masalah pokok dalam Teori Graf, yaitu masalah eksistensi, masalah konstruksi, masalah enumerasi, dan masalah optimasi. Makalah ini membahas salah satu dari empat masalah graf tersebut, yaitu masalah enumerasi dengan bantuan Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Makalah ini menyajikan pembuktian beserta penerapan kedua teorema tersebut pada enumerasi graf sederhana. Masalah enumerasi pada graf adalah masalah yang berhubungan dengan penghitungan atau pencacahan graf. Berapa banyak graf seperti itu? Bagaimana cara menghitungnya? Lebih khusus, masalah enumerasi yang dibahas dalam makalah ini yaitu masalah enumerasi yang berhubungan dengan penghitungan jumlah graf sedehana yang tidak isomorfis antara graf satu dengan graf lainnya.

Kata kunci*: enumerasi, graf sederhana, isomorfis, Teorema Polya, group, order.*

1. Pendahuluan

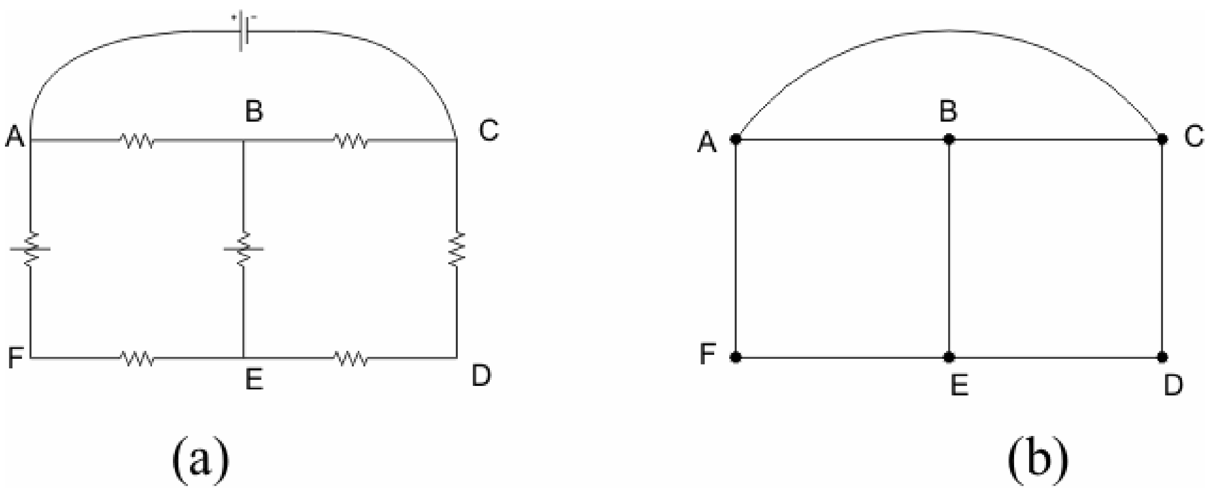
Teori graf merupakan teori yang sudah tua usianya dan memiliki banyak terapan sampai saat ini. Teori ini berkembang sangat pesat. Bahkan, dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan ilmu aljabar yang lebih dulu berkembang. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit yang digambarkan sebagai titik dan hubungan antara objek-objek tersebut yang dinyatakan sebagai garis.

[3] Secara matematis, graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *nodes*) = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ atau dapat ditulis singkat notasi $G = (V, E)$. Definisi ini menyatakan bahwa V tidak boleh kosong. Jadi, sebuah graf mungkin mempunyai satu buah sisi pun, tetapi simpulnya harus ada minimal satu buah.

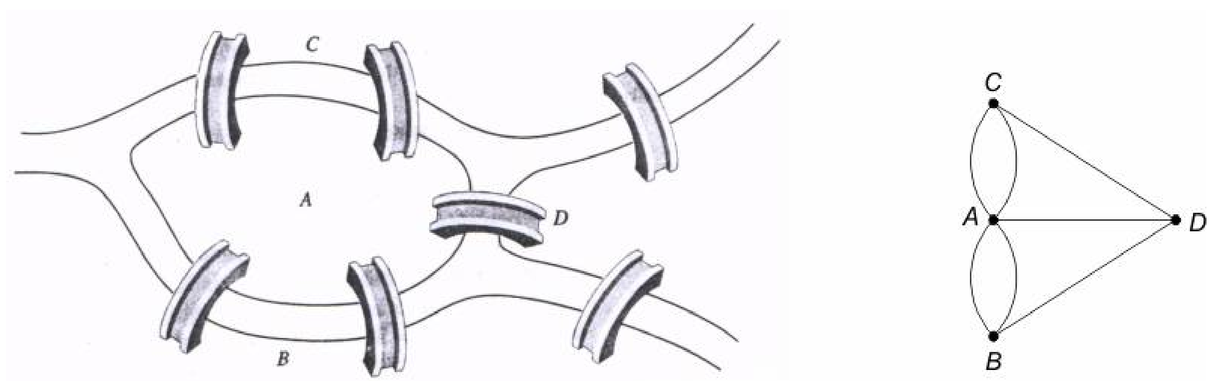
Masalah-masalah graf pasti selalu ada. Bahkan, sampai saat ini masih ada masalah yang belum terpecahkan. [3] Menurut catatan sejarah, masalah Jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). [4] Secara garis besar menurut R.J. Wilson dan J.J. Watkins ada empat masalah pokok dalam Teori Graf, yaitu:

a. Masalah eksistensi, yaitu masalah yang berhubungan dengan ada tidaknya suatu graf yang seperti ini dan atau mungkin tidaknya membangun suatu graf yang demikian.
b. Masalah konstruksi, yaitu masalah yang berhubungan dengan pembentukan atau pengadaan suatu graf. Jika suatu graf ada, apakah mungkin kita membangunnya? Bagaimana kita dapat membangunnya?
c. Masalah enumerasi, yaitu masalah yang berhubungan dengan penghitungan atau pencacahan. Berapa banyak graf seperti itu? Bagaimana cara menghitungnya?
d. Masalah optimasi, yaitu masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, terdekat, terkecil, atau paling .... Jika ada banyak kemungkinan, bagaimana kita mendapatkan yang terbaik? Manakah yang paling baik?

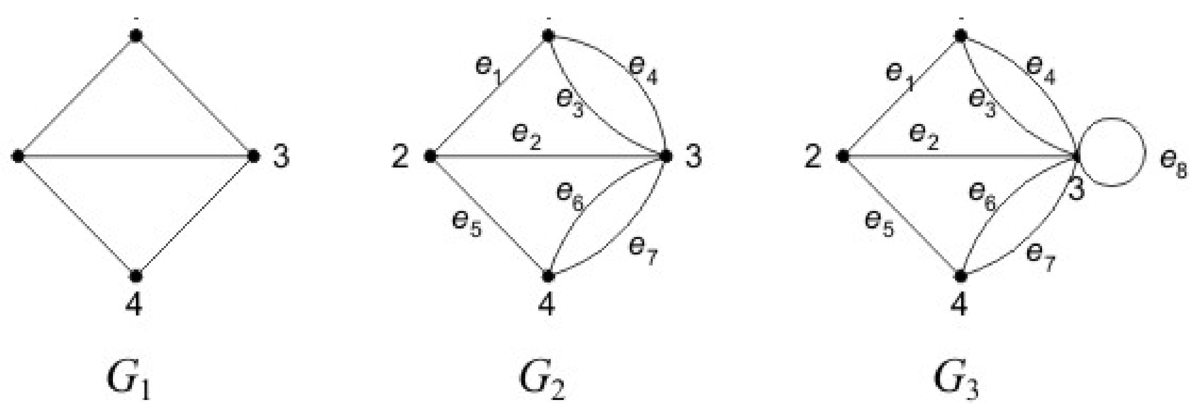
Aplikasi graf sangatlah luas. Graf dipakai di berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari untuk memodelkan persoalan. Berikut ini beberapa contoh terapan graf tersebut.



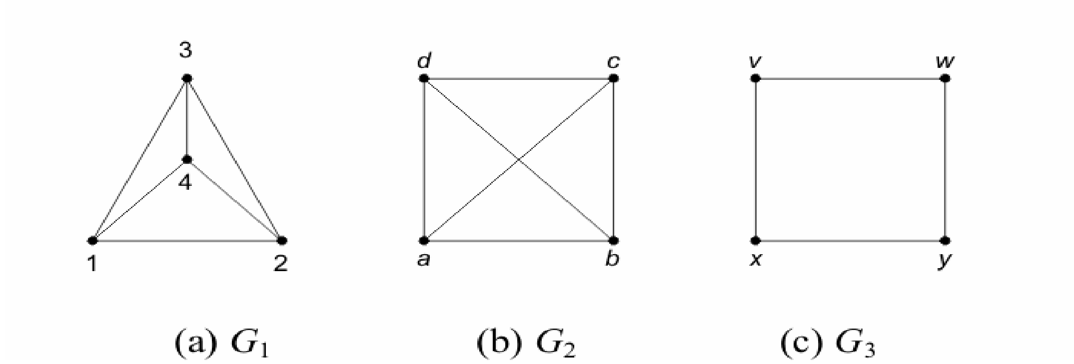
Gambar 1 (a) Rangkaian listrik, (b) graf yang menyatakan rangkaian listrik



Gambar 2 Jembatan Königsberg dan graf yang merepresentasikannya



Gambar 3 (G_1) graf sederhana, (G_2) dan (G_3) graf tak-sederhana



Gambar 4 G_1 isomorfik dengan G_2, tetapi tidak isomorfik dengan G_3.

Dalam makalah ini akan dibahas masalah enumerasi yang berhubungan dengan penghitungan banyaknya graf sedehana yang tidak isomorfis antara graf satu dengan graf lainnya. Graf sederhana adalah graf yang hanya mempunyai satu buah sisi pada setiap pasang simpulnya dan tidak mempunyai sisi yang berawal dan berakhir di simpul yang sama (*loop*). [3] Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi *e* bersisian denga simpul *u* dan *v* di G_1, maka sisi *e*' yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan simpul *u*' dan *v*' di G_2.

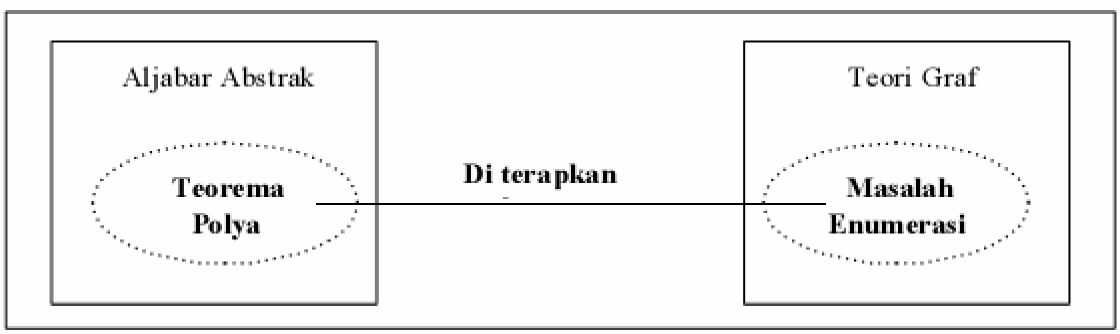
bidang kombinatorial. Sesuai dengan namanya, teori ini ditemukan oleh George Polya (1887-1985), seorang ahli berkebangsaan Hungaria yang berimigrasi ke Amerika Serikat pada tahun 1940 [2]. Sebagian besar kontribusinya adalah untuk pekerjaannya dalam pemecahan masalah.

2. Definisi dan Teorema Aljabar yang Mendukung Teorema Polya

Berikut ini beberapa definisi dan teorema yang mendukung Teorema Polya [4].

Definisi 2.1

Himpunan $G \neq \varnothing$ dengan operasi $\circ$ yang didefinisikan padanya disebut *group* (G, o) bila



Gambar 5 Garis besar konsep makalah

Pada dasarnya makalah ini merupakan penggabungan dua bidang ilmu, yaitu antara bidang aljabar (abstrak) dan bidang Teori Graf, artinya aljabar abstrak melalui Teorema Polya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi graf sederhana.

Untuk menyelesaikan masalah tersebut, kita menggunakan salah satu teori enumerasi yaitu Teori Polya. [1] Teori ini merupakan teori dalam

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), ..., w(y_r)) = \sum_{n_1+n_2+...+n_r=n} K(n_1, n_2, ..., n_r)[w(y_1)]^{n1}[w(y_2)]^{n2}...[w(y_r)]^{nr}.$$

empat sifat di bawah ini dipenuhi.

a. Setiap *x*, *y* anggota *G*, $x \circ y$ anggota *G* (sifat tertutup terhadap operasi $\circ$).
b. Ada *e* anggota *G*, $x \circ e = e \circ x = x$, setiap *x* anggota *G* (ada elemen identitas *e*).
c. Setiap *x* anggota *G* dan ada x^{-1} anggota *G* sehingga $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ (ada elemen invers).

d. Setiap x, y, z anggota G, $x \bigcirc (y \bigcirc z) = (x \bigcirc y) \bigcirc z$ (sifat asosiatif).

Himpunan H (himpunan bagian dari G) disebut *group* bagian (G, o) jika (H, o) adalah *group* juga.

Definisi 2.2

Misalkan X adalah himpunan berhingga dengan jumlah anggotanya n. Kelompok simetri himpunan berhingga S_n adalah kumpulan semua permutasi dari himpunan X.

Definisi 2.3

Apabila G adalah *group* bagian dari *group* simetri Sn dan untuk x anggota X, maka:

a. $Gx \equiv \{g(x) : g \in G\}$, yaitu himpunan semua bayangan elemen x anggota X oleh permutasi di G. Gx sering disebut juga orbit x terhadap G.
b. $Gx \equiv \{g \in G : g(x) = x\}$, yaitu himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap. Himpunan G_x disebut sebagai penstabil x di G.
c. $F(g) \equiv \{z \in X : g(z) = z\}$, yaitu himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi g anggota G. Himpunan $F(g)$ disebut sebagai karakter permutasi g di himpunan X.

Definisi 2.4

Group G disebut *group* berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam *group G* disebut *order G* dan disimbolkan $|G|$.

Definisi 2.5

Jika H adalah *group* bagian dari *group G* dan g adalah anggota G, maka $gH = \{gh : h \in G\}$ disebut koset kiri H terhadap g dan $Hg = \{hg : h \in G\}$ disebut koset kanan H terhadap g.

Definisi 2.6

Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan) H yang berbeda dari *group G* akan membentuk partisi *group G*, yaitu:

a. Setiap anggota G akan berada pada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan) H.
b. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.

Kumpulan yang mempunyai sifat seperti ini disebut kelas.

Teorema 2.1

Jika H adalah *group* bagian dari *group G* dan $|H| = k$, maka setiap koset kiri (kanan) H memiliki kardinalitas k.

Teorema 2.2 (Lagrange)

Order group berhingga dapat dibagi oleh *order* sebarang *group* bagiannya.

Teorema 2.3

Apabila himpunan berhingga X memiliki k orbit terhadap *group G* yang beda, maka berlaku:

a. Setiap x anggota X, $|G_x|.|G_x| = |G|$ (Teorema Orbit-Penstabil)
b. $\sum_{x \in X} |G_x| = k|G|$
c. $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

Untuk membuktikan teorema ini dapat menggunakan definisi dan teorema sebelumnya.

Teorema 2.4 (Burnside-Frobenius)

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = k|G|$$

Definisi 2.7

Diberikan penyajian untai (*cycle*) dari f (permutasi suatu himpunan dengan jumlah anggotanya n) yang memuat sebanyak a_1 untai dengan panjang 1, sebanyak a_2 untai dengan panjang 2, sebanyak a_3 untai dengan panjang 3, ..., sebanyak a_i untai dengan panjang i dan $i = 1, 2, 3, 4, ..., n$, maka tipe untai f disimbolkan dengan vektor $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$ dan bobot f adalah bilangan bulat positif $W = 1^{a1}2^{a2}3^{a3}...n^{an}$.

Contoh :
$X = \{1, 2, 3, ..., 8\}$
$f = (1354)(2)(687)$
Dalam hal ini $a_1 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, dan lainnya nol. Jadi, tipe untai $f = [10110000]$ dan bobot $f = 1^1 3^1 4^1$.

Definisi 2.8

Diberikan G adalah *group* permutasi dengan *order m* dari suatu himpunan yang jumlah anggotanya n dan g anggota G bertipe untai $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$. Indeks siklik g didefinisikan sebagai $Z(g; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \equiv x_1^{a1} x_2^{a2} x_3^{a3} ... x_n^{an}$ dan indeks siklik *group G* didefinisikan sebagai

$$Z(G; x_1,x_2,x_3,...,x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1,x_2,x_3,...,x_n).$$

Definisi 2.9

Fungsi f dari himpunan berhingga X ke himpunan berhingga Y disebut pewarnaan X. Himpunan berhingga Y disebut warna, sedangkan himpunan semua pewarnaan X terhadap warna Y disebut himpunan C. Dua pewarnaan f, g anggota C disebut tak dapat dibedakan terhadap *group* G yang beraksi pada X jika ada π anggota G sehingga $f(x) = g(\pi(x))$ untuk setiap x anggota X. Jelas bahwa relasi tak dapat dibedakan merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan.

Definisi 2.10
Kelas-kelas kongruensi dalam himpunan C dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di C terhadap *group* G.

Teorema 2.5
Diberikan

$$C = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$$

dan X, Y adalah himpunan berhingga.
Diketahui juga bahwa G adalah *group* permutasi yang beraksi pada X. Untuk setiap π anggota G didefinisikan pemetaan

$$\pi'(f(x)) = f(\pi(x))$$

untuk setiap x anggota X dan setiap f anggota C, maka berlaku:
a. π' adalah permutasi di C.
b. $G' = \{\pi' : \pi \text{ anggota } G\}$ adalah *group*.

Teorema 2.6
Jika Y memuat paling sedikit dua anggota, maka pemetaan dari G ke G' yang didefinisikan dengan $\phi : \pi \rightarrow \pi'$ adalah isomorfisme (*group*).

Definisi 2.11
Fungsi bobot w memetakan Y ke himpunan r $\{w(y1), w(y2), w(y3), ..., w(yr)\}$. Persediaan pola C terhadap *group* G adalah:
$K(n_1, n_2, n_3, ..., n_r)$ adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan (banyak pola) yang dapat dibedakan sehingga warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 anggota, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 anggota, ..., dan $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r anggota.

Teorema 2.7
Misalkan G adalah *group* permutasi yang beraksi pada himpunan $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ dan C adalah himpunan semua fungsi dari X ke $Y = \{y_1$ $y_2, y_3, ..., y_r\}$. Jika $w(y)$ adalah fungsi bobot pada Y dan didefinisikan $\omega(f)$ anggota C dengan bentuk $\omega(f) = [w(f(x_1))]\ [w(f(x_2))]\ ...\ [w(f(x_n))]$ maka:
a. Jika f, ϕ anggota C mempunyai sifat tak dapat dibedakan terhadap G, maka $\omega(f) = \omega(\phi)$.
b. Jika pola-pola yang berbeda di C dinyatakan dengan $C_1, C_2, C_3, ..., Ck$; $\omega(Ci)$ adalah nilai konstan atas C_i dengan $i = 1, 2, 3, ..., k$; maka pola persediaan C dapat dinyatakan sebagai
$PP(G; w(y_1), (w(y_2), ..., w(y_r)) = \sum ù\ (C_i)$

Teorema 2.8 (Burnside-Frobenius dengan bobot)
Jika $X1, X2, X3, ..., Xk$ adalah orbit yang berbeda dalam himpunan $X = \{x1, x2, x3, ..., xn\}$ terhadap permutasi $G = \{g1, g2, g3, ..., gm\}$ kemudian pada X didefinisikan fungsi bobot $\omega(x)$ yang merupakan simbol abstrak dengan sifat bila xr dan xs berada pada orbit yang sama, maka $\omega(xr) = \omega(xs)$ dan terdapatlah fungsi bobot pada G, yaitu $W(gi) = \sum ù\ (x)$.

3. Teorema Polya dan Pembuktiannya
Beberapa definisi dan teorema yang telah dibahas di atas akan digunakan di bagian ini untuk pembuktian Teorema Polya. [4] Ada dua Teorema Polya yaitu Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Teorema Polya II sering juga disebut sebagai Teorema Polya yang diperluas. Pembuktian kedua Teorema Polya ini mengikuti Balakrishnan yang akan dibahas pada bagian ini.

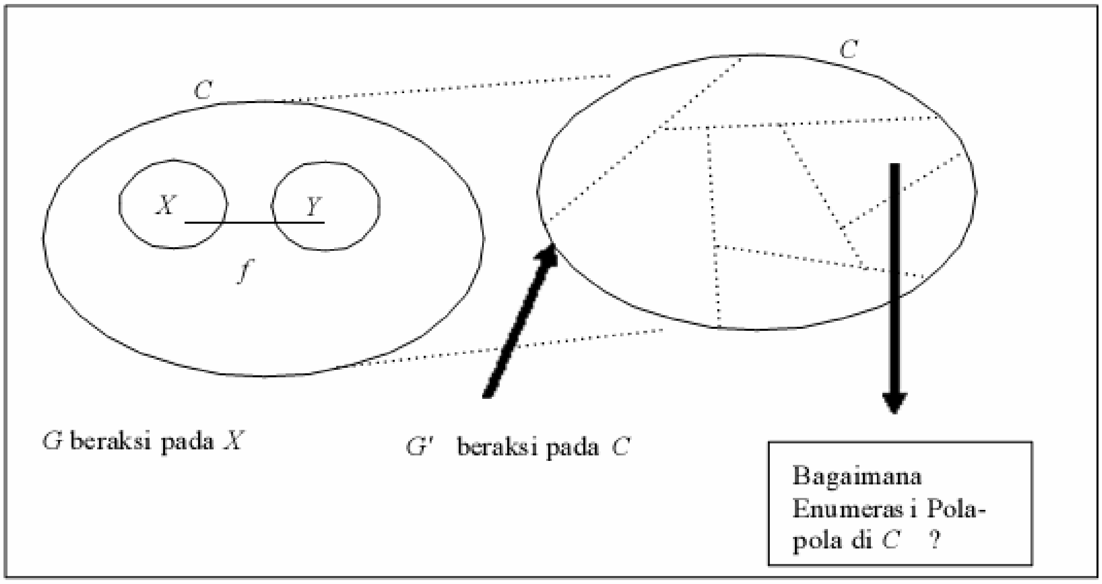
Teorema 3.1 (Polya I)
Diberikan $C = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$ dengan $X = n \geq 2$ dan $Y = r$. Jika G merupakan *group* permutasi yang beraksi pada X dengan indeks siklik $Z(G; x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G; r, r, r, ..., r)$.

Bukti
Pola-pola di C terhadap *group* G (yang beraksi pada himpunan X) adalah orbit yang berbeda di C terhadap G. Ini diturunkan dari isomorfisme *group* (Teorema 2.6) akan menghasilkan orbit-orbit di C terhadap G' (*group* permutasi pada C), sedangkan banyaknya pola yang terjadi di C terhadap C' diberikan oleh Teorema 2.4 (Teorema Burnside-Frobenius), yaitu:

$$k = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi' \in G'} |F(\pi')| \qquad \text{... (i)}$$

dengan $F(\pi') = \{f \in C : \pi'(f) = f\}$.

Karena $\pi'(f) = f$ jika dan hanya jika $f(\pi(x)) = f(x)$ untuk setiap x anggota X dan karena $G = G'$ sebagai akibat Teorema 2.6, maka bentuk (i)



Gambar 6 Konsep dasar Teorema Polya I

yang memuat himpunan C dan *group* G' dapat dibawa kepada bentuk himpunan X dan *group* G yang beraksi padanya, yaitu:

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |f \in C : f(\pi(x)) = f(x) \text{ untuk setiap } x \text{ anggota } X| \quad \text{... (ii)}$$

Jika $f(\pi(x)) = f(x)$ dan jika $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \ldots\ x_j)$ adalah satu untai suatu permutasi $\pi \in G$, maka $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \ldots = f(x_j)$. Dengan kata lain, f mempunyai nilai konstan untuk setiap untai π dan jika $(x\ x_t\ \ldots\ x_w)$ adalah untai yang memuat sebarang $x \in X$, maka $f(\pi(x)) = f(x_t) = f(x_w)$.

Jadi, jumlah sisi kanan dari persamaan (ii) hanyalah banyaknya cara pewarnaan X dengan $r \geq 2$ warna, sehingga elemen-elemen dalam untai yang sama dari permutasi π akan diberi warna yang sama. Jika π bertipe $[a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \ldots\ a_n]$, maka banyaknya cara pewarnaannya adalah $r^{a1+a2+a3+\ldots+an}$ sehingga (ii) menjadi:

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a1+a2+a3+\ldots+an} \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a1}\, r^{a2}\, r^{a3} \cdots r^{an}$$

$$k \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z(\pi; r, r, r, \ldots, r) = Z(G; r, r, r, \ldots., r)$$

Teorema 3.2 (Polya II)
Persediaan pola warna,

$$PP(G; w(y_1), (y_2), (y_3), \ldots, (y_r))$$

merupakan indeks siklik dari $Z(G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ pada $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \ldots + [w(y_r)]^i$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Bukti
Penurunan rumus untuk Teorema Polya II menggunakan Teorema Burnside-Frobenius juga dan hampir sama dengan Teorema Polya I. Pada intinya fungsi bobot $\omega(f)$ memiliki sifat konstan yang diperlukan oleh Teorema 2.4 (Burnside-Frobenius) untuk orbit-orbit C terhadap permutasi dari *group* G'.

di mana $W(\pi') = \sum ù(f)$ ... (iii)

Dari bentuk C dan G' dikembalikan ke bentuk X dan G, maka:

$$PP \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{\substack{f \in C : f(\pi(x)) = f(x) \\ \forall x}} [w(f(x_1))][w(f(x_2))][w(f(x_3))] \ldots [w(f(x_n))] \quad \text{... (iv)}$$

Hasil penjumlahan pada persamaan (iv) dapat diambil atas seluruh fungsi $f(x)$ yang konstan atas setiap untai π. Misalkan π bertipe $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ dan didefinisikan multinomial $w(y_i)$ sebagai berikut:

$$\Omega = \overbrace{\left[w(y_1) + w(y_2) + \ldots + w(y_r)\right] \ldots \left[w(y_1) + w(y_2) + \ldots + w(y_r)\right]}^{a_1 \ \text{faktor}}.$$

$$\overbrace{\left[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \ldots + w(y_r)^2\right] \ldots \left[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \ldots + w(y_r)^2\right]}^{a_2 \ \text{faktor}}$$

$$\overbrace{\left[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \ldots + w(y_r)^n\right] \ldots \left[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \ldots + w(y_r)^n\right]}^{a_n \ \text{faktor}}.$$

$$\vdots$$

$$\overbrace{\left[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \ldots w(y_r)^3\right] \ldots \left[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \ldots + w(y_r)^3\right]}^{a_3 \ \text{faktor}}$$

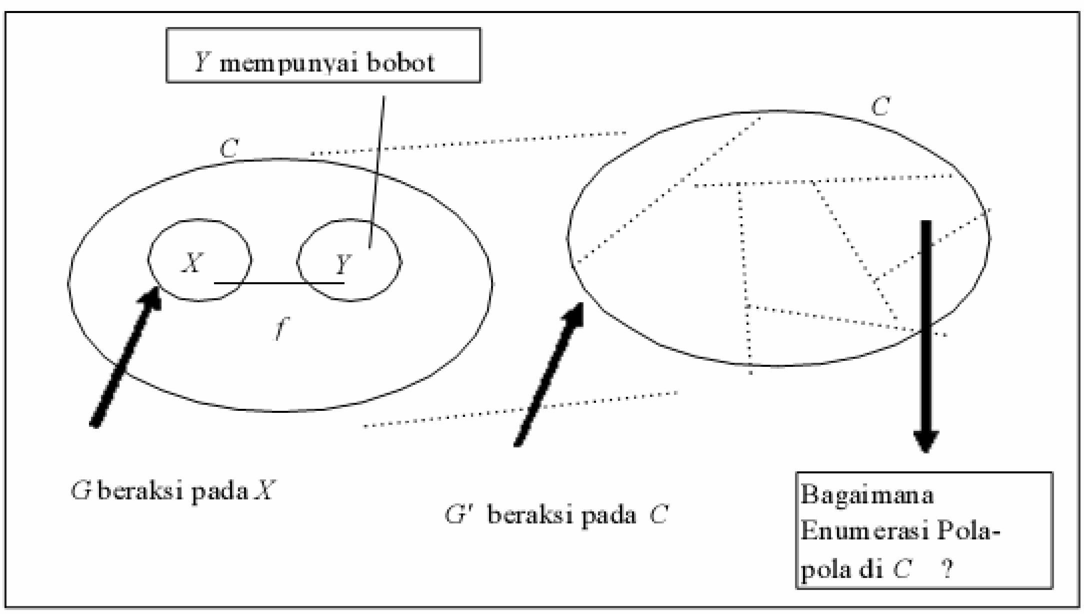
Ekspansi Ω memuat $r^{a1+a2+a3+\ldots+an}$ bentuk yang jumlahnya juga merupakan fungsi $f(x)$ yang konstan atas setiap untai π. Sekarang dapat ditunjukkan bahwa bentuk-bentuk individu dalam ekspansi tersebut sama dengan bobot ω dari fungsi individu $f(x)$. Andaikan bahwa untai dalam penyajian π mempunyai korespondensi satu-satu dengan faktor-faktor dari Ω dengan cara yang biasa: untai dengan panjang 1 berkorespondensi satu-satu dengan a_1 faktor pertama, untai dengan panjang 2 dengan a_2 faktor kedua, dan seterusnya.

Jika $f(x)$ memetakan untai dengan panjang j yang diketahui (sebut saja himpunan T) di dalam y_v, maka $w(y_v)^j = \Pi\, w(f(x))$. Bentuk ekspansi seluruhnya diberikan dengan perkalian semua untai yang akan sama dengan Π Π $w(f(x))$ di mana U adalah semua untai π. Namun, untai-untai ini mempunyai pengaruh pada partisi di X sehingga ekspansi hanya Π $w(f(x))$ = ù(f).

Akhirnya telah dibuktikan bahwa seluruh hasil penjumlahan pada persamaan (iv) mempunyai nilai yang sama dengan Ω, tetapi jelas terlihat bahwa:

$$\Omega = Z(\pi; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

dengan



Gambar 7 Konsep dasar Teorema Polya I

$x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \ldots + [w(y_r)]^i$ untuk $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

4. Aplikasi pada Graf Sederhana

Apabila n titik pada graf G dikenai permutasi, maka $n(n\text{-}1)/2$ pasangan titik tak berurut (tanpa memerhatikan urutan, artinya $ij = ji$) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan titik tak berurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai garis yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut.

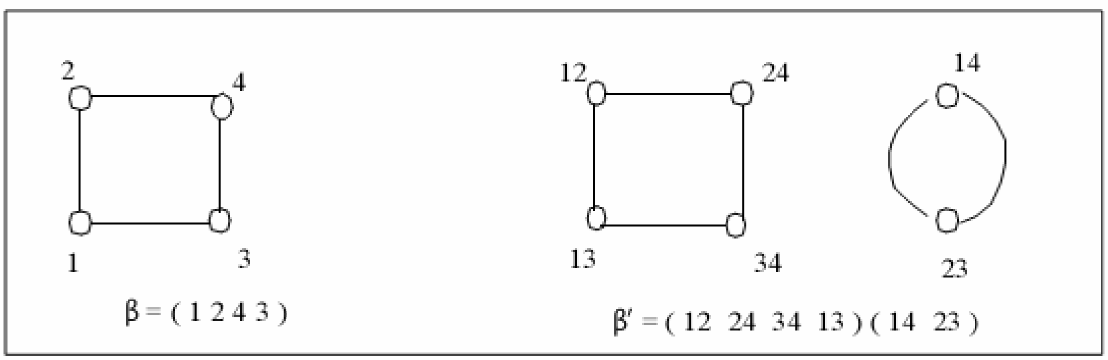
Sebagai contoh konkrit diberikan himpunan titik X = {1, 2, 3, 4} yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan n = 4 buah. Seluruh kemungkinan garis tak berarah yang ada pada empat titik tersebut adalah (4)(3)/2 = 6 buah. Suatu permutasi β = (1 2 4 3) pada himpunan titik tersebut akan membangkitkan permutasi enam elemen tak berurut sebagai berikut:

$$\hat{a} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$$

akan membangkitkan

$$\hat{a}' = \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 24 & 21 & 23 & 41 & 43 & 13 \end{matrix}$$

Gambaran konkritnya adalah seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 8 Permutasi β dan permutasi β' yang dibangkitkan oleh β

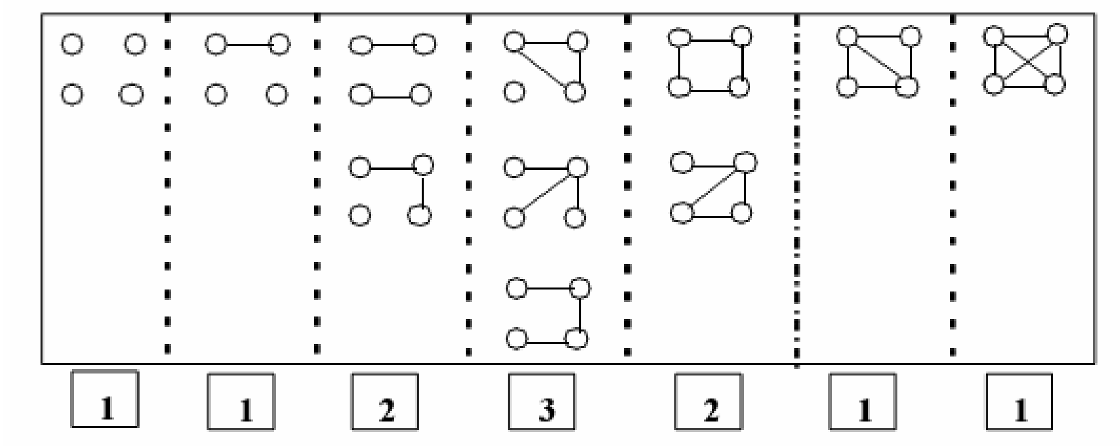
Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu graf membentuk *group* simetri penuh (sebut saja S_n), maka permutasi dari pasangan titik (garis) itu juga membentuk *group* simetri (sebut saja R_n). Jadi, *group* S_n (permutasi titik pada graf) akan membangkitkan *group* R_n (permutasi garis pada graf). Seluruh bentuk *group* S_4 ada 24 buah, yaitu:

g_1 = (1)(2)(3)(4)
g_2 = (14)(2)(3)
g_3 = (1)(24)(3)
g_4 = (1)(2)(34)
g_5 = (12)(3)(4)
g_6 = (124)(3)
g_7 = (142)(3)
g_8 = (12)(34)
g_9 = (13)(2)(4)
g_{10} = (143)(2)
g_{11} = (134)(2)
g_{12} = (13)(24)
g_{13} = (1)(23)(4)
g_{14} = (14)(23)
g_{15} = (1)(234)
g_{16} = (1)(243)
g_{17} = (123)(4)
g_{18} = (1423)
g_{19} =(1243)
g_{20} = (1234)
g_{21} = (132)(4)
g_{22} = (1432)
g_{23} = (1342)
g_{24} = (1324)

Tipe untai dari S_4 ada 5 buah, yaitu:

a. Bentuk [4, 0, 0, 0] ada 1 buah dan indeks sikliknya x_1^4.
b. Bentuk [2, 1, 0, 0] ada 6 buah dan indeks sikliknya $x_1^2x_2$.
c. Bentuk [1, 0, 1, 0] ada 8 buah dan indeks sikliknya x_1x_3.
d. Bentuk [0, 2, 0, 0] ada 3 buah dan indeks sikliknya x_2^2.
e. Bentuk [0, 0, 0, 6] ada 6 buah dan indeks sikliknya x_4.

Seperti pada gambar 3, indeks siklik x_4 pada *group* S_4 akan membangkitkan indeks siklik x_2x_4 pada *group* R_4. Oleh karena itu, indeks siklik $x_1^2x_2$ pada S_4 akan membangkitkan indeks siklik $x_1^2x_2^2$. Contoh konkritnya pada permutasi α = (1)(24)(3) pada S_4, perubahannya adalah sebagai berikut.



Gambar 9 Graf terdiri dari n = 4 titik dan kelas-kelas kongruensinya

$$\hat{a} = \begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 4\ 3\ 2 \end{matrix}$$

akan membangkitkan

$$\hat{a}' = \begin{matrix} 12\ 13\ 14\ 23\ 24\ 34 \\ 14\ 13\ 12\ 43\ 42\ 32 \end{matrix}$$

α' = (12 14)(23 34)(24)(13) yang bertipe $x_1^2 x_2^2$.

Keseluruhan perubahan indeks siklik dari *group* S_4 menjadi indeks siklik R_4 adalah

$x_1 4 \rightarrow x_1 6$,
$x_1 2 x_2 \rightarrow x_1 2 x_2 2$,
$x_1 x_3 \rightarrow x_3 2$,
$x_2 2 \rightarrow x_1 2 x_2 2$,
$x_4 \rightarrow x_2 x_4$;

sedangkan banyaknya setiap jenis tidak mengalami perubahan. Dari definisi 2.8, maka didapat:

$$Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 6x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2 x_4\right] \quad \text{... (v)}$$

Aplikasi Teorema Polya I

Ada dua keadaan untuk himpunan Y, yaitu adanya garis pada pasangan titik dan tidak adanya garis pada pasangan titik sehingga r = 2. Dari persamaan (v) ambillah $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ = r = 2, maka didapat: untuk graf yang memuat 4 titik, maka akan

$$Z(R_4; 2,2,2,2) = \frac{1}{24}\left[2^6 + 6.2^2.2^2 + 8.2^2 + 3.2^2.2^2 + 6.2.2\right] = 11 \text{ atau}$$

terdapat 11 graf yang tidak isomorfis.

Aplikasi Teorema Polya II

Ambil dua bobot pada himpunan Y, yaitu $w(y_1)$ = tak ada garis = T dan $w(y_2)$ = ada garis = A kemudian substitusikan $x_1 = T + A$, $x_2 = T^2 + A^2$, $x_3 = T^3 + A^3$, dan $x_4 = T^4 + A^4$ pada persamaan (v)

$$Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}[(T+A)^6 + 9(T+A)^2(T^2+A^2)^2 + 8(T^3+A^3)^2 + 6(T^2+A^2)(T^4+A^4)] \text{ atau}$$

$$Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{1}T^6 + \mathbf{1}T^5 A + \mathbf{2}T^4 A^2 + \mathbf{3}T^3 A^3 + \mathbf{2}T^2 A^4 + \mathbf{1}TA^5 + \mathbf{1}A^6.$$

sehingga didapat:

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri dari 4 titik akan ada sebanyak 1 graf yang tanpa garis, akan ada sebanyak 1 graf dengan 1 garis, akan ada sebanyak 2 graf dengan 2 garis, akan ada sebanyak 3 graf dengan 3 garis, akan ada sebanyak 2 graf dengan 4 garis, akan ada sebanyak 1 graf dengan 5 garis, dan akan ada sebanyak 1 graf dengan 6 garis.

5. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan makalah ini yaitu sebagai berikut.

a. Dalam makalah ini kita telah menggunakan Teorema Polya untuk menghitung jumlah graf sederhana yang tidak isomorfis yang dimulai dengan membangkitkan *group* permutasi titik terlebih dahulu.

b. Graf sederhana adalah graf yang hanya mempunyai satu buah sisi pada setiap pasang simpulnya dan tidak mempunyai sisi yang berawal dan berakhir di simpul yang sama (*loop*).

c. Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian denga simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan simpul u' dan v' di G_2.
d. Dalam makalah ini dibahas pembuktian dan penerapan Teorema Polya I dan Teorema Polya II.
e. Teorema Polya I digunakan untuk menghitung jumlah graf sederhana yang mengandung n buah titik dan tidak isomorfis antara satu graf dengan graf lainnya.
f. Teorema Polya II digunakan untuk menghitung jumlah graf sederhana yang mengandung n buah titik dan k buah sisi serta tidak isomorfis antara satu graf dengan graf lainnya.

6. Daftar Pustaka

[1] Anonim. *Pólya Enumeration Theorem*. http://en.wikipedia.org/wiki/Pólya_enumeration_theorem. Diakses pada tanggal 2 Januari 2007 pukul 10.10 WIB.

[2] Motter, A. *George Polya (1887-1985)*. http://www.math.wichita.edu. Diakses pada tanggal 2 Januari 2007 pukul 10.00 WIB.

[3] Munir, Rinaldi. 2006. *Diktat Kuliah IF2153 Matematika Diskrit Edisi Keempat*. Bandung: Program Studi Teknik Informatika Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung.

[4] Santosa, R. Gunawan. 2003. *Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana*. http://www.ukdw.ac.id. Diakses pada tanggal 2 Januari 2007 pukul 9.40 WIB.