

HUBUNGAN ANTARA GRAF DAN TRIANGULASI

Desi Hadiati – NIM : 13505007

Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10, Bandung
Email : if15007@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas tentang graf dan triangulasi. Graf adalah salah satu topik yang dibahas dalam mata kuliah IF2153 Matematika Diskrit. Graf dan triangulasi memiliki keterkaitan yang cukup erat, mengingat sebuah triangulasi akan menghasilkan sebuah graf, dan graf sendiri dapat ditriangulasikan. Graf dan triangulasi merupakan bahasan dalam bidang geometri matematika tetapi graf dan triangulasi memiliki banyak terapan dalam berbagai bidang.

Graf banyak digunakan dalam bidang komputer, yaitu untuk transaksi konkuren pada basis data terpusat, serta untuk pengujian program. Dalam bidang kimia, graf diterapkan untuk memodelkan isomer senyawa kimia karbon. Triangulasi banyak diterapkan dalam perhubungan serta komunikasi. Metode triangulasi digunakan untuk menentukan posisi pesawat terbang, maupun kapal laut, serta telepon genggam, melalui sistem GPS. Pemahaman lebih lanjut tentang graf dan triangulasi dirasakan penting mengingat banyaknya terapan dua hal tersebut dalam berbagai disiplin ilmu.

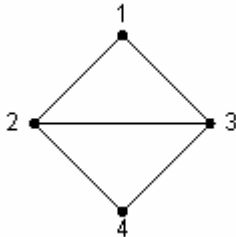
Kata kunci :

Graf, triangulasi, geometri

1. Pendahuluan

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai sebuah pasangan himpunan simpul (V) dan himpunan sisi (E). Himpunan simpul tidak boleh kosong, sedangkan himpunan sisi boleh kosong, dimana graf hanya memiliki sebuah simpul.

Secara geometri, graf dapat digambarkan sebagai berikut :



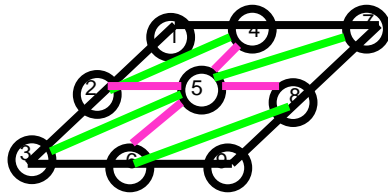
Gambar 1 Sebuah graf sederhana

Triangulasi berasal dari kata *triangle* yang berarti segitiga. Secara sederhana, triangulasi adalah sebuah graf planar yang berbentuk segitiga. Dalam istilah trigonometri atau geometri dasar, triangulasi adalah sebuah proses untuk menemukan koordinat dan jarak ke sebuah titik dengan menghitung panjang salah satu sisi sebuah segitiga, besar sudutnya yang diketahui dan sisi segitiga tersebut yang dibentuk dari sebuah titik dan dua titik lain yang telah diketahui letaknya, dengan menggunakan hukum sinus. Triangulasi banyak diterapkan guna menentukan posisi sebuah pesawat, kapal serta telepon genggam.

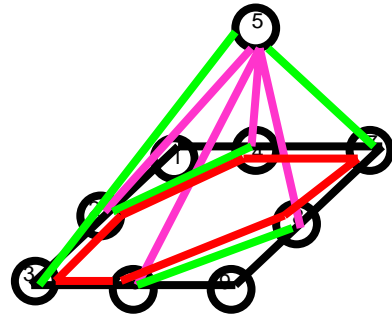
2. Graf Triangulasi

Sebuah graf dapat ditriangulasikan jika ia tidak mempunyai tali busur lebih dari tiga buah. Untuk mentriangulasikan sebuah graf, setiap daun x_i dalam urutan π , pastikan semua tetangga dari x_i membentuk sebuah

keterhubungan dengan menambahkan sisi pada graf tersebut, lalu buang x_i .

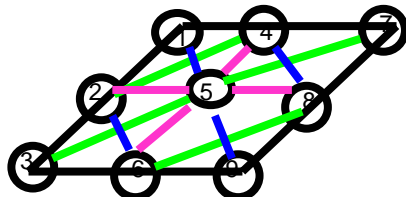


Gambar 2 Graf belum tertriangulasi

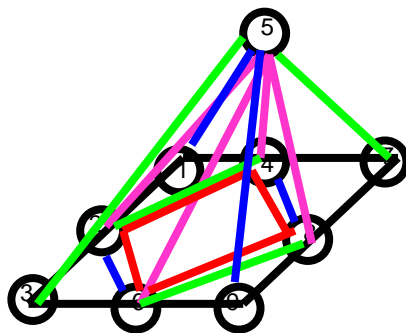


Gambar 3 Graf tanpa tali busur dengan enam buah sirkuit

Triangulasi bukan hanya menambahkan segitiga pada graf.

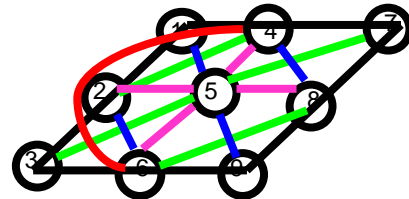


Gambar 4 Graf masih belum tertriangulasi



Gambar 5 Graf tanpa tali busur dengan empat buah sirkuit

Triangulasi membuat sebuah keterhubungan yang besar antara simpul-simpulnya.



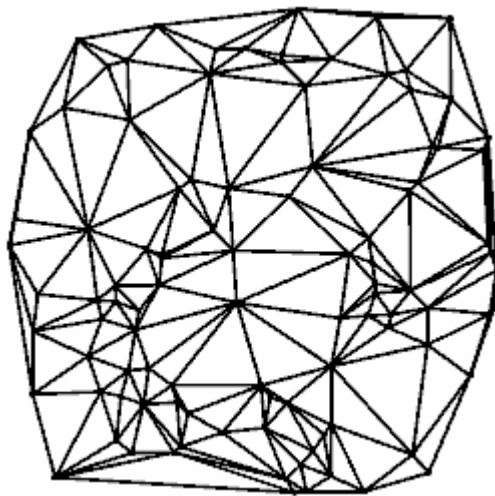
Gambar 6 Graf tertriangulasi

3. Triangulasi Delaunay

Triangulasi Delaunay dari sebuah himpunan simpul adalah sebuah triangulasi dari himpunan simpul dengan ketentuan tidak ada simpul dalam himpunan simpul tersebut yang jatuh pada wilayah siklus yang melalui tiga simpul sekaligus dari segitiga dalam triangulasi[1].

Dalam matematika dan geometri komputasi, triangulasi Delaunay, atau triangulasi Delone, untuk himpunan titik pada bidang P adalah sebuah triangulasi $DT(P)$ sedemikian sehingga tidak ada titik dari P yang terdapat dalam siklus memutar segitiga manapun dalam $DT(P)$.

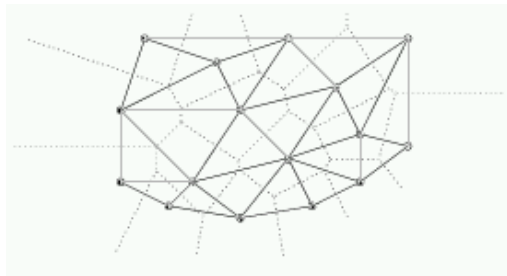
Triangulasi Delaunay memaksimalkan sudut minimum dari semua sudut segitiga yang ada dalam triangulasi. Triangulasi ini ditemukan oleh Boris Delaunay pada tahun 1934.



Gambar 7 Triangulasi Delaunay dari sebuah himpunan titik pada bidang
Triangulasi delaunay dari titik2 yang diskrit mengacu pada pembentukan graf dual dari diagram Voronoi untuk P.

4. Diagram Voronoi dan Triangulasi Delaunay

Triangulasi Delaunay, diagram voronoi, triangulasi Lawson, konstruksi Thiessen atau wilayah Dirichlet membahas suatu dasar yang sama. Hal dasar tersebut dapat ditemukan hampir di setiap bidang ilmu murni dan teknik yang berkaitan dengan konsep ruang. Dual dari diagram Voronoi dikenal dengan nama triangulasi Delaunay. Diagram Voronoi adalah sebuah graf planar. Simpul-simpul dari graf dual dapat diambil untuk menjadi sisi. Simpul-simpul dari diagram Voronoi berderajat tiga, dan hal ini mengakibatkan permukaan dari graf dualnya akan berbentuk segitiga. Graf dual yang dihasilkan adalah triangulasi dari wilayah-wilayah graf, yaitu triangulasi Delaunay.



Gambar 8 Triangulasi Delaunay

Triangulasi Delaunay memiliki sejumlah properti yang berkaitan erat dengan struktur dari diagram Voronoi. Jika wilayah dalam graf tidak dalam posisi yang general, wilayah dalam graf bersifat kosirkuler, maka triangulasi Delaunay bukanlah sebuah triangulasi tetapi hanya sebuah graf planar. Dalam hal seperti ini, Delaunay triangulasi lebih tepat disebut dengan graf Delaunay.

Definisi 4.1 :

Diketahui sebuah himpunan titik berhingga D di dalam sebuah sub-domain Ω^n dari ruang berdimensi-n R^n , untuk setiap titik $d_i \in D$ cari sebuah himpunan L_i ($L_i \subset \Omega^n \subset R^n$, Ω^n) dari semua titik dari Ω^n yang lebih dekat ke d_i daripada titik lain dalam D

$$L_i = \{x \mid x \in \Omega^n \wedge \|x - d_i\| < \|x - d_j\| \forall j \neq i\}$$

Hasil wilayah Voronoi L_i membentuk sebuah diagram dari Ω^n dan L_i dinamakan sebuah wilayah Voronoi untuk d_i .

Graf Delaunay (triangulasi Delaunay dua dimensi) mudah didapatkan dan memiliki keterkaitan dengan definisi di atas.

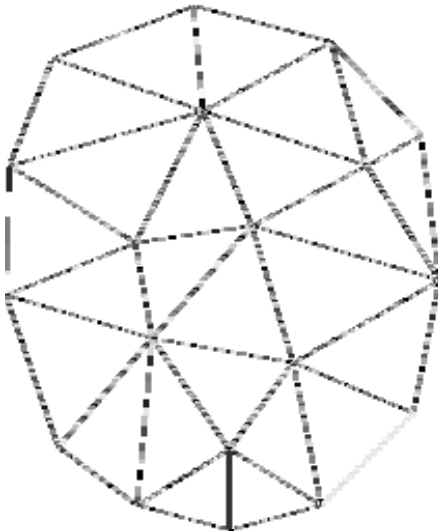
Definisi 4.2 :

Diketahui sebuah himpunan titik berhingga D di dalam sebuah sub-domain Ω^n dari ruang berdimensi-n R^n , kita mendefinisikan sisi-sisi untuk graf Delaunay sebagai berikut : d_i dan d_j dihubungkan oleh suatu sisi Delaunay jika dan hanya jika ada sebuah titik $x \in \Omega^n$ yang sama dekatnya ke d_i dan d_j dan lebih dekat ke titik tersebut dibandingkan dengan $d_k \in \Omega^n$.

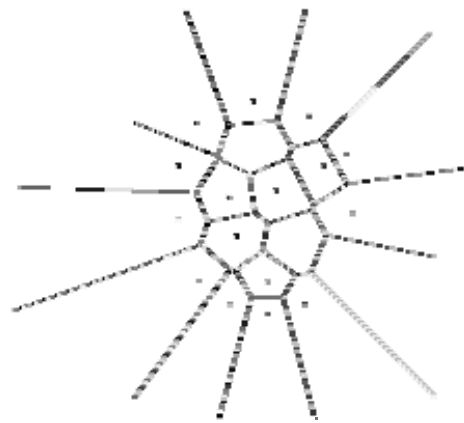
$$d_i \text{ dan } d_j \text{ terhubung} \Leftrightarrow \exists x \mid x \in \Omega^n \wedge \\ \|x - d_i\| = \|x - d_j\| \wedge \\ \|x - d_i\| < \|x - d_k\| \forall k \neq i, j$$



Gambar 9 Kumpulan awan titik



Gambar 10 Graf Delaunay dari awan titik



Gambar 11 Graf Voronoi dari awan titik

5. Triangulasi Euler

Sebuah graf dinamakan graf Euler jika semua simpulnya memiliki derajat yang sama. Euler diambil dari nama seorang yang terkenal dalam bidang teori graf. Mode ini megeneralisasi sebuah subset dari himpunan triangulasi Euler. Derajat minimum untuk triangulasi Euler adalah empat buah. Keterhubungan minimumnya berjumlah tiga. Dual dari triangulasi Euler adalah graf bidang dan planar, yang seperti yang telah disebutkan sebelumnya memiliki keterhubungan 3 buah dan bersifat *bipartite*. Sebuah graf bersifat bipartite jika kita dapat mempartisi simpul-simpulnya ke dalam dua kelompok yang berbeda sedemikian sehingga tidak ada sisi yang menghubungkan simpul dari kelompok yang sama.

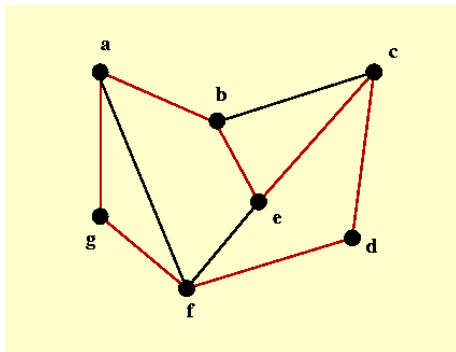
6. Hubungan Triangulasi dengan Teori Hamilton

Sirkuit Hamilton adalah sebuah lintasan yang melalui graf G berawal dari simpul v dan berakhir di simpul yang sama dengan mengunjungi tiap simpul tepat satu kali.

Sirkuit ini dinamakan dengan nama penemunya, William Rowan Hamilton yang menciptakan sebuah permainan yang memperlihatkan penemuan sirkuit Hamilton pada graf *dodecahedron*.

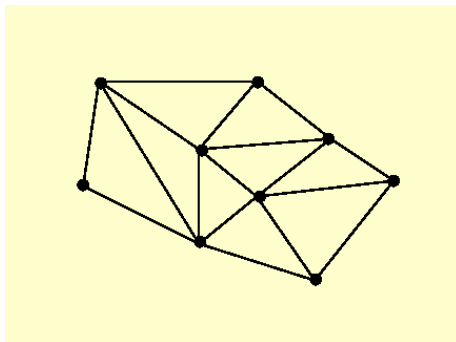
Sirkuit Hamilton biasa diaplikasikan dalam *Travelling Salesman Problem*, dimana diberikan sejumlah kota dan biaya perjalanan dari kota-kota tersebut. Seorang *salesman* harus menemukan biaya perjalanan termurah

tapi tetap mengunjungi setiap kota dan kembali ke kota asal.



Gambar 12 a - b - e - c - d - f - g adalah sebuah sirkuit Hamilton

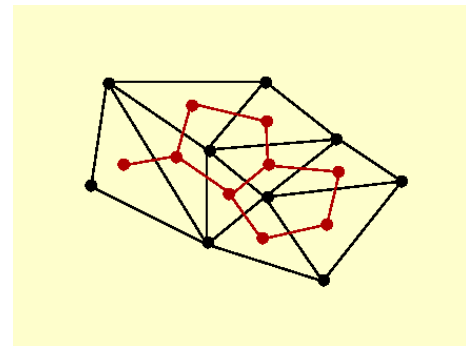
Diketahui sebuah himpunan titik P dalam sebuah bidang. Jika kita menghubungkan titik-titik dengan garis-garis lurus (sisi) sedemikian sehingga menghasilkan struktur sebuah kumpulan segitiga yang tergabung dengan sisi, maka himpunan segitiga ini disebut dengan triangulasi dari P (gambar 13). Sebuah himpunan titik P dapat memiliki berbagai macam triangulasi. Dengan cara yang sama sebuah triangulasi poligon adalah sebuah subdivisi dari sebuah poligon ke dalam sebuah himpunan dari segitiga-segitiga yang tidak saling memotong dengan cara menambahkan sisi di antara pasangan simpul.



Gambar 13 Triangulasi sebuah himpunan titik

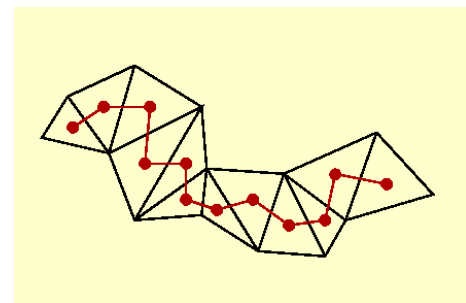
Graf dual dari sebuah triangulasi didapatkan dengan mendefinisikan sebuah simpul untuk setiap segitiga dan menggambarkan sisi di

antara dua segitiga yang saling berbagi sisi (gambar 14).

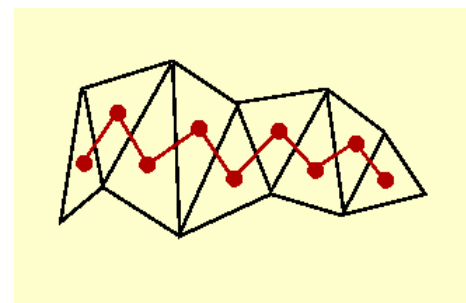


Gambar 14 Graf Dual Triangulasi P

Sebuah triangulasi *serpentine* (bergelombang) (juga diketahui sebagai *triangulasi Hamilton*) adalah sebuah triangulasi dimana graf dualnya adalah sebuah *path* (gambar 15). Sebuah triangulasi sekuensial adalah sebuah triangulasi *serpentine* dengan properti tambahan yang merupakan segitiga kanan dan kiri (gambar 16).



Gambar 15 Triangulasi *serpentine* dan graf dualnya



Gambar 16 Triangulasi sekuensial dan graf dualnya

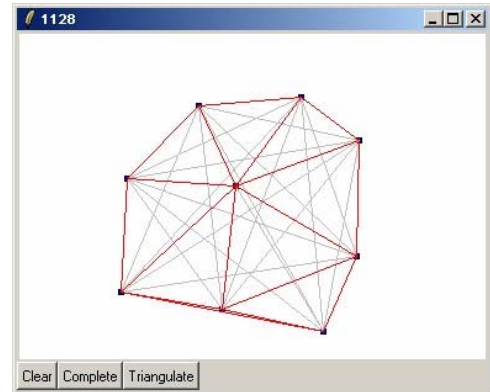
Masalah menemukan sirkuit hamilton dalam sebuah graf dual triangulasi telah dipelajari melalui literatur. Berbagai hasil yang membentuk sirkuit Hamilton dalam sebuah triangulasi yang diketahui, dapat diklasifikasikan berdasarkan model dasar pemikirannya.

Dalam model pertama, triangulasi yang diketahui dapat dimodifikasikan dengan menambahkan simpul-simpul baru. Gopi and Eppstein memperkenalkan sebuah algoritma untuk membentuk sebuah sirkuit Hamilton dalam sebuah triangulasi yang diketahui, dengan menambahkan *titik Steiner* dengan segitiga-segitiga yang telah ada. Mereka menggunakan graf dual kesamaan algoritma untuk membagi triangulasi menjadi sirkuit-sirkuit dan kemudian menggabungkan sirkuit-sirkuit tersebut dengan cara memecahkan segitiga jika diperlukan.

Dalam model kedua, triangulasi masukan tidak dapat dimodifikasi. Dalam hal ini, masalah yang muncul adalah bagaimana mengunjungi segitiga-segitiga yang bertetangga dalam urutan yang sama sehingga graf yang dihasilkan mengandung sebuah sirkuit Hamilton. Komponen penting dalam hal ini adalah bagaimana kita mendefinisikan ketetanggaan. Dalam graf dual triangulasi, ketetanggaan didefinisikan jika ada sisi yang berketetanggaan dimana simpul ganda dari dua segitiga dihubungkan melalui sebuah sisi suatu segitiga ini saling berbagi sisi. Sayangnya, untuk menemukan sebuah sirkuit Hamilton dalam sebuah graf dual tidak selalu mungkin.

7. Algoritma

Jika diketahui sebuah himpunan titik pada suatu bidang, kita dapat membentuk sebuah graf planar dimana semua titik (simpul) terhubung, secara langsung maupun tidak langsung, dengan sisi, sedemikian sehingga tidak ada 2 sisi yang berpotongan. Graf planar maksimum dikenal dengan triangulasi dari himpunan simpul.



Gambar 17 Triangulasi (warna merah menunjukkan triangulasi, abu-abu menunjukkan grafnya)

Kita bisa mendapatkan triangulasi di atas dengan algoritma yang dibuat Richard Suchenwirth berikut :

simpul dalam graf dinamakan $\$x/\y menyatakan koordinat mereka, sisi dinamakan $\$from/\to untuk menyatakan simpul awal dan terminalnya.

```
proc demo {} {
    canvas .c -bg white
    frame .f
    button .f.c -text Clear -
command { .c delete all }
    button .f.co -text Complete -
command { showComplete .c }
    button .f.tr -text Triangulate
-command { showTriangulate .c }
    eval pack [winfo children .f]
-side left
    pack .c .f -fill x -expand 1
    bind .c <1> { addVertex %W %x
%y }
    .c bind vertex <3> { %W delete
current }
}
proc showComplete w {
    $w delete edge
    foreach edge [completeGraph
[get vertex $w]] {
        showEdge $w $edge
    }
}
proc showEdge {w edge {fill
gray}} {
    regexp {(.)/(.+) , (.+) / (.+)}
$edge -> x0 y0 x1 y1
    set ::length($edge) [expr
{hypot($x1-$x0, $y1-$y0)}]
    $w create line $x0 $y0 $x1 $y1
-tags "edge $edge" -fill $fill
}
```

```

proc get {tag w} {
    set res {}
    foreach v [$w find withtag
$tag] {
        lappend res [lindex [$w
gettags $v] 1]
    }
    set res
}
proc completeGraph vertices {
    set graph {}
    foreach i $vertices {
        foreach j $vertices {
            if {$i<$j} {lappend
graph $i,$j}
        }
    }
    set graph
}
proc showTriangulate w {
    $w delete edge
    showComplete $w
    wm title . Wait...
    set t0 [clock clicks -
milliseconds]
    foreach edge [triangulate [get
edge $w]] {
        showEdge $w $edge red
    }
    wm title . [expr {[clock
clicks -milliseconds] - $t0}]
}

```

Triangulasi dilakukan dengan mengiterasi semua pasangan sisi dan melihat apakah dya berpotongan, lalu membuang sisi yang lebih panjang, di mana tidak ada lagi sisi yang berpotongan.

```

proc triangulate graph {
    while 1 {
        set found 0
        foreach i $graph {
            foreach j $graph {
                if {$i!=j &&
[crossing $i $j]} {
                    lremove graph
[longer $i $j]
                    set found 1
                    break
                }
            }
            if $found break
        }
        if {$found} break
    }
    set graph
}

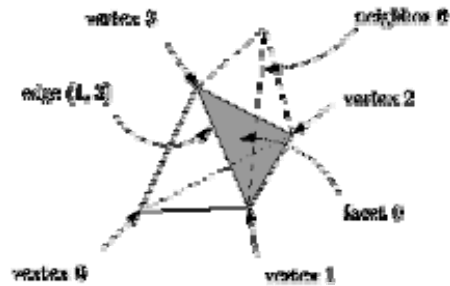
```

8. Struktur Data Triangulasi Tiga Dimensi

Sebuah triangulasi geometri memiliki dua buah aspek, yaitu struktur kombinatorial yang memberikan *incidence* dan hubungan ketetanggaan antar permukaan dan sebuah informasi geometri berkaitan dengan posisi dari simpul.

Sebuah triangulasi geometrik dari sebuah himpunan titik dalam \mathbb{R}^d , $d \leq 3$ adalah sebuah partisi dari keseluruhan ruang \mathbb{R}^d ke dalam sel-sel yang memiliki $d+1$ simpul. Beberapa di antara mereka tidak berhingga, mereka dibangun dengan menghubungkan simpul tambahan ke setiap faset dari convex hull dari titik. Teori dasar kombinatorial graf dari triangulasi semacam itu tanpa batas dari \mathbb{R}^d dapat dilihat sebagai triangulasi dari sebuah permukaan topologi (topological sphere) S^d in \mathbb{R}^{d+1} .

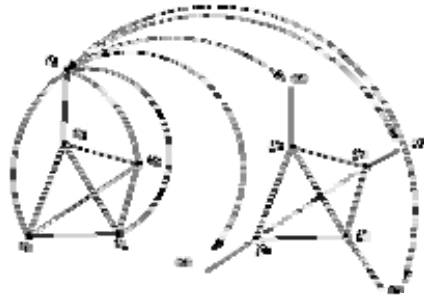
Struktur data triangulasi tiga dimensi direpresentasikan seperti pada gambar berikut :



Gambar 18

Berikut adalah contoh dari struktur data triangulasi yang memiliki jumlah simpul minimum. Contoh-contoh itu diilustrasikan dengan memperkenalkan bentuk geometri umum mereka.

- 3 dimensi



Gambar 19

- 2 dimensi



Gambar 20

- 1 dimensi



Gambar 21

Berikut ini adalah contoh program yang menunjukkan bagaimana membangun sebuah struktur data triangulasi tiga dimensi dengan cara menambahkan simpul. Program ini ditulis dalam bahasa pemrograman C++.

```
// file:
examples/Triangulation_3/example_tds.C

#include
<CGAL/Triangulation_data_structure_3.h>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cassert>
#include <vector>

typedef
CGAL::Triangulation_data_structure_3<>
Tds;

typedef Tds::size_type
size_type;
typedef Tds::Cell_handle
Cell_handle;
typedef Tds::Vertex_handle
Vertex_handle;

int main()
{
    Tds T;

    assert( T.number_of_vertices() == 0
);
    assert( T.dimension() == -2 );
    assert( T.is_valid() );

    std::vector<Vertex_handle> PV(7);

    PV[0] =
T.insert_increase_dimension();
    assert( T.number_of_vertices() == 1
);
    assert( T.dimension() == -1 );
    assert( T.is_valid() );

    // each of the following insertions
of vertices increases the dimension
for ( int i=1; i<5; i++ ) {
        PV[i] =
T.insert_increase_dimension(PV[0]);
        assert( T.number_of_vertices() ==
(size_type) i+1 );
        assert( T.dimension() == i-1 );
        assert( T.is_valid() );
    }
    assert( T.number_of_cells() == 5 );

    // we now have a simplex in dimension
4

    // cell incident to PV[0]
    Cell_handle c = PV[0]->cell();
    int ind;
    bool check = c->has_vertex( PV[0],
ind );
    assert( check );
    // PV[0] is the vertex of index ind
in c

    // insertion of a new vertex in the
facet opposite to PV[0]
```



```

PV[5] = T.insert_in_facet(c, ind);

assert( T.number_of_vertices() == 6
);
assert( T.dimension() == 3 );
assert( T.is_valid() );

// insertion of a new vertex in c
PV[6] = T.insert_in_cell(c);

assert( T.number_of_vertices() == 7
);
assert( T.dimension() == 3 );
assert( T.is_valid() );

std::ofstream
oFileT("output_tds",std::ios::out);
// writing file output_tds;
oFileT << T;

return 0;
}

```

9. Pencarian Lokasi Titik

Misal diketahui sebuah bidang yang mengandung graf planar terhubung G dengan simpul sejumlah n . Kita ingin menyimpan G

dalam sebuah struktur data sedemikian sehingga dapat ditentukan dengan cepat dimana titik q berada dalam permukaan G (bila memang titik tersebut terdapat di dalam G). Pencarian ini dinamakan pencarian lokasi titik. Kita ingin membentuk sebuah struktur data sekali saja tetapi dapat digunakan untuk berkali-kali pencarian.

Masalah lokasi titik adalah sebuah masalah yang umum ditemukan dalam geometri komputasi, dan masalah ini telah ada sejak dahulu. Satu dari solusi yang pertama kali ditemukan adalah metode triangulasi Kirkpatrick yang ditemukan pada tahun 1983. Solusi ini memerlukan $O(n)$ waktu preproses, $O(n)$ ruang dan dapat menyelesaikan pencarian dalam $O(\log n)$ waktu.

Metode Kirkpatrick adalah satu dari empat pendekatan yang dilakukan untuk menyelesaikan masalah penentuan lokasi titik. Di tahun berikutnya, Edelsbrunner et al. mengembangkan sebuah metode lain yang dinamakan metode rantai (*chain method*) berdasarkan segmen pohon.

Algoritma Triangulasi Kirkpatrick :

Dasar dari algoritma ini adalah sebuah *triangulation refinement*, jadi langkah pertama yang perlu dilakukan adalah melakukan triangulasi pada graf planar yang diketahui. Graf G yang sudah ditriangulasikan harus diubah lagi ke graf G yang lebih kecil. Hal ini dilakukan dengan memilih himpunan unik dari simpul-simpul dari G yang memiliki derajat kurang dari delapan buah. Sebuah himpunan simpul yang unik ini adalah sebuah himpunan dimana tidak ada simpul yang bertetangga. Himpunan simpul ini dipindahkan dari G untuk mendapatkan G' .

G' ditriangulasikan dan proses dilanjutkan sampai hanya segitiga batas yang tersisa. Hal ini memberikan suatu urutan S_1, S_2, \dots, S_h dari proses triangulasi yang dilakukan sebanyak h kali dengan komponen-komponen sebagai berikut :

1. $S_1 = G$
2. S_h adalah segitiga terluar dari G
3. $h = O(\log n)$ [n adalah jumlah simpul dari graf]
4. terdapat sebuah konstanta c , $0 < c < 1$, sedemikian sehingga untuk tiap i , $1 \leq i < h$, jumlah simpul untuk S_{i+1} c

- kali lebih banyak dari jumlah simpul untuk S_i
5. untuk setiap i , $1 \leq i < h$, dan titik yang diinginkan sebarang ada di R^2 , jika kita telah menempatkan q di dalam S_{i+1} , maka kita dapat menempatkan q dalam S_i dalam waktu $O(1)$

Dalam proses *refinement*, setiap segitiga baru menyimpan sebuah *pointer* ke segitiga yang menginterseksinya pada level triangulasi yang setingkat lebih tinggi. Hal ini membentuk sebuah Directed Acyclic Graph(DAG) dimana simpul-simpul adalah segitiga dan akar adalah segitiga yang merupakan batas terluar graf. Dengan adanya proses triangulasi yang berulang-ulang dan DAG, pencarian titik menjadi lebih mudah. Oleh karena hanya adanya $O(\log n)$ tingkat dan untuk setiap tingkatan kita hanya menggunakan waktu sebesar $O(1)$, maka jumlah waktu pencarian seluruhnya adalah $O(\log n)$.

10. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan tentang triangulasi di atas adalah:

1. Triangulasi adalah sebuah graf planar yang berbentuk segitiga.
2. Sebuah graf dapat ditriangulasikan jika ia tidak mempunyai tali busur lebih dari tiga buah.
3. Triangulasi Delaunay dari sebuah himpunan simpul adalah sebuah triangulasi dari himpunan simpul dengan ketentuan tidak ada simpul dalam himpunan simpul tersebut yang jatuh pada wilayah siklus yang melalui tiga simpul sekaligus dari segitiga dalam triangulasi[1].
4. Diagram Voronoi adalah sebuah graf planar. Dengan mengetahui diagram Voronoi, maka triangulasi Delaunay akan lebih mudah untuk dilakukan.
5. Dual dari triangulasi euler (semua simpulnya memiliki jumlah derajat yang sama) adalah graf bidang dan planar, yang seperti yang telah disebutkan sebelumnya memiliki keterhubungan 3 buah dan bersifat *bipartite*.

6. Sirkuit Hamilton dapat ditemukan dalam graf yang telah ditriangulasikan.
7. Sebuah triangulasi geometri memiliki dua buah aspek, yaitu struktur kombinatorial yang memberikan *incidence* dan hubungan ketetanggaan antar permukaan dan sebuah informasi geometri berkaitan dengan posisi dari simpul.
8. Pencarian lokasi titik pada graf yang telah disimpan dapat diselesaikan dengan algoritma triangulasi Kirkpatrick.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Triangulation. (2006). Triangulation Definition.
<http://cs.berkeley.edu/triangle.defs.html>. Tanggal akses : 1 Januari 2007 pukul 21.00.

- [2] Jayson Rome (2006). *The Existence of A Pseudo-triangulation in a Given Geometric Graph*. 22nd European Workshop on Computational Geometry.

- [3] Triangulations. (2005).
<http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/%7E/CaGe/triangulations.html>. Tanggal akses : 1 Januari 2007 pukul 21.00.

- [4] Munir, Rinaldi. (2006). Diktat Kuliah IF2153 Matematika Diskrit. Edisi 4. Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.

- [5] MediaWiki.(2005). Delaunay Triangulation.
http://en.wikipedia.org/wiki/delaunay_triangulation. Tanggal akses : 28 Juli 2006 pukul 22.20

- [6] Marina Meila, Michael Jordan. (1997). Triangulation by Continuous Embedding. Massachusetts Institute of Technology.
<http://www.ai.mit.edu/~murphy/AAAI04>. Tanggal akses : 1 Januari 2007 pukul 21.30

- [7] *<http://www.csu.wstl.edu/17.html>*
Tanggal akses : 1 Januari 2007 pukul 21.30

- [8] *<http://wiki.tcl.tk/9598.htm>*
Tanggal akses : 28 Juli 2006 pukul 22.20