# COMBINATORIAL GAME THEORY SERTA ANALISIS MENGENAI APLIKASINYA

Arinta Primandini Auza – NIM : 13505021

*Program Studi Teknik Informatika*
*Sekolah Teknik Informatika dan Elektro*
*Institut Teknologi Bandung*
*Jl. Ganesha 10, Bandung*
E-mail : if15021@students.if.itb.ac.id

## Abstrak

Makalah ini membahas mengenai salah satu teori dalam kombinatrika yaitu *Combinatorial Game Theory* beserta beberapa aplikasinya dalam strategi game. Teori ini merupakan teori yang mempelajari *combinatorial* game, yaitu permainan dengan dua orang pemain, dan juga strategi dalam permainan tersebut. Terdapat dua referensi utama mengenai *combinatorial game*. Salah satunya merupakan buku riset, *On Numbers and Games* oleh J.H. Conway, Academic Press, 1976. Buku ini memperkenalkan banyak dasar dari subjek. Sedangkan referensi lainnya adalah buku berjudul *Winning Ways for your mathematical plays* oleh Berlekamp, Conway and Guy, Akademik Press, 1982.

Terdapat banyak sekali permainan yang menggunakan teori ini namun yang akan dibahas dalam makalah ini adalah *Domineering* dan Nim-game. Tiap permainan memiliki strategi yang berbeda untuk memenangkan permainan tersebut. Dalam Nim-game kita dapat mengetahui strategi untuk memenangkan permainan serta pemain mana yang memiliki strategi strategi tersebut. Variasi dari Nim-game sangatlah banyak dan beberapa akan dibahas pada makalah ini.

## 1. Pendahuluan

*Combinatorial Game Theory* adalah salah satu teori matematika yang hanya mempelajari permainan dengan 2 pemain yang memiliki posisi dimana setiap pemain bermain bergantian untuk memperoleh kemenangan. Teori ini tidak mempelajari permainan tentang kesempatan seperti poker, tetapi mempelajari permainan dimana kedua pemain memiliki posisi yang umum dan juga himpunan langkah yang umum.

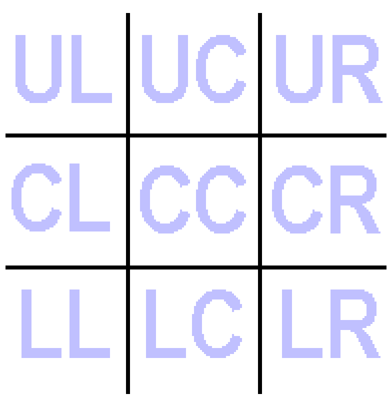
Dalam aplikasinya, teori ini digunakan untuk menganalisis strategi dari game yang memiliki *perfect information,* yaitu hanya satu orang pemain yang melangkah tiap waktu dan masing-masing pemain mengetahui setiap tindakan dari pemain yang bergerak sebelum pemain tersebut pada setiap titik. Dengan teori ini kita dapat mengetahui langkah yang optimum dari kedua pemain hingga permainan selesai.

Dalam teori matematika terdapat teori yang disebut *game theory.* Perlu diingat bahwa kedua teori ini berbeda. *Game Theory* digunakan pada teori ekonomi dan saat ini *game theory* mulai banyak digunakan di bidang akademik lainnya seperti biologi, psikologi, sosiologi, filosofi, dan lain-lain. Permainan yang dipelajari dalam *game theory* sebagian besar merupakan game yang memiliki *imperfect information,* sehingga tidak semua pemain mengetahui tindakan dari pemain lainnya. Selain itu pemain bermain secara bersama-sama, tidak bergiliran seperti pada *combinatorial game theory.* Hal inilah yang membedakan antara *game theory* dan *combinatorial game theory.*

Permainan yang merupakan aplikasi dari *Combinatorial Game Theory,* yang disebut juga sebagai *Combinatorial game,* memiliki persyaratan sebagai berikut :

1. Permainan memiliki tepat 2 pemain.
2. Pada umumnya pemain yang melakukan langkah terakhir menang ( beberapa permainan yang disebut *misere form,* dimana pemain yang melakukan langkah terakhir kalah).
3. Pemain bermain secara bergantian
4. Permainan memiliki akhir, tidak berlangsung terus menerus.
5. Dalam permainan tidak ada seri, hanya ada menang dan kalah.
6. Tidak ada informasi yang disembunyikan dari pemain (misalnya seperti pada poker).
7. Permainan tidak berdasarkan pada keberuntungan.

## 2. Gambaran Singkat

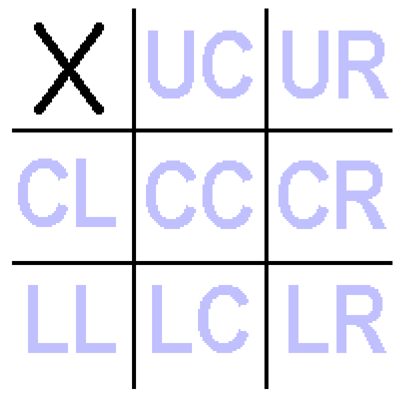



**Gambar 2.1**

Mengenai gambaran singkat tentang teori ini, kita gunakan sebuah permainan yang disebut *Tic-Tac-Toe.* Masing-masing pemain kita sebut *Left* dan *Right.* Untuk memudahkan analisis, kita gunakan notasi **{L|R}**. *L* merupakan langkah yang bisa diambil oleh pemain *Left*, dan *R* merupakan langkah yang dapat digunakan pemain *Right.* Jika kita melabeli masing-masing dari 9 kotak di atas dengan *UL* untuk *Upper Left*(kiri atas), *CC* untuk *Cener Center* (tengah tengah), *LR* untuk *Lower Right* (kanan bawah), dan seterusnya, dan memungkinkan untuk menempatkan **X** atau **O** pada setiap kotak, awal dari permainan Tic-Tac-Toe dapat direpresentasikan sebagai

$$\{XUL, XUC, XUR, XCL, XCC, XCR, \ldots\}$$

yang merupakan semua kemungkinan bagi pemain pertama untuk menempatkan X pada salah satu kotak.



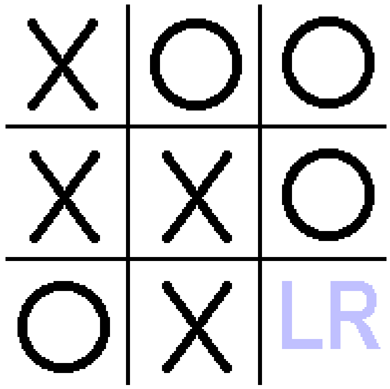

**Gambar 2.2**

Sementara itu saat salah satu pemain mengisi salah satu kotak, misalkan pemain *left*, pemain lainnya (*right*), yang akan mengisi kotak setelah pemain sebelumnya selesai, memiliki pilihan untuk mengisi kotak lainnya, selain yang diisi oleh pemain *left.* Maka misalkan untuk game Tic-Tac-Toe yang dilabeli XUL seperti pada gambar 2.2 dapat dinotasikan sebagai

$$XUL = \{XUL\_XUC, XUL\_XUR, XUL\_XCL, \ldots | XUL \ldots\}$$

Dengan melanjutkan permainan, kemungkinan permainan akan berakhir seperti berikut :

$$XUL\_OUR\_XCC\_OCR\_XLC\_OLL\_XCL\_OUC = \{\{\,|\,\}\,|\,\{\,|\,\}\}$$




**Gambar 2.3**

Permainan di atas menggambarkan skenario dimana hanya ada satu langkah tersisa untuk setiap pemain, yaitu pada kotak LR pada bagian kanan bawah, dan jika salah satu pemain mengambil langkah tersebut, pemain tersebut akan memenangkan permainan. Lambang {|} pada setiap list dari langkah pemain disebut *zero game*, yang sebenarnya dapat disingkat dengan lambang 0. Dalam *zero game*, tidak satupun dari pemain memiliki langkah yang valid, sehingga siapapun yang mengambil langkah saat *zero* game muncul akan secara otomatis kalah.

Selain itu, permainan yang dilabeli "XUL_OUR_XCC_OCR_XLC_OLL_XCL_OUC" di atas juga mempunyai notasi yang jauh lebih sederhana yang disebut *star game*, yang juga dapat disingkat menjadi *. Dalam *star game,* satu-satunya langkah yang valid memimpin pemain menuju *zero games,* yang berarti siapapun yang memiliki giliran saat *star game* muncul akan otomatis memenangkan permainan.

Tipe permainan lainnya, tidak terdapat pada permainan Tic-Tac-Toe, adalah *loopy* game. Pada *loopy* game, langkah yang valid yaitu permainan yang kemudian dapat menuju ke permainan awal. game. Permainan yang tidak memiliki langkah sepeti itu disebut *nonloopy.*

## 3. Definisi Formal

Sebuah struktur $\langle \mathcal{C}, L, R \rangle$ disebut *collection of games* jika

$$L : \mathcal{C} \to 2^{\mathcal{C}}$$

dan

$$R : \mathcal{C} \to 2^{\mathcal{C}}$$

dimana $2^{\mathcal{C}}$ is the power set of $\mathcal{C}$,

dan

$$\forall G, H \in \mathcal{C}\,[L(G) = L(H) \wedge R(G) = R(H) \Rightarrow G = H.]$$

Karena G ditetapkan secara unik oleh *L*(*G*) dan *R*(*G*), *G* sering kali dinotasikan sebagai $\{L(G) \mid R(G)\}$.

Elemen dari $\mathcal{C}$ disebut *games* dan berdasarkan konvensi dinotasikan oleh huruf Latin *G*,*H*,*K*,.... Pemain yang bermain dalam sebuah permainan yang hanya memiliki 2 orang pemain dinamakan **Left** and **Right** (kadang-kadang dikenal sebagai **bLue** and **Red**), dan $H \in L(G)$ serta $H \in R(G)$ berarti bahwa pemain **Left** (dan juga **Right)** diperbolehkan melangkah dari permainan G ke permainan H.

Definisikan *binary relation*, $\mathrm{S}$(untuk *successor*) antara permainan $G, H \in \mathcal{C}$ oleh

$$G\mathrm{S}H \Leftrightarrow H \in L(G) \cup R(G).$$

*Transitive closure* dari $\mathrm{S}$ dinotasikan oleh $\mathrm{P}$, untuk posisi. *H* adalah *posisi* dari *G*, dinotasikan $G\mathrm{P}H$, jika memungkinkan untuk mencapai *H* dari *G* lewat urutan langkah yang tidak kosong oleh **Left** dan **Right**.

$\mathcal{C}$ disebut *loopy* jika $\exists G \in \mathcal{C}\ G \mathrm{P} G$; selain itu $\mathcal{C}$ merupakan *nonloopy*. Koleksi nonloopy $\mathcal{C}$ dikatakan *well-founded* saat tidak ada deret tak hingga $G_0, G_1, G_2, \ldots$ dengan $\forall i \geq 0\ G_i \mathrm{P} G_{i+1}$.

Jika terdapat sebuah elemen $0$ dari $\mathcal{C}$, dengan $L(0) = R(0) = \emptyset$, maka kita menyebutnya sebagai *zero element*. Zero element, jika ada, merupakan elemen yang unik.

Jika $\langle \mathcal{C}, L, R \rangle$ merupakan koleksi game dan $G_0 \in \mathcal{C}$ maka permainan $\boldsymbol{G_0}$ dapat dimainkan sebagai berikut : Pemain pertama, katakan **Left**, memilih sebuah elemen $G_1 \in L(G_0)$ (jika ada). Kemudian **Right** memilih sebuah elemen $G_2 \in R(G_1)$. Setelah itu **Left** memilih sebuah elemen $G_3 \in L(G_2)$ dan begitu seterusnya. Jika seorang pemain tidak dapat bergerak (yaitut saat himpunan $L(G_i)$ atau $R(G_i)$ kosong) maka, sesuai definisi, pemain tersebut telah kalah dalam permainan. Permainan $G_0$ dapat dimainkan dengan **Right** sebagai pemain pertama dengan menukar peran $L(G_i)$ dan $R(G_i)$.

## 4. Beberapa contoh aplikasi

Prinsip dari *Combinatorial Game Theory* dapat diaplikasikan pada permainan seperti catur, checkers, Go, Hex, dan Connect6, tetapi permainan-permainan tersebut terlalu rumit untuk diselesaikan dengan analisis komplit (walaupun teori ini telah mendapatkan kesuksesan dalam menganalisis akhir dari permainan Go).

Dalam teks pendahuluan buku berjudul *Winning Ways* (karya E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy) diperkenalkan banyak permainan yang menggunakan teori ini. Game yang akan dibahas lebih lanjut pada makalah ini yaitu *Domineering* dan *Nim-game.*

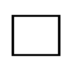
### 4.1 Domineering

**Domineering** (juga disebut **Stop-Gate**) adalah sebuah permainan matematika yang dimainkan pada selembar kertas graf, yaitu kertas yang dicetak dengan garis-garis yang membentuk grid, dengan desain yang ditentukan pemain. Sebagai contoh, permainan ini dapat dimainkan pada bujursangkar berukuran 6x6, *checkerboard* (papan berukuran 8×8 dan memiliki 64 persegi kemudian diwarnai warna terang dan gelap secara bergantian, biasanya merah dan hitam), polygon tak beraturan, atau kombinasi lainnya. Dua orang pemain dalam permainan ini memiliki sekumpulan domino yang akan ditempatkan pada grid secara bergiliran. Salah satu pemain meletakkan dominonya secara vertical, sedangkan pemain lainnya meletakkan domino secara horizontal. Seperti kebanyakan permainan dalam *combinatorial game theory*, pemain pertama yang tidak bisa melangkah akan kalah.

#### 4.1.1 Beberapa contoh dasar

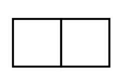
**a. Grid berukuran 1x1**

Dengan mengesampingkan permainan dengan grid kosong, permainan paling sederhana adalah dengan menggunakan persegi berukuran 1x1.

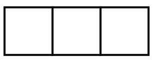


Dalam permainan ini jelas bahwa tak satupun dari pemain dapat melangkah. Oleh karena itu pemain kedua akan memenangkah permainan. Permainan dalam kondisi seperti ini disebut *zero game.*

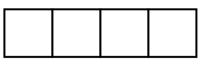
**b. Baris Horizontal**



Permainan ini dilakukan pada grid berukuran 2x1. Ada sebuah konvensi yang menyatakan sebuah permainan merupakan positif jika pemain *Left* yang memainkan pertandingan dan negative jika *Right* yang menang. Dalam kasus permainan baris horizontal ini, pemain *Left* tidak bisa melangkah, sementara *Right* dapat selalu meletakkan dominonya untuk menutupi semua grid, yang berarti merupakan *zero* game. Dengan demikian, permainan ini dapat dinotasikan dalam notasi *surreal number* sebagai $\{|0\} = -1$. Hal ini berlaku untuk sebanyak genap persegi dan juga ganjil. Misalkan untuk grid dengan ukuran 3x1 berikut.



Permainan ini juga merupakan $\{|0\} = -1$, karena sisa 1 persegi pada akhir permainan tidak dapat dimainkan.

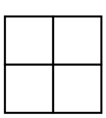


Dalam permainan dengan grid berukuran 4x1 di atas, *Right* dapat meletakkan dominonya pada 2 kotak paling kiri dan menyisakan -1. 2 kotak paling kanan juga menyisakan $-1$. Dia juga dapat meletakkan dominonya pada 2 kotak di tengah dan menyisakan 2 grid berukuran 1x1 yang berarti 0+0 = 0. Sehingga permainan ini dapat diekspresikan sebagai $\{|0,-1\}$. Dalam kasus ini dihitung sebagai -2.

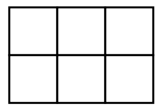
**c. Kolom vertikal**

Kolom vertical juga dihitung dengan cara yang sama. Jika terdapat sebuah baris dengan $2n$ atau $2n+1$ kotak, maka akan dihitung sebagai $-n$. Sedangkan kolom yang berukuran seperti it akan dihitung sebagai $+n$.

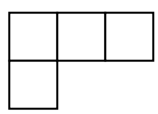
**d. Grid yang lebih kompleks**



Permainan dengan grid berukuran 2x2 di atas adalah permainan yang lebih komplek. Jika *Left* yang melangkah pertama kali, maka akan menyisakan grid berukuran 1×2, yang berarti +1. Jika *Right* yang mulai pertama kali, ia dapat melangkah ke $-1$. Karena itu notasi *surreal number* dari game ini adalah $\{1|-1\}$. Namun hal ini bukan merupakan surreal number, karena $1 > -1$. Notasi untuk permainan ini adalah $\pm1$, dan merupkan *hot game*, karena setiap pemain ingin melangkah di sini. Dalam kasus grid 2x2 ini maka pemain yang memiliki giliran pertama kali akan memenangkah permainan.



Grid di atas berukuran 2×3, yang merupakan grid yang lebih kompleks, tetapi kita tetap dapat menganalisisnya melalui variasi langkah yang untuk kedua pemain. *Left* dapat mengambil kolom kiri (atau secara ekivalen, kolom kanan), dan melangkah ke $\pm1$, tetapi akan lebih baik jika ia meletakkan dominonya di tengah dan menyisakan 2 game yang terpisah, masing-masing bernilai +1. Karena itu langkah terbaik bagi *Left* adalah +2. Sedangkan *Right* memiliki 4 langkah yang berbeda, namun semuanya meninggalkan bentuk sebagai berikut :



Permainan semacam ini bukan merupakan *hot game* (juga disebut *cold game*). *Left* dapat melangkah ke $-1$, *Right* dapat melangkah ke 0 or +1. Karena itu permainan ini adalah $\{-1|0,1\} = \{-1|0\} = -\frac{1}{2}$. Dalam permainan ini pemain pertama juga akan selalu dapat memenangkan permainan.

## 4.2 Nim- game

### 4.2.1 Sejarah Nim

"Nim" adalah permainan strategi matematika yang dilakukan oleh 2 orang pemain dimana tiap pemain secara bergiliran memindahkan objek dari tumpukan yang berbeda. On each turn, a player must remove at least one object, and may remove any number of objects provided they all come from the same heap.

Variasai dari Nim telah dimainkan sejak zaman dahulu. Permainan ini dikatakan berasal dari Cina (mirip dengan permainan Cina yang bernama Tsyanshidzi atau “mengambil batu”), tetapi asal – usulnya masih belum dapat dipastikan. Di Eropa permainan serupa Nim dimulai sejak awal abad ke-16. Teori mengenai permainan ini dikembangkan oleh Charles L Bouton dari Harvard University pada tahun 1901. Tetapi asal usul dari nama permainan ini masih belum dapat dijelaskan. Kemungkinan nama permainan ini dimabil dari diambil dari bahasa Jerman “nimm!” yang berarti “ambil!”, atau dari bahasa Inggris. Jika kita perhatikan kata *NIM* jika diputar 180° akan menghasilkan kata *WIN*.

Nim biasanya dimainkan sebagai *misere* game, dimana pemain yang mengambil objek terakhir kalah. Nim juga dapat dimainkan secara normal, yaitu pemain yang mengambil objek terakhir menang. Hal ini dikatakan normal karena mengikuti konvensi, sedangkan Nim biasanya tidak mengikuti konvensi tersebut.

Permainan normal Nim merupakan hal yang fundamental bagi *Teorema Sprague Gundy,* yang intinya mengatakan bahwa dalam permainan yang normal setiap *impartial game,* yaitu sebuah permainan dimana yang membedakan antara pemain 1 dan pemain 2 adalah bahwa pemain 1 mendapat giliran pertama*,* ekivalen dengan setumpuk Nim yang menghasilkan akibat yang sama dengan pada saat dimainkan dengan *parallel* dengan permainan normal *impartial game* lainnya.

**4.2.2 Teori matematika**

Nim telah secara matematika dipecahkan untuk berbagai banyaknya tumpukan dan objek,. Telah ada sebuah metode untuk menentukan pemain mana yang akan menang dan strategi apa yang bisa digunakan untuk memenangkan permainan tersebut.

Kunci dari teori permainan adalah *binary digital sum* dari ukuran tumpukan, yaitu jumlah dalam biner dengan mengabaikan semua kelebihan dari penjumlahan tiap digitnya. Operasi ini juga dikenal sebagai *exclusive or* (xor) atau penjumlahan vector dibagi GF(2). Dalam *combinatorial game theory* operasi ini biasanya dinamakan **nim-sum**. Nim-sum dari $x$ dan $y$ ditulis sebagai $x \oplus y$ untuk membedakan dengan penjumlahan biasa, $x + y$. Sebagai contoh perhitungan dengan tumpukan berukuran 3, 4, dan 5 adalah sebagai berikut :

| Biner | Desimal | Keterangan |
|---|---|---|
| $011_2$ | $3_{10}$ | Tumpukan A |
| $100_2$ | $4_{10}$ | Tumpukan B |
| $101_2$ | $5_{10}$ | Tumpukan C |
| $010_2$ | $2_{10}$ | Nim-Sum = $3 \oplus 4 \oplus 5 = 2$ |

Prosedur yang ekivalen dengan prosedur di atas, yang biasanya lebih mudah dilakukan, adalah untuk mengekspresikan ukuran tumpukan sebagai jumlah dari bilangan pangkat 2 yang berbeda, kemudian hapus semua pasangan bilangan yang sama dan jumlahkan semua yang tersisa :

3 = 2 + 1 = 2 + ~~1~~ Tumpukan A
4 = 4 = ~~4~~ Tumpukan B
5 = 4 + 1 = ~~4~~ + ~~1~~ Tumpukan C
---
2 = 2
Sisa setelah menghapus 4 dan 1

Dalam permainan yang normal, strategi untuk memenangkan permainan adalah dengan menyelesaikan setiap langkah dengan Nim-sum 0, yang biasanya selalu mungkin jika Nim-sum tidak nol sebelum langkah. Jika Nim-sum adalah 0, maka pemain berikutnya akan kalah jika pemain lainnya tidak melakukan kesalahan. Untuk mengetahui langkah mana yang harus diambil, misalkan X adalah Nim-sum dari semua ukuran tumpukan. Ambil Nim-sum dari setiap ukuran tumpukan dengan X, dan cari tumpukan yang ukurannya berkurang. Strategi untuk menang adalah bermain dengan tumpukan tersebut dan mengurangi tumpukannya hingga sama dengan Nim-sum dari ukuran sebenarnya dengan X. Dalam contoh di atas, ambil Nim-sum dari semua ukuran yaitu X = 3 ⊕ 4 ⊕ 5 = 2. Nim-sum dari tumpukan A=3, B=4, dan C=5 dengan X=2 adalah

$$A \oplus X = 3 \oplus 2 = 1$$
$$B \oplus X = 4 \oplus 2 = 6$$
$$C \oplus X = 5 \oplus 2 = 7$$

Satu-satunya tumpukan yang berkurang adalah tumpukan A, sehingga langkah untuk menang adalah dengan mengurangi ukuran tumpukan A hingga 1, yaitu dengan memindahkan 2 objek.

Sebagai contoh kasus khusus, jika hanya terdapat dua tumpukan yang tersisa, strategi untuk menang adalah dengan mengurangi banyaknya objek pada tumpukan yang lebih besar untuk membuaat kedua tumpukan berjumlah sama. Setelah itu, tidak masalah langkah apa yang lawan lakukan, kita dapat mengambil langkah yang sama pada tumpukan lainnya, sehingga pada akhirnya kita akan dapat mengambil objek terakhir.

Jika dimainkan sebagai permainan *misère*, strategi Nim berbeda saat permainan normal meninggalkan tumpukan dengan ukuran 2 atau lebih besar. Dalam hal ini, langkah yang tepat adalah dengan meninggalkan sebanyak ganjil tumpukan dengan ukuran 1 (dalam permainan normal, langkah yang tepat adalah dengan meninggalkan sebanyak genap tumpukan berukuran 1).

Dalam permainan *misère* dengan ukuran tumpukan 3, 4 and 5, strateginya adalah sebagai berikut :

Misalkan kedua pemain tersebuat adalah X dan Y.

| A | B | C | Nim-sum | Keterangan |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | $010_2=2_{10}$ | X mengambil 2 dari A, sehingga Nim-sum = 000, sehingga A akan menang. |
| 1 | 4 | 5 | $000_2=0_{10}$ | Y mengambil sebanyak 2 dari C |
| 1 | 4 | 3 | $110_2=6_{10}$ | X mengambil sebanyak 2 dari B |
| 1 | 2 | 3 | $000_2=0_{10}$ | Y mengambil 1 dari C |
| 1 | 2 | 2 | $001_2=1_{10}$ | X mengambil 1 dari A |
| 0 | 2 | 2 | $000_2=0_{10}$ | Y mengambil 1 dari C |
| 0 | 2 | 1 | $011_2=3_{10}$ | Strategi permainan normal adalah X mengambil 1 dari B, meninggalkan sebanyak genap(2) tumpukan berukuran 1. Untuk *misère*, X mengambil semua objek di B, meninggalkan sebanyak ganjil(1) tumpukan berukuran 1. |
| 0 | 0 | 1 | $001_2=1_{10}$ | Y mengambil 1 dari C, dan kalah. |

### 4.2.2 Bukti dari *winning formula*

Strategi yang disebutkan di atas didemonstrasikan oleh C. Bouton.

**Teorema**. Dalam sebuah permainan Nim normal, pemain pertama memiliki strategi untuk menang (*winning strategy*) jika dan hanya jika Nim-sum dari ukuran tumpukan adalah tidak nol. Sebaliknya, pemain kedua yang memiliki strategi untuk menang.

*Bukti:* Perhatikan bahwa Nim-sum (⊕) mematuhi hukum asosiasi dan komutatif dari operasi (+), dan juga memenuhi property $x \oplus x = 0$.

Misalkan $x_1$, ..., $x_n$ adalah ukuran dari tumpukan sebelum melakukan langkah apapun, dan $y_1$, ..., $y_n$ merupakan ukuran setelah melangkah. Misalkan $s = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ dan $t = y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$. Jika objek diambil pada tumpukan $k$, maka $x_i = y_i$ untuk setiap $i \neq k$, dan $x_k > y_k$. Dengan property dari ⊕ yang disebutkan di atas, maka

$$
\begin{aligned}
t &= 0 \oplus t \\
&= s \oplus s \oplus t \\
&= s \oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus (y_1 \oplus \ldots \oplus y_n) \\
&= s \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus \ldots \oplus (x_n \oplus y_n) \\
&= s \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 \\
&= s \oplus x_k \oplus y_k
\end{aligned}
$$

$$(*) \quad t = s \oplus x_k \oplus y_k.$$

Teorema ini kemudian dibuktikan dengan melalukan induksi pada panjang dari permainan dari 2 lemma berikut.

**Lemma 1**. Jika $s = 0$, maka $t \neq 0$ apapun langkah yang telah diambil.

*Bukti:* Jika tidak terdapat langkah yang mungkin, maka lemma tersebut benar (dan pemain pertama kalah dalam permainan normal). Sebaliknya, langkah apapun yang diambil pada tumpukan $k$ akan menghasilkan $t = x_k \oplus y_k$ dari (*), yang tidak nol karena $x_k \neq y_k$.

**Lemma 2**. Jika $s \neq 0$, adalah mungkin untuk mengambil langkah sehingga $t = 0$.

*Bukti:* Misalkan $d$ adalah posisi paling kiri dari bit tidak nol dalam representasi biner dari $s$, dan pilih $k$ sedemikian sehingga bit ke-$d$ dari $x_k$ juga tidak nol. Kemudian misalkan $y_k = s \oplus x_k$. Klaim bahwa $y_k < x_k$. Semua bit ke kiri dari $d$ semua sama pada $x_k$ dan $y_k$, bit $d$ berkurang dari 1 menjadi 0 (dengan mengurangi nilainya dengan $2^k$), dan setiap perubahan dari digit yang tersisa akan berjumlah maksimal $2^k-1$. Pemain pertama kemudian dapat melakukan langkah dengan mengambil $x_k - y_k$ objek dari tumpukan $k$, maka

$$
\begin{aligned}
t &= s \oplus x_k \oplus y_k \\
&= s \oplus x_k \oplus (s \oplus x_k) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Strategi dari permainan normal adalah dengan mengurangi ukurannya hingga 0 atau 1, meninggalkan sebanyak genap tumpukan dengan ukuran 1, dan strategi dari permainan *misère* adalah sebaliknya.

### 4.2.3 Variasi dari nim-game

#### a. Normal Kayles

Permainan ini diperkenalkan oleh H.E.Dudeney(1857 - 1930) dan dikenal sebagai "Kayles".

*Permainan :* Sejumlah *pin* disusun pada baris yang terpisah. Langkah yang legal yaitu dengan menjatuhkan satu pin atau dua pin bersebelahan dari baris yang sama. Hal ini akan memecah baris menjadi 2 baris yang lebih kecil. Siapapun yang menjatuhkan *pin* terakhir akan memenangkan permainan.

*Permasalahan :* Bagaimana strategi untuk memenangkan permainan ini?

*Analisis :* Permainan yang dimainkan adalah dalam bentuk normal Nim. Dalam normal Nim, “komponen” adalah baris dan peraturan dari Nim menyatakan bahwa langkah yang dibolehkan yaitu dengan mengeliminasi komponen atau memindahkannya dengan yang lebih kecil. Dalam permainan Kayles ini, komponen juga berupa baris dan terdapat kesamaan prinsip mengenai perpindahan komponen. Kenyataan bahwa sebuah komponen dapat digantikan dengan beberapa (dua dalam kasus Kayles) tidak menjadi masalah karena beberapa baris dari Nim ekivalen dengan satu baris(tumpukan) Nim dengan value yang sama. Dengan demikian kita dapat menunjukkan bahwa sebuah baris-Kayles dengan panjang n ekivalen dengan beberapa baris-Nim yang panjangnya dapat ditentukan. Mari kita tinjau baris-Kayles yang pendek berikut :

Dari sebuah baris-Kayles dengan panjang 0, 1, atau 2, kita mempunyai langkah yang sama seperti pada sebuah baris-Nim dengan panjang yang sama. Baris-baris pendek ini ekivalen untuk kedua permainan Sebuah baris-Kayles dengan panjang 3 juga ekivalen dengan sebuah baris-Nim dengan panjang 3. Walaupun kita tidak dapat menjatuhkan ketiga *pin* dari baris-Kayles tersebut, kita diperbolehkan untuk menjatuhkan *pin* yang berada di tengah dan meninggalkan dua baris dengan satu *pin* yang terpisah. Hal ini ekivalen dengan baris-Nim kosong. Berbeda halnya dengan baris-Kayles berukuran 4. Dari baris-Kayles berukuran 4, langkah yang diperbolehkan akan meninggalkan salah satu dari himpunan ukuran baris-Kayles berikut : {3}, {2}, {1,2}, {1,1}, dengan Nim-value berturut-turut adalah 3, 2, 3 and 0. Bilangan “1” adalah bilangan bulat non negative terkecil yang tidak terdapat dalam list di atas. Karena itu, baris-Kayles yang berukuran 4 ekivalen dengan baris-Nim dengan ukuran 1.

Secara umum, kita dapat melihat bahwa Nim-value dari sebuah baris-Kayles adalah nilai terkecil yang tidak diperoleh dari Nim-sum dari Nim-value dari dua baris-Kayles yang diperoleh dari langkah yang diambil. Hal ini mempermudah perhitungan pada table berikut:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 | 6 | 4 | 1 | 2 | 7 | 1 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**Tabel 4.1** Nim ekivalen dengan Kayles untuk baris dengan panjang ≤ 20

Jika kita meneruskan table di atas, value akan berulang dengan periode 12. (hanya 14 kasus khusus yang tidak mengikuti pola periodic umum yaitu untuk baris-Kayles berukuran 0, 3, 6, 9, 11, 15, 18, 21, 22, 28, 34, 39, 57, dan 70).

**b. Permainan Wythoff**

Permainan Wythoff dulu dikenal di Cina sebagai *tsyan-shidzi.* Kemudian diperkenalkan kembali oleh Willem Abraham Wythoff (1865 - 1939), yang mempublikasikan analisisnya mengenai permainan ini pada tahun 1907. Setengah abad kemudian (sekitar 1960) salah satu matematikawan Rufus P. Isaacs dari Johns Hopkins University memberikan deskripsi lain dari permainan yang sama dalam langkah *queen* dalam catur yang hanya memperbolehkan langkah ke selatan dan atau ke barat.

*Permainan :* Permainan ini dimainkan dengan dua tumpukan objek berdasarkan aturan permainan normal. Langkah yang diperbolehkan yaitu dengan memindahkan objek dari satu tumpukan atau banyak objek yang sama dari kedua tumpukan.

*Permasalahan :* Bagaimana strategi untuk memenangkan permainan ini?

*Analisis :* Saat seseorang bermain suatu permainan, tentunya ia ingin melangkah ke posisi yang aman. Berikut adalah table mengenai posisi aman atau *zero position* dari permainan Wythoff.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 | 29 | 30 | 32 | 33 | 35 | 37 | 38 |
| 0 | 2 | 5 | 7 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 | 49 | 52 | 54 | 57 | 60 | 62 |

**Tabel 4.2** Zero position dalam permainan Wythoff

Posisi aman atau *zero position* dari permainan ini adalah {0,0}, {1,2}, {3,5}, {4,7}, {6,10}, {8,13}, ... $\{u_n,v_n\}$, dimana $u_n$ dan $v_n$ adalah pasamgam *zero* ke-n dari deret yang dikenal sebagai *lower* dan *upper* dalam deret *Wythoff*, yang mempunyai ekspresi yang sangat sederhana :

$$u_n = \lfloor n\,\phi \rfloor \quad \text{dan} \quad v_n = \lfloor n\,\phi^2 \rfloor = n + u_n \ ,$$

dimana $\lfloor x \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x (dikenal pula sebagai *floor* dari x) dan $\phi$ adalah *Golden Ratio* $(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180339887498948482...$ (sehingga $\phi^2 = 1 + \phi$ ). Deret dimana urutan ke-n adalah $\lfloor n\,\theta \rfloor$, untuk sebarang *irrational* number $\theta > 0$, dikenal sebagai *Beatty sequence* yang diasosiasikan dengan $\theta$. Jika $1/\alpha+1/\beta = 1$, *Beatty sequences* yang diasosiasikan dengan $\alpha$ and $\beta$ dikatakan *complementary* dan mempunyai property setiap bilangan bulat positif muncul sekali pada salah satu deret tapi tidak keduanya.

**c. Permainan Bachet**

*Permainan :* Terdapat n buah batu pada sebuah meja. Langkah yang diperbolehkan adalah memindahkan paling sedikit satu buah batu namun tidak lebih dari 3 buah batu. Pemenang adalah pemain yang mengambil batu terakhir.

*Permasalahan :* Tentukan posisi kekalahan (*losing position*).

*Analisis :* Himpunan dari L (*losing position*) adalah semua kelipatan dari k+1. Misalkan kedua pemain yang bermain adalah X dan Y. Tentu saja jika n bukan merupakan kelipatan dari k+1. salah satu pemain, katakan X, selalu dapat menuju kelipatan dari k+1. Sedangkan Y tidak dapat menuju kelipatan dari k+1, karena dia hanya bisa mengambil paling banyak k buah batu. Maka dia akan menuju ke suatu bilangan yang bukan merupakan kelipatan dari k+1. Dengan demikian X akan bisa mengambil sejumlah batu sehingga jumlah batu yang diambil X ditambah jumlah batu yang diambil Y sama dengan k+1. Pada akhirnya X akan mencapai 0 yang juga merupakan kelipatan dari k+1.

**d. Permainan kecil lainnya**

Beberapa permainan Nim dapat diselesaikan dengan menggunakan strategi yang sederhana. Mari kita tinjau beberapa permainan berikut.

***Permainan 1 :*** Terdapat sebuah batu di paling ujung papan catur berukuran n x n. A dan B secara bergantian memindahkan batu tersebut ke segala arah (atas, bawah, kiri, kanan. Mereka tidak boleh memindahkan batu ke kotak yang telah mereka kunjungi. Pemain yang kalah adalah yang tidak dapat melangkah.

*Permasalahan :*
a.. Siapa yang menang jika n genap?
b. Bagaimana jika n ganjil?
c. Siapa yang menang jika batu pertama kali diletakkan di sebelah persegi paling ujung?

*Analisis :*
a. Untuk n genap, kita selalu dapat mempartisi papan menjadi domino berukuran 2x1. A sebagai pemain pertama akan selalu bisa memindahkan batu. Jika batu ada pada salah satu persegi pada domino, dia akan melangkah pada sisi domino yang lainnya. Maka A akan menjadi pemain yang terakhir melangkah yang berarti A memenangkan permainan.

b. Untuk n ganjil, kita dapat mempartisi papan dengan domino berukuran 2x1 kecuali sudut papan dimana batu pertama kali diletakkan. Dengan demikian B akan menang.

c. Dalam kasus ini, A akan selalu menang. Untuk n genap, strateginya sama dengan yang disebutkan di (a). Sedangkan untuk n ganjil, kita mempartisi papan menjadi domino kecuali 1 kotak pada sudut papan. Lalu warnai papan secara bergantian(hitam, putih). Tanpa mengurangi keumuman, misalkan batu pertama kali diletakkan pada kotak yang berwarna hitam. Maka A akan melangkah ke kotak yang berwarna putih dan B ke kotak yang berwarna hitam. Sedangkan sudut dari papan tersebut semuanya berwarna putih. Dengan demikian B tidak akan pernah mencapai sudut papan. Oleh karena itu, A memiliki strategi untuk menang dengan memindahkan batu ke kotak kedua dari domino.

***Permainan 2 :*** 98 titik diberikan pada sebuah lingkaran. Maria dan Jose secara bergantian menggambar garis di antara 2 dari titik-titik tersebut. Permainan berakhir saat setiap titik telah digunakan sebagai titik akhir paling sedikit satu akhir. Pemenang adalah yang menggambar garis terakhir.

*Permasalahan :* Jika Jose menggambar pertama kali, siapa yang mempunyai strategi untuk memenangkan permainan?

*Analisis :* Jose memiliki strategi untuk menang. Labeli titik-titik tersebut berdasarkan urutan digunakan sebagai titik akhir dari menggambar garis untuk pertama kali. $A_1$ merupakan titik pertama digunakan dan $A_{98}$ yang terakhir digunakan.

Klaim bahwa pemain $P_1$ yang menggunakan $A_{96}$ pertama kali akan kalah. Jika $P_1$ menghubungkan $A_{96}A_i$, maka $i \leq 97$. Sehingga pemain lainnya $P_1$ dapat menghubungkan $A_{97}A_{98}$ dan memenangkan permainan.
Karena terdapat C(95, 2) = 4465 (sebanyak ganjil) garis yang menghubungkan $A_1, \ldots, A_{95}$, Jose dapat memaksa Maria untuk menjadi yang pertama kali menggunakan $A_{96}$.

***Permainan 3 :*** Dua kumpulan korek api diletakkan di atas meja. Salah satunya terdiri dari $2^{100}$ korek api, lainnya terdiri dari $3^{100}$ korek api. Dua orang pemain secara bergantian memindahkan korek api dari kumpulan tersebut. Dalam setiap giliran, seorang pemain boleh mengambil $k$ buah korek api dari satu kumpulan dan $m$ dari kumpulan lainnya selama $|k^2 - m^2| \leq 1000$. Pemain yang mengambil korek api terakhir kalah.

*Permasalahan :* Pemain mana yang akan menang secara optimal

*Analisis :* Kita sebut posisi $(a, b)$ dengan $a$ korek api dari salah satu kumpulan dan $b$ di kumpulan lainnya sebagai *winning* jika pemain yang memulai gilirannya dari posisi tersebut dapat memenangkan permainan. Sebaliknya kita katakana *losing*. Klaim bahwa pemain pertama menang. Anggap $(2^{100}, 3^{100})$ merupakan posisi *losing*. Maka bagaimanapun pemain pertama melangkah, dia akan menginggalkan posisi *winning*; secara spesifik, $(2^{100} - 500i, 3^{100} - 500i)$ adalah posisi *winning* untuk setiap $i = 1, \ldots, 2002$. Dari setiap posisi tersebut, pemain kedua dapat pindah pada korek api sebanyak $(k_i, m_i)$ dari kumpulan korek api tersebut untuk meninggalkan posisi *losing* lainnya yaitu $(c_i, d_i)$.

Klaim bahwa 2002 *subsequent* posisi *losing* semuanya berbeda. Anggap $(c_i, d_i) = (c_j, d_j)$ untuk suatu $i < j$, sehingga $(k_j, m_j) = (k_i + 500(j - i), m_i + 500(j - i))$. Perhatikan bahwa $|k_i - m_i| \geq 1$, atau pemain pertama dapat meninggalkan $(c_i, d_i)$ untuk pemain kedua. Maka

$$\begin{aligned} |k_j^2 - m_j^2| &= |k_i - m_i|\,(k_i + m_i) \\ &\geq |k^2 - m^2|\,(k_i + m_i + 1000) \\ &\geq |k^2 - m^2| + 1000 > 1000 \end{aligned}$$

Kontradiksi!
Lalu, untuk setiap 2002 posisi tersebut, $-1000 \leq k_i - m_i \leq 1000$, maka berdasarkan *Pigeonhole Principle* dua di antara $k_i - m_i$ adalah sama. Maka dua di antara $c_i - d_i$ juga sama dan satu posisi *losing* akan berpindah ke posisi *losing* yang berbeda, yang tidak mungkin terjadi.

## 5. Kesimpulan

Dalam makalah ini penulis memperkenalkan salah satu teori dalam bidang kombinatorika mengenai *Combinatorial games.* Selain itu juga penulis telah memberi beberapa aplikasi menyangkut teori ini.

Penulis juga memperkenalkan permainan yang bernama *Domineering* dan *Nim-game* juga menganalisis strategi dalam permainan Nim. Permainan-permainan tersebut pun memiliki banyak sekali variasi yang bisa dimainkan dan bisa dianalisis.

*Combinatorial Game Theory* telah banyak dipelajari dan digunakan dalam banyak permainan. Dengan makalah ini penulis berharap dapat memberi inspirasi bagi pembaca untuk lebih dekat dengan *combinatorial games* dan *combinatorial games theory.*

**DAFTAR PUSTAKA**


[1] Engel, Arthur. (1998). Problem-Solving Strategies. Springer.

[2] Wikipedia (2006). http://en.wikipedia.org/wiki/combinatorial_game_theory. Tanggal akses : 1 Januari 2007 pukul 14.36

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Nim. Tanggal akses : 3 Januari 2007 pukul 19.45

[4] Mathematical Games. (2007) http://home.att.net/~numericana/answer/games.htm. Tanggal akses : 3 Januari 2007 pukul 19.39

[5] http://www.gametheory.net/ Tanggal akses: 2 Januari 2007 pukul 21:40.

[6] http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/. Tanggal akses : 1 Januari 2007 pukul 14.13.

[7] Titu Andrescu and Zuming Feng. (1999). Mathematical Olympiads 1998-1999, Problems and Solutions From Around the World.